ΗΥ215: 2^{η} Σειρά Ασκήσεων

19 Μαρτίου 2011

Παράδοση: 28 Μαρτίου 2011

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Το περιοδικό σήμα $x(t)$ δίνεται σε μια περίοδο να είναι:

$$x(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 2 \\ -1 & 2 \leq t < 6 \end{cases}$$

   Το σήμα περνάει από ένα ενισχυτή ο οποίος έχει κέρδος 10 για τις συχνότητες από 0.5 Hz έως 1.5 Hz και μηδενικό κέρδος για όλες τις άλλες συχνότητες. Να υπολογιστεί η μέση ισχύ του σήματος σε μια περίοδο καθώς και η μέση ισχύ του σήματος (πραγματικού) εξόδου από τον ενισχυτή. Σημείωση: η μέση ισχύ ενός περιοδικού σήματος δίνεται ως:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt$$

2.
   - Αν ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές $X_k = X_k^R + jX_k^I$, δείξτε ότι το άρτιο μέρος του σήματος θα αναπτύσσεται μόνο με τους συντελεστές X_k^R
   - Οι συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier:

$$X_k = \frac{1 + e^{-j\pi/3k} - 2e^{-j\pi k}}{jk}$$

   αντιστοιχούν σε πραγματικό, φανταστικό, ή μιγαδικό περιοδικό σήμα·

3. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier το περιοδικό με περίοδο T_0, σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \leq t < T_0/2 \\ -e^{-a(t-T_0/2)} & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

4. Έστω δύο συναρτήσεις:

$$g(t) = \begin{cases} 6t, & 0 \leq t < 1/3, \\ -3t+3, & 1/3 \leq t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

   και

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

(α′) Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των δύο συναρτήσεων

(β′) Γράψτε το $g(t)$ σαν γραμμικό συνδυασμό της $\epsilon(t)$, δηλ. $\hat{g}(t) = a\epsilon(t)$, όπου $\hat{g}(t)$ είναι η προσέγγιση της $g(t)$ στο χώρο που γεννιέται από την $\epsilon(t)$.

(γ′) Βρείτε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της παραπάνω προσέγγισης

5. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε Matlab ώστε να μπορούμε να ελέγχουμε αν οι απαντήσεις μας στις ασκήσεις είναι σωστές. Σημαντική σημείωση: εσείς ΠΡΕΠΕΙ να λύσετε τις ασκήσεις ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ. Εδώ απλώς μαθαίνουμε πως να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας με το Matlab.

Στο μάθημα έχουμε δείξει ότι η ανάπτυξη σε σειρά Fourier του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left[(2k+1)\omega_0 t\right] \\ &= \frac{4}{\pi}(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0 t) + \cdots) \end{aligned}$$

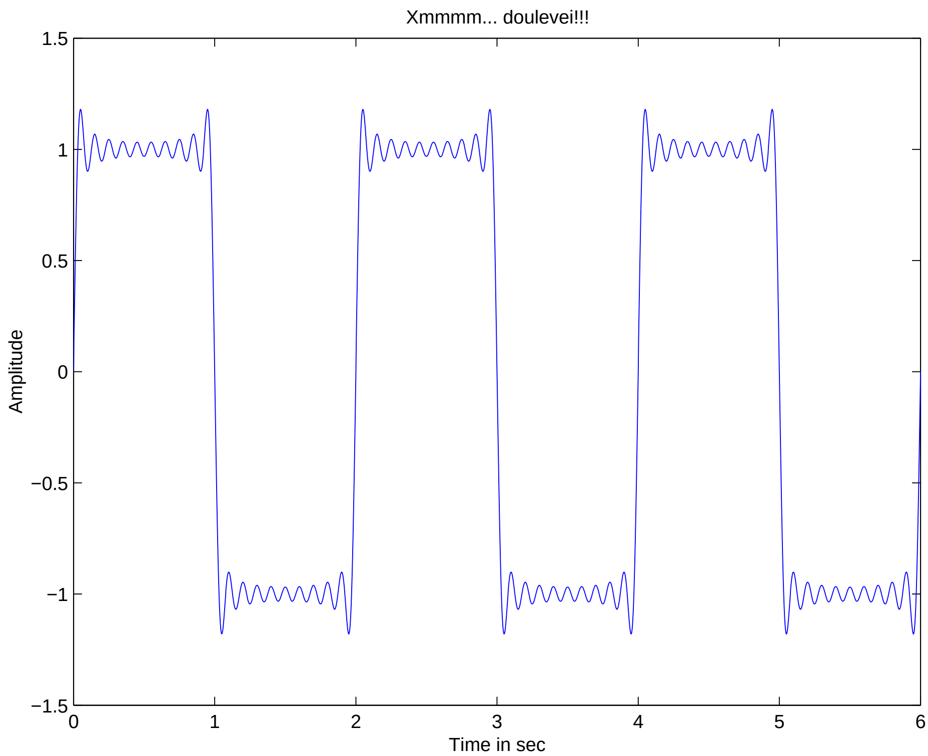
Το παρακάτω πρόγραμμα σε Matlab υπολογίζει μια προσέγγιση του σήματος $x(t)$ χρησιμοποποιώντας τη σειρά Fourier με 10 όρους. Αναλύστε το πρόγραμμα γραμμή προς γραμμή. Για απορίες στείλτε email στη λίστα. Στην προσπάθειά σας να καταλάβετε, συμβουλή μου είναι να δουλεύετε παραδείγματα με μικρά διανύσματα (π.χ. 4 διαστάσεων και όχι των 100000).

```
To =2;         % posh einai h periodo (se sec)? epilegw mia pou na mou aresei. p.x.
d = To/600;    % posa shmeia ana periodo thelw na exw?
D = 3;         % poses periodous thelw na dw?


N = 10;        % posous orous sth seira Fourier tha xrhsimopoihsw?
Ao = 0;        % o prwtos oros einai mhden
k = 0:N-1;
Ak = 4/pi * 1./(2*k+1);  % oi 10 oroi Fourier


t = 0:d:D*To; % xronos t
w0 = 2*pi/To; % kuklikh suxnothta
```

```
x = Ao + Ak*sin( ((2*k'+1)*w0) * t); plot(t,x); xlabel('Time in
sec'); ylabel('Amplitude'); title('Xmmmm... doulevei!!!');
```



Με βάση τα παραπάνω, γράψτε τον αντίστοιχο κώδικα σε Matlab για τις ασκήσεις 1 και 3.