Παραγώγιση στον υπολογισμό του Μετασχηματισμού Fourier

Χρησιμοποιώντας την σημαντική ιδιότητα της παραγώγισης του Μετασχηματισμού Fourier

$$F\{x^n(t)\} = (j2\pi f)^n X(f)$$

όπου $(^n)$ σημαίνει n-οστή παράγωγος του σήματος, μπορούμε να απλοποιήσουμε αρκετά τις πράξεις κατά την προσπάθειά μας να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier ενός σήματος. Και βέβαια όλες οι ιδιότητες είναι χρήσιμες και μάλιστα τις χρησιμοποιούμε ευρύτατα. Ομως η ιδιότητα της παραγώγισης συνήθως παραμελείται γιατί δεν είναι συνήθες η παραγώγιση συναρτήσεων με ασυνέχειες όπου η εφαπτόμενη στα σημεία ασυνέχειας είναι μηδέν (όπως για το σήμα του παραθύρου μήκους T).

Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να πρέπει να δείξουμε ότι η παράγωγος της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης συμπεριφέρεται όπως η κατανομή $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d\epsilon(t)}{dt}dt = x(0)$$

Σας θυμίζω ότι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

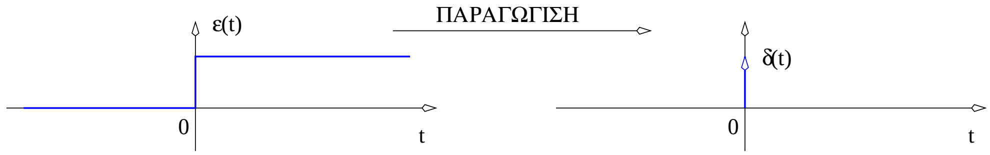
$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Για $t = 0$ η τιμή είναι τυχαία μεταξύ του 1 και 0. Ας δείξουμε τώρα το παραπάνω:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\frac{d\epsilon(t)}{dt}dt &= \epsilon(t)x(t)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(t)\frac{dx(t)}{dt}dt \\
&= \epsilon(+\infty)x(+\infty) - \underbrace{\epsilon(-\infty)}_{0}x(-\infty) - \textstyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx(t)}{dt}dt \\
&= x(+\infty) - x(t)]_0^{+\infty} \\
&= x(+\infty) - x(+\infty) + x(0) \\
&= x(0)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = \delta(t)$$

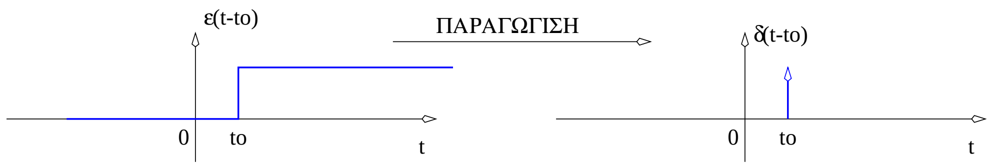


Σχήμα 1: Παράγωγος του σήματος μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης.

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.1 Ομοια μπορούμε να δείξουμε και για τη συνάρτηση $\epsilon(t-t_0)$ ότι ισχύει

$$\frac{d\epsilon(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0)$$

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.2.

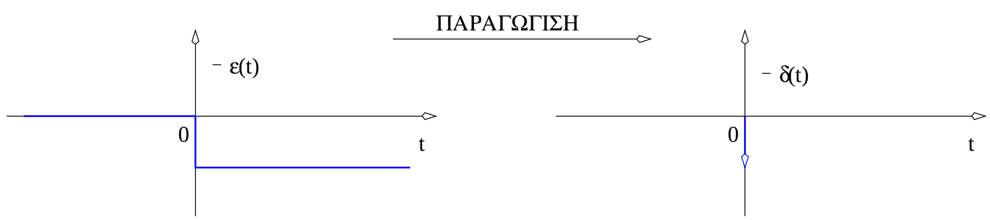


Σχήμα 2: Παράγωγος του σήματος μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης μετατοπισμένης κατά t_0.

Επίσης

$$\frac{d(-\epsilon(t))}{dt} = -\delta(t)$$

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.3



Σχήμα 3: Παράγωγος του σήματος της αρνητικής μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης.

