ΗΥ215: Λύσεις 1ης σειράς ασκήσεων

1. • <u>1ος τρόπος:</u>

   Γνωρίζουμε ότι $w + w^* = 2\Re\{w\}$, άρα αν $w = z_1 z_2^*$ τότε, $w + w^* = z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* = z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = 2\Re\{z_1 z_2^*\}$.

   Άρα ο αριθμητής του 2ου μέλους της εκφώνησης γράφεται ως:

$$\frac{1}{2}\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*} = \frac{1}{2}\frac{2\Re\{z_1 z_2^*\}}{z_2 z_2^*} = \frac{\Re\{z_1 z_2^*\}}{z_2 z_2^*}.$$

   Ο παρονομαστής $z_2 z_2^* = |z_2|^2$, άρα είναι αριθμός, οπότε μπορεί να μπει μέσα στο πραγματικό μέρος του αριθμητή, άρα θα έχουμε: $\dfrac{\Re\{z_1 z_2^*\}}{z_2 z_2^*} = \Re\{\dfrac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}\} = \Re\{\dfrac{z_1}{z_2}\}$.

   <u>2ος τρόπος:</u>

   Το πρώτο μέλος γράφεται:

$$\Re\{\frac{z_1}{z_2}\} = \Re\{\frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}}\} = \Re\{\frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}\} = \frac{r_1}{r_2}\Re\{e^{j(\theta_1-\theta_2)}\} = \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2).(1)$$

   Το δεύτερο μέλος γράφεται:

$$\frac{1}{2}\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*} = \frac{1}{2}\frac{r_1 r_2 e^{j(\theta_1-\theta_2)} + r_1 r_2 e^{-j(\theta_1-\theta_2)}}{r_2^2} = \frac{r_1 r_2}{2r_2^2}2\cos(\theta_1-\theta_2) = \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2).(2)$$

   Οι (1), (2) είναι ίσες, άρα και τα πρώτα μέλη τους είναι ίσα, άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

   • Είναι:

$$|z_1+z_2|^2 = |r_1 e^{j\theta_1}+r_2 e^{j\theta_2}|^2 = (r_1 e^{j\theta_1}+r_2 e^{j\theta_2})(r_1 e^{j\theta_1}+r_2 e^{j\theta_2})^* = (r_1 e^{j\theta_1}+r_2 e^{j\theta_2})(r_1 e^{-j\theta_1}+ r_2 e^{-j\theta_2}) = r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 e^{-j(\theta_1-\theta_2)} + r_1 r_2 e^{j(\theta_1-\theta_2)} = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

   Όμως ξέρουμε ότι $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$, άρα θα είναι:

$$(r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) \leq (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)) \leq (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) \Leftrightarrow$$
$$(r_1 - r_2)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (r_1 + r_2)^2.$$

Όμως είναι προφανές ότι $r_1 = |z_1|, r_2 = |z_2|$ άρα η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2,$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. • Είναι:

$$\cos^2(\theta) = (\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2})^2 = \frac{1}{4}(e^{j2\theta} + 2 + e^{-j2\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{j2\theta} + e^{-j2\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}2\cos(2\theta) =$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)).$$

• Είναι:

$$\sin(\theta)\sin(\phi) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}\frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = -\frac{1}{4}(e^{j(\theta+\phi)} - e^{j(\theta-\phi)} - e^{j(-\theta+\phi)} + e^{j(-\theta-\phi)}) =$$
$$-\frac{1}{4}(e^{j(\theta+\phi)} + e^{-j(\theta+\phi)}) + \frac{1}{4}(e^{j(\theta-\phi)} + e^{-j(\theta-\phi)}) = -\frac{1}{4}2\cos(\theta+\phi) + \frac{1}{4}2\cos(\theta-\phi) =$$
$$\frac{1}{2}\cos(\theta-\phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta+\phi)$$

3. 1ος τρόπος - του μηχανικού :) :

Είναι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}(x_o(t) + x_e(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}(x_o^2(t) + 2x_e(t)x_o(t) + x_e^2(t))dt =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt.$$

Η συνάρτηση $x_e(t)x_o(t)$ είναι γινόμενο μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης, άρα είναι είναι περιττή συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε συμμετρικό γύρω απ'το μηδέν διάστημα είναι πάντα μηδέν. Άρα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt.$$

που είναι το ζητούμενο.

<u>2ος τρόπος - του μαθηματικού :) :</u>

Θα αποδείξουμε αναλυτικά ότι $\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt$. Το άρτιο και το περιττό μέρος του $x(t)$ γράφονται αντίστοιχα ως:

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}, x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

Άρα θα είναι, με λίγες πράξεις:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(t)-x^2(-t)}{4}dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(-t)dt.$$

Τώρα έχουμε: $-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(-t)dt$. Θέτω $u = -t \Rightarrow du = -dt, u_1 = -\infty, u_2 = +\infty$. Άρα θα είναι:

$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(-t)dt = \frac{1}{4}\int_{\infty}^{-\infty} x^2(u)du = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt.$$

Άρα δείξαμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = 0.$$

Οπότε τελικά

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt.$$

που είναι το ζητούμενο.

