ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

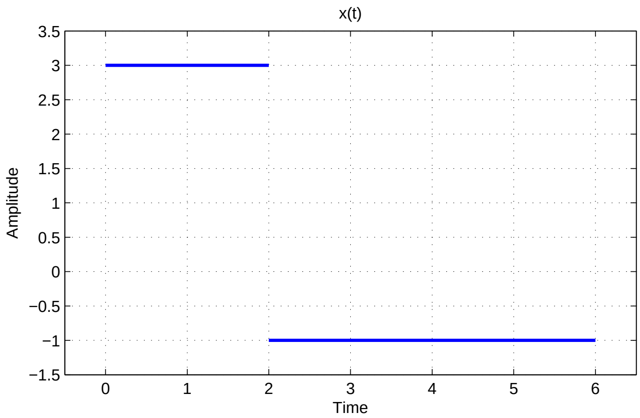
ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - Εαρινό Εξάμηνο 2011
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/3/2011 Ημερομηνία Παράδοσης: 28/3/2011

Άσκηση 1.

Στο σχήμα 1 φαίνεται το χρονικό σήμα που εξετάζουμε. Η μέση ισχύς του σήματος εισόδου



Σχήμα 1: άσκηση 1.

είναι η εξής:

$$P_x = \frac{1}{6}\int_0^6 x^2(t)dt = \frac{1}{6}\Big(9\int_0^2 dt + 1\int_2^6 dt\Big) = \frac{22}{6} = 3.67 \text{ Watts}.$$

Για να βρούμε την ισχύ της εξόδου θα πρέπει να αναπτύξουμε το σήμα σε σειρά Fourier, άρα οι συντελεστές της σειράς θα είναι οι εξής:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{6}\int_0^6 x(t)dt = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi f_0 kt}dt = \frac{1}{6}\int_0^6 x(t)e^{-j2\pi f_0 kt}dt = \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 3\cdot e^{-j2\pi f_0 kt}dt - \frac{1}{6}\int_2^6 1\cdot e^{-j2\pi f_0 kt}dt = \\
&= \frac{-3}{j2\pi k}(e^{-j2\pi k f_0 2} - 1) + \frac{1}{j2\pi k}(e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 2}) = \\
&= \frac{4}{j2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{3}k}(e^{j\frac{\pi}{3}k} - e^{-j\frac{\pi}{3}k}) = \frac{4}{\pi k}\sin\Big(\frac{\pi}{3}k\Big)e^{-j\frac{\pi}{3}k}.
\end{aligned}$$

Άρα, οι τιμές των συντελεστών θα είναι:

- $X_1 = \frac{1}{6}$ Hz
- $X_2 = \frac{2}{6}$ Hz
- $X_3 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}$ Hz
- $|X_4| = \left|\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}4\right)\right| \rightarrow \frac{4}{6}$ Hz

- $|X_5| = \left|\frac{4}{5\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}5\right)\right| = 0.2205 \to \frac{5}{6}$ Hz
- $X_6 = 0 \to 1$ Hz
- $|X_7| = \left|\frac{4}{7\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}7\right)\right| = 0.1575 \to \frac{7}{6}$ Hz
- $|X_8| = \left|\frac{4}{8\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}8\right)\right| = 0.1378 \to \frac{8}{6}$ Hz
- $X_9 = 0 \to 1.5$ Hz

Άρα, η μέση ισχύς του σήματος εξόδου από τον ενισχυτή θα είναι:

$$P_{\text{out}} = 2\Big(|10X_4|^2 + |10X_5|^2 + |10X_7|^2 + |10X_8|^2\Big) = 33.6872 \text{ Watts}$$

Άσκηση 2.

- Το σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier, άρα γράφεται ως εξής:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Λαμβάνοντας το συζυγές της προηγούμενης εξίσωσης, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\Big)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} = \\ &= \sum_{-k=\infty}^{-\infty} X_{-k}^* e^{-j2\pi(-k) f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{-k}^* e^{j2\pi k f_0 t} \end{aligned}$$

Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα θα ισχύει ότι $x(t) = x^*(t)$, δηλαδή

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{-k}^* e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow X_k = X_{-k}^*$$

Άρα, θα ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} &X_k = X_k^R + jX_k^I \\ &X_{-k}^* = \Big(X_{-k}^R + jX_{-k}^I\Big)^* = \Big(X_{-k}^R\Big)^* - j\Big(X_{-k}^I\Big)^* = X_{-k}^R - jX_{-k}^I \end{aligned}\right\} \xRightarrow{X_k = X_{-k}^*} \begin{aligned} X_k^R &= X_{-k}^R \\ X_k^I &= -X_{-k}^I \end{aligned} \qquad (A)$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (-t)} = \sum_{-k=-\infty}^{\infty} X_{-k} e^{j2\pi(-k) f_0 (-t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{-k} e^{j2\pi k f_0 t},$$