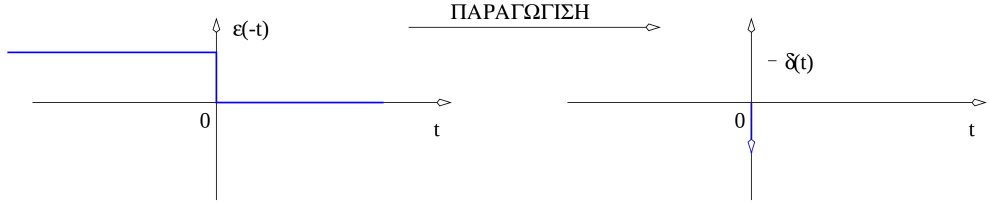
Ομοια με παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{d\epsilon(-t)}{dt} = -\delta(t)$$

Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.4

Ας δούμε παραδείγματα όπου θα χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω.

Παραδείγματα:



Σχήμα 4: Παράγωγος του $\epsilon(-t)$.

1. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος παραθύρου:

$$x(t) = Arect(\frac{t - \frac{a+b}{2}}{b-a})$$

το οποίο φαίνεται στο Σχήμα.5(α).

Από προηγούμενα έχουμε δει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του παραθύρου χωρίς μετακίνηση από την αρχή των αξόνων είναι:

$$F\{x(t)\} = ATsinc(fT)$$

όπου $T = b - a$. Με μετακίνηση

$$\begin{aligned} F\{x(t - \frac{a+b}{2})\} &= ATsinc(fT)e^{-j2\pi f(a+b)/2} \\ &= ATsinc(fT)e^{-j\pi f(a+b)} \end{aligned}$$

Από το Σχήμα.5(β) βλέπουμε ότι μπορούμε να παραστήσουμε το σήμα παραθύρου ως άθροισμα δύο μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων

$$x(t) = A[\epsilon(t-a) - \epsilon(t-b)]$$

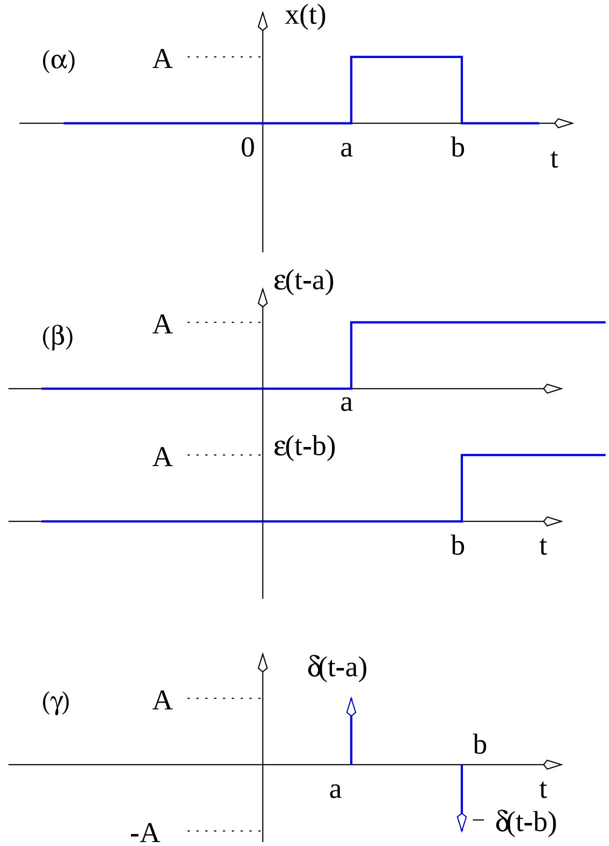
επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &= A[\delta(t-a) - \delta(t-b)] \Rightarrow \\ F\{x^{'}(t)\} &= Ae^{-j2\pi fa} - Ae^{-j2\pi fb} \end{aligned}$$

Βγάζουμε από την παραπάνω εξίσωση κοινό παράγοντα $Ae^{-j\pi f(a+b)}$ και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} j2\pi fX(f) &= A[e^{j\pi f(b-a)} - e^{-j\pi f(b-a)}]e^{-j\pi f(a+b)} \\ X(f) &= A\frac{\sin(\pi f(b-a))}{\pi f}e^{-j\pi f(a+b)} \\ X(f) &= ATsinc(fT)e^{-j\pi f(a+b)} \end{aligned}$$

όπου $T = b - a$



Σχήμα 5: (α) Σήμα παραθύρου, (β) η αναπαράστασή του ως άθροισμα δύο μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων $(\epsilon(t-a)-\epsilon(t-b))$, και (γ) η παράγωγος του σήματος παραθύρου.

2. Το σήμα προσήμου

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

$$sgn(t) = 2\epsilon(t) - 1$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{d\,sgn(t)}{dt} &= 2\delta(t) \\ j2\pi f X(f) &= 2 \\ X(f) &= \frac{1}{j\pi f} \end{aligned}$$

3. Σήμα τριγώνου.