4. • Είναι:

$$\phi_{yx}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(-t+\tau)x(\tau)d\tau$$

Θέτω $u = -t+\tau \Rightarrow du = d\tau, u_1 = +\infty, u_2 = -\infty$. Άρα:

$$\phi_{yx}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(-t+\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)x(u+t)du = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+u)y(u)du = \phi_{xy}(t),$$

που είναι το ζητούμενο.

- <u>1ος τρόπος - του μηχανικού :) :</u>

  Παραπάνω δείξαμε ότι $\phi_{xy}(t) = \phi_{yx}(-t)$. Αν $y(t) = x(t)$, τότε παίρνουμε ότι $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}(-t)$, που είναι ακριβώς το ζητούμενο - η $\phi_{xx}(t)$ είναι άρτια συνάρτηση.

  <u>2ος τρόπος - του μαθηματικού :) :</u>

  Θέλω να δείξω ότι $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}(-t)$. Είναι:

  $$\phi_{xx}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t+\tau)x(\tau)d\tau$$

  Θέτω $u = -t + \tau \Rightarrow du = d\tau, u_1 = +\infty, u_2 = -\infty$. Άρα:

  $$\phi_{xx}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t+\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(u+t)du = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+u)x(u)du = \phi_{xx}(t),$$

  που είναι το ζητούμενο.

- Θέλουμε να δείξουμε ότι:

  $$\text{αν } y(t) = x(t+T), \text{ τότε } \phi_{xy}(t) = \phi_{xx}(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-T+\tau)x(\tau)d\tau. \quad (1)$$

  Είναι (θέτοντας $y(t) = x(t+T)$):

  $$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau+T)d\tau.$$

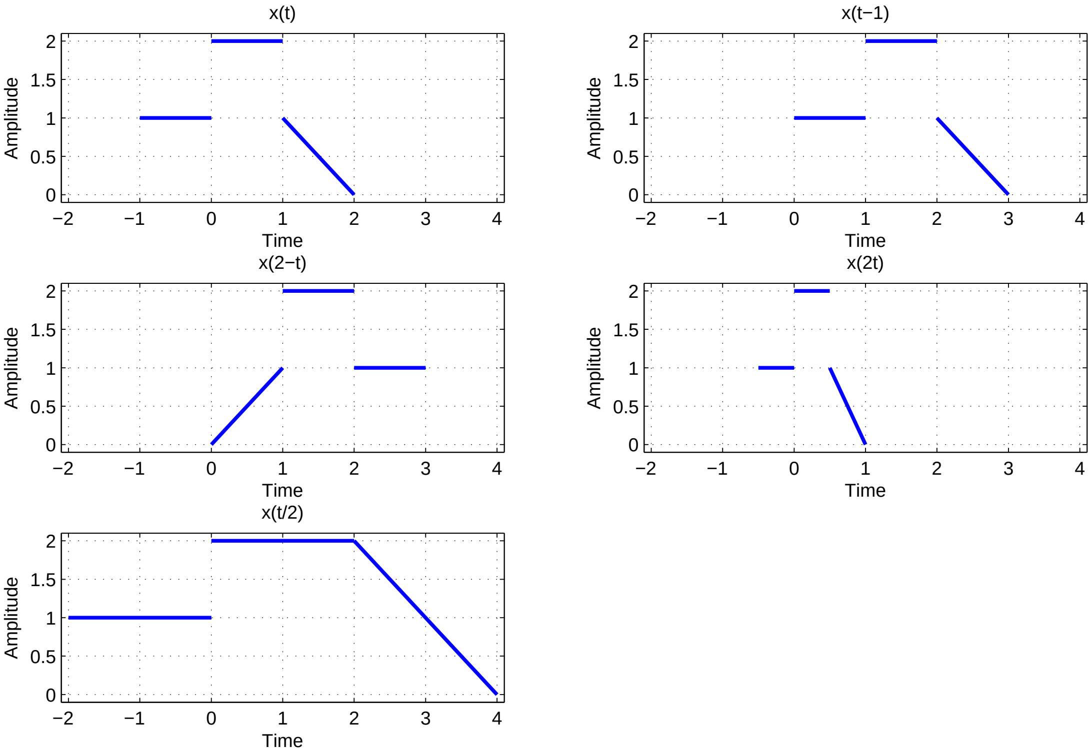
  Θέτω $u = \tau + T (\Rightarrow \tau = u - T) \Rightarrow du = d\tau, u_1 = +\infty, u_2 = -\infty$. Άρα:

  $$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(\tau+T)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-T+u)x(u)du,$$

  που είναι ίση με την (1). Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

5. Στο παρακάτο σχήμα (Σχήμα 1) φαίνεται η συμπεριφορά της χρονικής συνάρτησης $x(t)$ για τις διάφορες περιπτώσεις.

6. Σας παραπέμπουμε στη λύση της άσκησης 4, 1η σειρά ασκήσεων, Άνοιξη 2009. :-)



Σχήμα 1: άσκηση 5.