ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

Λύσεις Τρίτη Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 31/3/2011 Ημερομηνία Παράδοσης: 7/4/2011

Άσκηση 1.

Η μοναδιαία απόκριση του γραμμικού συστήματος (για είσοδο $x(t) = \epsilon(t)$) είναι:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) = \epsilon(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \Big(2e^{-2t} - 1\Big)\epsilon(t) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = h(t) \Rightarrow \\
&\Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt}\Big[\Big(2e^{-2t} - 1\Big)\epsilon(t)\Big] = \left(\frac{d}{dt}\Big(2e^{-2t} - 1\Big)\right)\epsilon(t) + \Big(2e^{-2t} - 1\Big)\frac{d}{dt}\epsilon(t) = \\
&\overset{\frac{d}{dt}\epsilon(t)=\delta(t)}{=} -4e^{-2t}\epsilon(t) + \Big(2e^{-2t} - 1\Big)\delta(t) = \\
&= -4e^{-2t}\epsilon(t) + 2e^{-2t}\delta(t) - \delta(t) = \\
&= \delta(t)\Big(2e^{-2t} - 1\Big) - 4e^{-2t}\epsilon(t).
\end{aligned}
$$

Άρα, η νέα έξοδος (για $x_1(t) = t\epsilon(t)$) του συστήματος θα είναι:

$$
y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \Big(t\epsilon(t)\Big) * h(t) = \Big(t\epsilon(t)\Big) * \Big(\delta(t)\Big(2e^{-2t} - 1\Big) - 4e^{-2t}\epsilon(t)\Big). \tag{1}
$$

Άρα, θα έχουμε:

$$
\Big(t\epsilon(t)\Big) * \underbrace{\Big[\delta(t)\Big(2e^{-2t} - 1\Big)\Big]}_{\delta(t)} = \Big(t\epsilon(t)\Big) * \delta(t) = t\epsilon(t). \tag{2}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\Big(t\epsilon(t)\Big) * \Big(-4e^{-2t}\epsilon(t)\Big) &= \int_{-\infty}^{\infty} u\epsilon(u)(-4e^{-2(t-u)}\epsilon(t-u))du = \int_{0}^{t} -4ue^{-2t}e^{2u}du = \\
&= -4e^{-2t}\int_{0}^{t} ue^{2u}du \overset{\text{κατά παράγοντες ολόκληρωση}}{=} -4e^{-2t}\Big[\frac{1}{2}ue^{2u}\Big|_{0}^{t} - \int_{0}^{t} e^{2u}du\Big] = \\
&= -4e^{-2t}\Big[\frac{1}{2}te^{2t} - \int_{0}^{t} e^{2u}du\Big] = -4e^{-2t}\Big[\frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}\Big] = \\
&= -2t + 2 - 2e^{-2t},
\end{aligned} \tag{3}
$$

Οπότε, τελικώς θα είναι

$$
y_1(t) = t\epsilon(t) - 2t + 2 - 2e^{-2t}.
$$

Άσκηση 2.

Έχουμε ότι:

$$x(t) = |t| = \begin{cases} t, & t > 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = 2\epsilon(t) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d}{dt}\big(2\epsilon(t) - 1\big) \overset{\frac{d}{dt}\epsilon(t)=\delta(t)}{=} 2\delta(t). \tag{4}$$

Επίσης, από θεωρία είναι γνωστό ότι:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = (j2\pi f)^2 X(f). \tag{5}$$

$$\mathcal{F}\Big\{\delta(t)\Big\} = 1. \tag{6}$$

Από τις σχέσεις (4),(5),(6) προκύπτει ότι

$$(j2\pi f)^2 X(f) = 2 \Rightarrow X(f) \overset{j^2=-1}{=} -\frac{1}{2\pi^2 f^2}.$$

Άσκηση 3.

Έχουμε ότι:

$$\mathcal{F}\Big\{x^2(t)\Big\} = \mathcal{F}\Big\{x(t)x(t)\Big\} = X(f) * X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(u)X(f-u)du.$$

Οπότε, το ολοκλήρωμα θα λαμβάνει μη μηδενικές τιμές για
$-f_1 \leq u \leq f_1$ και $-f_1 \leq f - u \leq f_1$,
δηλαδή (προσθέτοντας κατά μέλη)
$-2f_1 \leq u \leq 2f_1$.
Οπότε, το εύρος των μη μηδενικών τιμών του μετασχηματισμού Fourier του σήματος $x^2(t)$ θα είναι

$$-2f_1 \leq u \leq 2f_1.$$

Άσκηση 4.

