ΗΥ215: 1^η Σειρά Ασκήσεων

28 Φεβρουαρίου 2011

Παράδοση: 7 Μαρτίου 2011

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Αν $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$, και $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$, αποδείξτε τις σχέσεις:
   - $$\Re\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$$
   - $$(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

   όπου $\Re$ συμβολίζει το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.

2. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, δείξτε τις σχέσεις:
   - $$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$
   - $$\sin\theta \sin\phi = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$$

3. Ένα οποιοδήποτε σήμα, $x(t)$, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός άρτιου, $x_e(t)$, και ενός περιττού σήματος, $x_o(t)$: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$. Δείξτε ότι ισχύει:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt$$

4. Η συνάρτηση συσχέτισης δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$, ορίζεται ως:
   $$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau$$
   - Δείξτε ότι:
     $$\phi_{xy}(t) = \phi_{yx}(-t)$$
   - Δείξτε ότι η $\phi_{xx}(t)$ είναι μια άρτια συνάρτηση
   - Αν $y(t) = x(t+T)$, δείξτε ότι: $\phi_{xy}(t) = \phi_{xx}(t-T)$

5. Θεωρείστε το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ 2, & 0 \le t < 1 \\ -t+2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

   Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ καθώς και τα σήματα $x(t-1)$, $x(2-t)$, $x(2t)$ και $x(t/2)$.

6. Στην 1η σειρά ασκήσεων της περιόδου Άνοιξη 2009 (δείτε την ιστοσελίδα του μαθήματος), η άσκηση 4 διαπραγματεύεται το θέμα της διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης κατά πλάτος ενός σήματος. Διαβάστε την εν λόγω άσκηση και προτείνεται ένα δικό σας παράδειγμα.