Στο Σχήμα.6 βλέπουμε ένα σήμα τριγώνου διάρκειας $2T$. Το σήμα έχει Μ.Φ.

$$F\{x(t)\} = A^2T^2 sinc^2(fT)$$

Θα δείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα με παραγώγους.

Στο ίδιο σχήμα φαίνονται η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος του σήματος. Το αρχικό σήμα στο διάστημα $-T \leq t \leq 0$ περιγράφεται από τη σχέση

$$x(t) = A^2T(1 + t/T)$$

Αρα η πρώτη παράγωγος στο ίδιο διάστημα είναι:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^2, \quad -T \leq t \leq 0$$

Στο διάστημα $0 \leq t \leq T$, το σήμα περιγράφεται από την εξίσωση

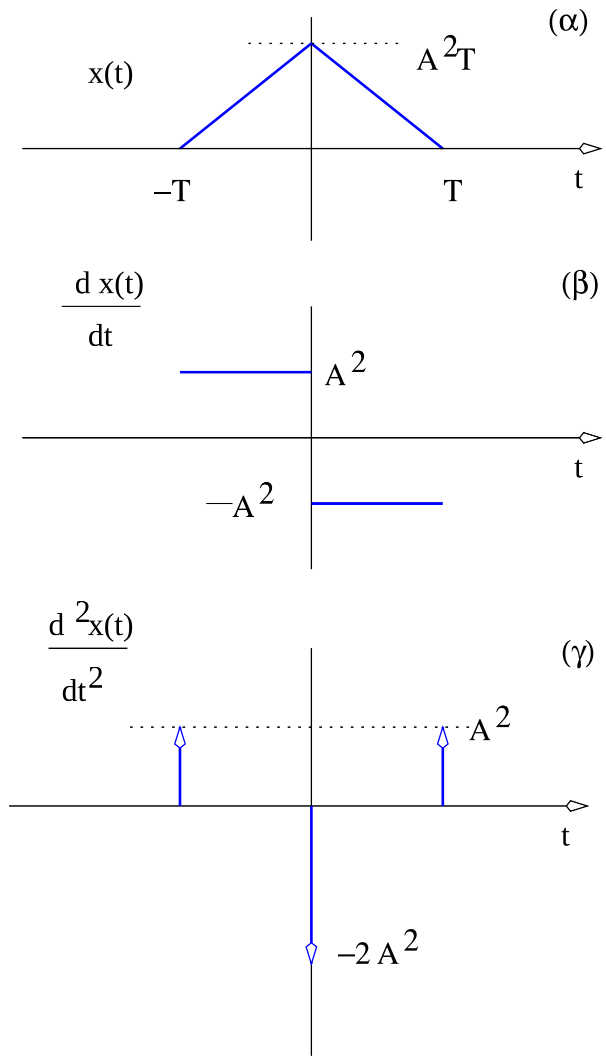
$$x(t) = A^2T(1 - t/T)$$

Επομένως

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A^2, \quad 0 \leq t \leq T$$

Χρησιμοποιώντας την μοναδιαία βηματική συνάρτηση, η πρώτη παράγωγος γράφεται ως

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A^2\epsilon(-t) - A^2\epsilon(-t - T) - A^2\epsilon(t) + A^2\epsilon(t - T)$$



Σχήμα 6: (α) Σήμα τριγώνου, (β) η πρώτη παράγωγος του σήματος και (γ) η δεύτερη παράγωγος του σήματος.

Αρα η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -A^2\delta(t) + A^2\delta(t+T) - A^2\delta(t) + A^2\delta(t-T) \\ &= A^2\delta(t+T) - 2A^2\delta(t) + A^2\delta(t-T)\end{aligned}$$

Στο Σχήμα.6(γ) είναι σχεδιασμένη η δεύτερη παράγωγος του σήματος. Επομένως ο Μ.Φ. του σήματος μπορεί να βρεθεί εύκολα από το Μ.Φ. της δεύτερης παραγώγου μιας και η δεύτερη παράγωγος του σήματος περιγράφεται απλά ως άθροισμα συναρτήσεων $\delta(t)$

$$\begin{aligned}F\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\} &= A^2e^{j2\pi fT} - 2A^2 + A^2e^{-j2\pi fT} \\ (j2\pi f)^2X(f) &= 2A^2\cos(2\pi fT) - 2A^2 \\ -4\pi^2f^2X(f) &= 2A^2 - 4A^2\sin^2(\pi fT) - 2A^2 \\ X(f) &= A^2(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f})^2 \\ &= A^2T^2sinc^2(fT)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα:

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$$