Θέλουμε να βρούμε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος

$$x(t) = 2A\frac{\sin(\pi t)\sin(\pi t/2)}{\pi^2 t^2} = \underbrace{A\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}}_{x_1(t)}\underbrace{\frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t/2}}_{x_2(t)} = x_1(t)\,x_2(t).$$

Άρα, θα ισχύει ότι

$$X(f) = \mathcal{F}\Big\{x_1(t)\,x_2(t)\Big\} = X_1(f) * X_2(f),$$

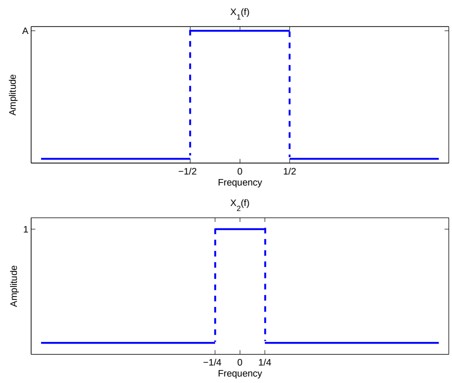
όπου,

$$X_1(f) = A\,\mathrm{rect}(f)$$
$$X_2(f) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{1/2}\right)$$

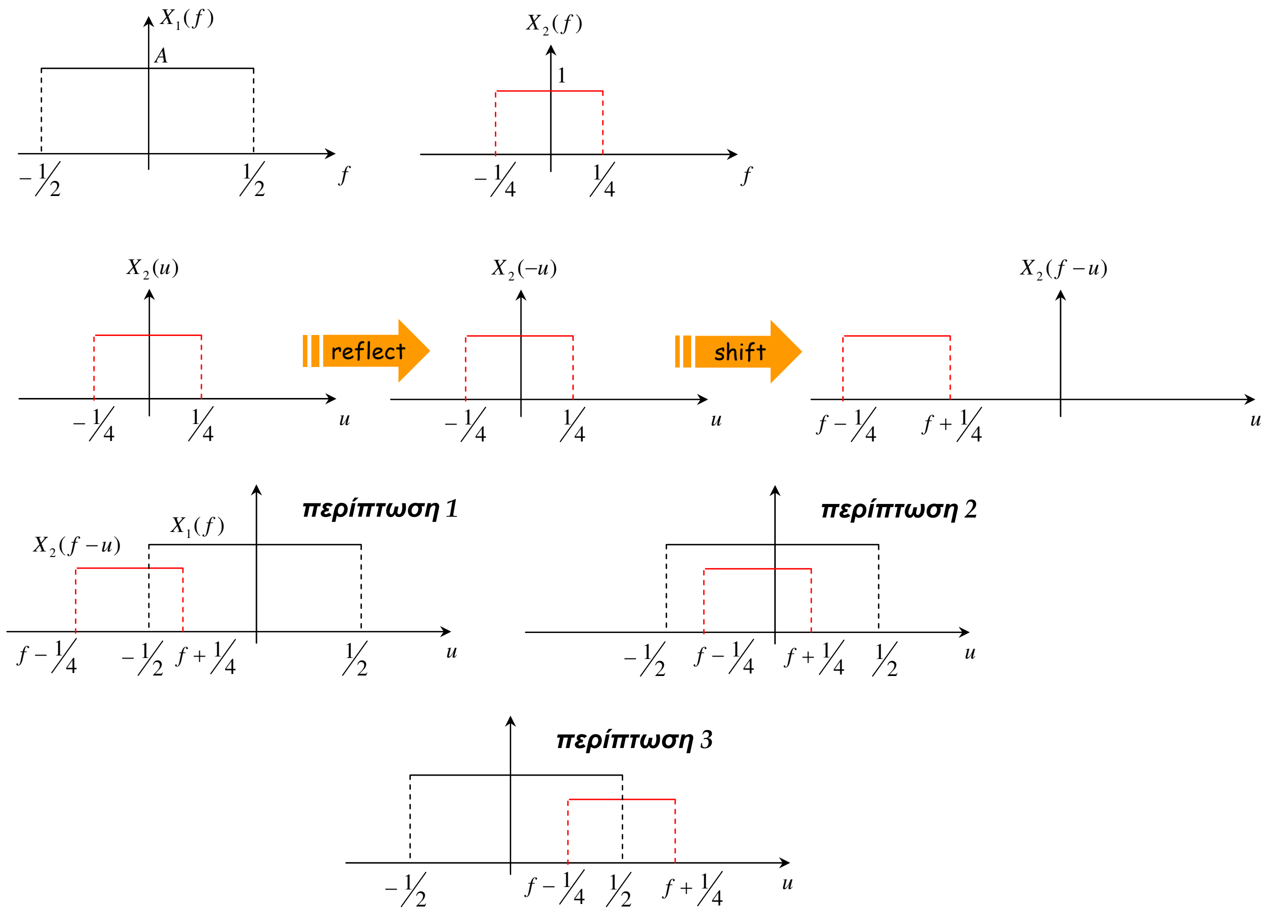
φαίνονται στο σχήμα (1). Το $X(f)$ που είναι και το αποτέλεσμα της συνέλιξης, τελικώς θα ορίζεται στο διάστημα $[-3/4, 3/4]$. Άρα, θα έχουμε ότι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u)X_2(f-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} Arect(u)rect\Big(\frac{f-u}{1/2}\Big)du.$$

Σχηματικά, η συνέλιξη χωρίζεται σε τρεις περιπτώσεις όπως φαίνονται στο σχήμα (3).