δηλαδή οι συντελεστές Fourier X_{-k} σχετίζονται με το σήμα $x(-t)$. Το άρτιο μέρος του σήματος θα είναι:

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{-k} e^{j2\pi k f_0 t}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 t}\Big(X_k + X_{-k}\Big)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{X_k + X_{-k}}{2}\right) e^{j2\pi k f_0 t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{X_k^R + jX_k^I + X_{-k}^R + jX_{-k}^I}{2}\right) e^{j2\pi k f_0 t} = \\ &\overset{\text{Εξ.}(A)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{X_k^R + jX_k^I + X_k^R - jX_k^I}{2}\right) e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2X_k^R}{2}\right) e^{j2\pi k f_0 t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^R e^{j2\pi k f_0 t}. \end{aligned}$$

Άρα, το άρτιο μέρος του σήματος αναπτύσσεται μόνο με τους συντελεστές X_k^R.

- Έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1+e^{-jk\pi/3}-2e^{-jk\pi}}{jk} \Rightarrow X_{-k}^* = \left(\frac{1+e^{-j(-k)\pi/3}-2e^{-j(-k)\pi}}{j(-k)}\right)^* = \\ &= \left(\frac{1+e^{jk\pi/3}-2e^{jk\pi}}{-jk}\right)^* = \frac{1+e^{-jk\pi/3}-2e^{-jk\pi}}{jk} \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_k = X_{-k}^*, \end{aligned}$$

όπου από το προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι όταν ισχύει $X_k = X_{-k}^*$ το σήμα είναι πραγματικό.

Άσκηση 3.

Οι συντελεστές Fourier θα είναι:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-\alpha t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} -e^{-\alpha\left(t-T_0/2\right)}dt = \\ &\overset{u=t-T_0/2}{=} \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-\alpha t}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-\alpha u}du = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0} -e^{-\alpha\left(t-T_0/2\right)}e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \\ &\overset{\text{στο } 2^0 \text{ ολοκλ.: } u=t-T_0/2}{=} \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} -e^{-\alpha u}e^{-j2\pi k f_0\left(u+T_0/2\right)}du = \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} -e^{-\alpha u}e^{-j2\pi k f_0 u}e^{-j2\pi k f_0 T_0/2}du = \\ &\overset{\text{στο } 2^0 \text{ ολοκλ.: } t=u}{=} \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} -e^{-\alpha t}e^{-j2\pi k f_0 t}e^{-j\pi k}dt = \\ &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \left(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t}e^{-j\pi k}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt. \end{aligned}$$

Άρα, θα είναι:

$$X_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} e^{-(\alpha+j2\pi k f_0)t}dt, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{2}{T_0}\frac{1}{-(\alpha+j2\pi k f_0)}\left(e^{-\alpha T_0/2}(e^{-j\pi})^k - 1\right), & \text{αλλιώς} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{2(1+e^{-\alpha T_0/2})}{\alpha T_0 + j2\pi k}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 4.

(α) Το εσωτερικό γινόμενο των δύο συναρτήσεων είναι:

$$\langle g(t), \epsilon(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\epsilon(t)dt = \int_{0}^{1/3} 6t\,dt + \int_{1/3}^{1} (-3t+3)\,dt = 1$$

(β) Είναι $\hat{g}(t) = \alpha\epsilon(t)$. Η διάσταση του χώρου μας είναι ένα. Σύμφωνα με το θεώρημα της καθετότητας:

$$\alpha = \int_{0}^{1} g(t)\epsilon(t)dt = \int_{0}^{1/3} g(t)\epsilon(t)dt + \int_{1/3}^{1} g(t)\epsilon(t)dt = 1.$$

Άρα, $\hat{g}(t) = \alpha\epsilon(t) \Rightarrow \hat{g}(t) = \epsilon(t)$.

(γ) Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσεγγισής που προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$\begin{aligned}
&e(t) = g(t) - \hat{g}(t) = g(t) - \epsilon(t) \Rightarrow \\
&\|e(t)\|^2 = \|g(t) - \epsilon(t)\|^2 = \langle g(t) - \epsilon(t), g(t) - \epsilon(t)\rangle = \\
&= \int_{0}^{1} (g(t) - \epsilon(t))(g(t) - \epsilon(t))dt = \\
&= \int_{0}^{1/3} (6t-1)^2 dt + \int_{1/3}^{1} (-3t+3-1)^2 dt = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Άσκηση MATLAB.