Σχήμα 1: άσκηση 4.



Σχήμα 2: άσκηση 4, διαδικασία συνέλιξης.

1. το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μη μηδενικό για

$$\left.\begin{array}{l} f+\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} \\ f-\frac{1}{4} < -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f > -\frac{3}{4} \\ f < -\frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

και,

$$\int_{-1/2}^{f+1/4} A du = A\Big(\frac{3}{4}+f\Big).$$

2. το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μη μηδενικό για

$$\left.\begin{array}{l} f-\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} \\ f+\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f > -\frac{1}{4} \\ f < \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

και,

$$\int_{f-1/4}^{f+1/4} A du = \frac{A}{2}.$$

3. το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι μη μηδενικό για

$$\left.\begin{array}{l} f-\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \\ f+\frac{1}{4} > \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f < \frac{3}{4} \\ f > \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

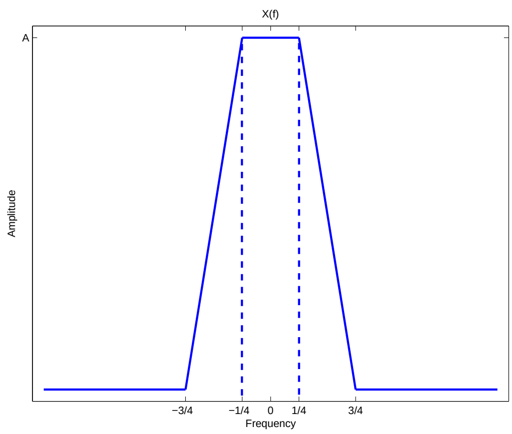
και,

$$\int_{f-1/4}^{1/2} A du = A\Big(\frac{3}{4}-f\Big).$$

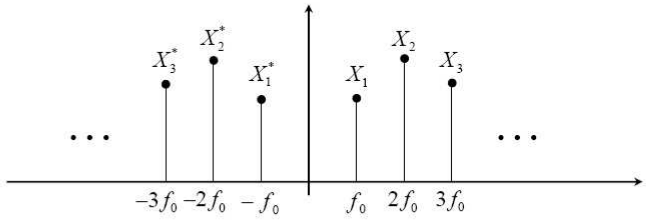
Άρα, τελικώς

$$X(f) = \begin{cases} A\Big(f+\frac{3}{4}\Big), & f \in [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}] \\ \frac{A}{2}, & f \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \\ A\Big(\frac{3}{4}-f\Big), & f \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο σχήμα (3) φαίνεται η συνάρτηση $X(f)$.



Σχήμα 3: άσκηση 4, τελικό αποτέλεσμα συνέλιξης: $X(f)$.



Σχήμα 4: άσκηση 5.

Άσκηση 5.

Το σήμα $x(t)$ έχει συνιστώσες σε ακέραια πολλαπλάσια της f_0 όπως φαίνεται στο σχήμα (4). Επειδή το $x(t)$ είναι πραγματικό ισχύει ότι $X_k = X_{-k}^*$. Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ είναι

$$\mathcal{F}\Big\{x(t)\Big\} = \sum_k X_k\delta(f - kf_0).$$

Οπότε, ο μετασχηματισμός Fourier του $y(t)$ θα είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big\{y(t)\Big\} &= \mathcal{F}\Big\{\cos(2\pi f_1 t)x(t)\Big\} = \left(\frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1)\right) * \left(\sum_k X_k\delta(f - kf_0)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_k \Big(X_k\delta(f - f_1 - kf_0) + X_k\delta(f + f_1 - kf_0)\Big)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_k X_k\delta(f - f_1 - kf_0)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_k X_k\delta(f + f_1 - kf_0)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{-k}(X_{-k}\delta(f - f_1 - (-k)f_0)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_k (X_k\delta(f + f_1 - kf_0)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_k \Big(X_{-k}\delta(f - f_1 + kf_0) + X_k\delta(f + f_1 - kf_0)\Big)\right).
\end{aligned}$$

Για $k = 6$ και $f_1 = 6f_0$ είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big\{y(t)\Big\} &= \frac{1}{2}(X_{-6} + X_6) \\
&\overset{X_k = X_{-k}^*}{=} \frac{1}{2}(X_6^* + X_6) = \\
&= \frac{1}{2}2\Re\{X_6\} = \\
&= \Re\{X_6\}
\end{aligned}$$

Δηλαδή από $-f_0/2$ ως $f_0/2$ το φίλτρο θα αφήσει να περάσει μόνο το $\Re\{X_6\}$ αφού αυτό μόνο βρίσκεται μεταξύ αυτών των ορίων.