

Μετασχηματισμός Fourier

Πραγματικά σήματα

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα $x(t)$ όπως φαίνεται στο Σχήμα.1α. Θα συμβολίζουμε με $x(t, T_0)$ το σήμα που περικλείεται μεταξύ του διαστήματος $|t| < T_0/2$:

$$x(t, T_0) = x(t) \text{rect}(t/T_0)$$

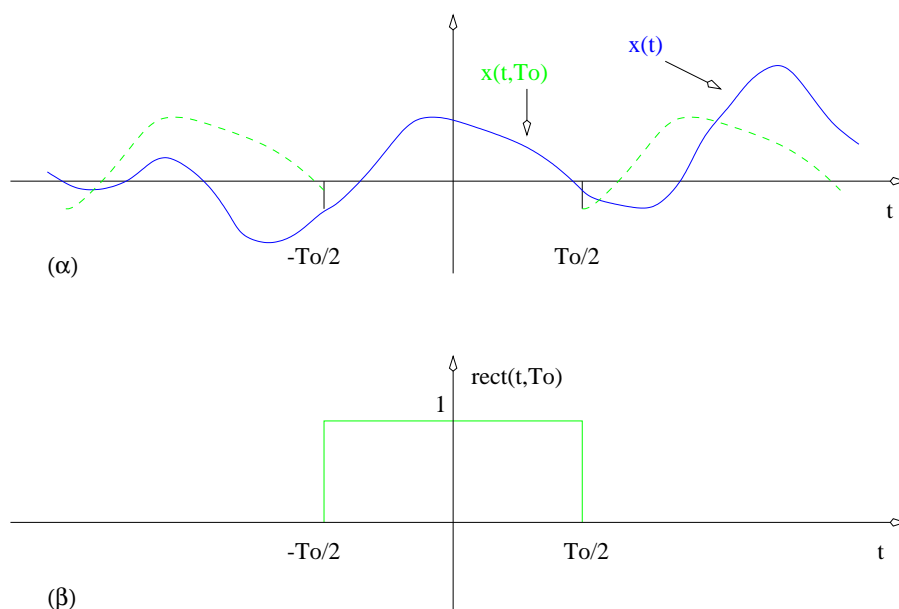
όπου το σήμα $\text{rect}(t/T_0)$ είναι ένας παλμός διάρκειας T_0 και πλάτους 1, όπως φαίνεται στο Σχήμα.1β. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει το σήμα $x(t, T_0)$ είναι περιορισμένης διάρκειας και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier:

$$x(t, T_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} \quad (1)$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t, T_0) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \quad (2)$$

Το αποτέλεσμα από το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier θα είναι όπως ήδη έχουμε δει ένα περιοδικό



Σχήμα 1: (α) Ένα οποιοδήποτε σήμα $x(t)$, το σήμα $x(t, T_0)$ και το περιοδικό σήμα (πράσινη γραμμή) $x(t, kT_0)$ (β) παλμός πλάτους 1 και διάρκειας T_0 .

σήμα το οποίο εκτός των ορίων του παλμού (παράθυρου) δεν θα έχει 'καμμία σχέση' (δηλ.

το σφάλμα προσέγγισης εκτός του παλμού θα είναι πολύ μεγάλο) με το αρχικό σήμα $x(t)$. Το παραπάνω φαίνεται στο Σχήμα.1α όπου το σήμα $x(t, T_0)$ αναπαράγεται σε πολλαπλάσια της διάρκειας, T_0 , του παλμού. Το περιοδικό σήμα όπως υπολογίζεται από το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier φαίνεται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή.

Το ερώτημα είναι πως μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω διαδικασία σε όλο το σήμα $x(t)$.

Μπορούμε να πούμε ότι το αρχικό σήμα, $x(t)$, είναι ίσο με το $x(t, T_0)$ όταν $T_0 \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} x(t, T_0) \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t} \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t, T_0) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \right\} e^{jk2\pi f_0 t} \end{aligned} \quad (3)$$

- Όταν $T_0 \rightarrow +\infty$ τότε $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$ δηλαδή σε μία μικρή ποσότητα, τόσο μικρούλα που θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια μικρή μετατόπιση μιας συνεχούς μεταβλητής f .
- Τώρα θα πρέπει να δούμε τι θα κάνουμε με το διπλό όριο:

$$\lim_{\substack{T_0 \rightarrow +\infty \\ k \rightarrow +\infty}} \left\{ k \frac{1}{T_0} \right\} \quad (4)$$

Αν θεωρήσουμε T_0 σταθερό ενώ το k παίρνει (ακέραιες) τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$ τότε το kT_0 θα έχει πάρει άπειρες τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$. Όταν το T_0 πάρει μία άλλη σταθερή τιμή τότε με τον ίδιο τρόπο (έχοντας k από $-\infty$ έως $+\infty$) θα πάρουμε ένα νέο σύνολο άπειρων τιμών από $-\infty$ έως $+\infty$ για το γινόμενο kT_0 . Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε πραγματική θετική τιμή του T_0 τότε στο τέλος θα έχουμε όλες τις τιμές που μπορεί να λάβει ένας πραγματικός αριθμός από $-\infty$ έως $+\infty$. Δηλαδή θα έχουμε μια συνεχή μεταβλητή ή διαφορετικά ότι το όριο στην εξίσωση (4) θα τείνει στη συνεχή μεταβλητή f . Τότε όμως το άθροισμα του k από $-\infty$ έως $+\infty$ θα γίνει ολοκλήρωμα από $-\infty$ έως $+\infty$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση (3) γράφεται:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right\}}_{X(f)} e^{j2\pi ft} \quad (5)$$

δηλαδή

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \quad (6)$$

όπου

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad (7)$$

Η εξίσωση (6) αναφέρεται σαν σύνθεση Fourier ή Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier ενώ η εξίσωση (7) αναφέρεται σαν ανάλυση Fourier ή απλά Μετασχηματισμός Fourier. Από την εξίσωση (6) προκύπτει ότι έχουμε μια ανάπτυξη του σήματος $x(t)$ σε άπειρες συχνότητες ή διαφορετικά σε άπειρες μιγαδικές ημιτονοειδές συνιστώσες με πλάτος $|X(f)|df$.

Για να δηλώσουμε ότι ένα σήμα $x(t)$ μετασχηματίζεται από το χώρο του χρόνου, t , στο χώρο της συχνότητας f , σε $X(f)$ μέσω του Μετασχηματισμού Fourier και αντίστροφα από τη συχνότητα στο χρόνο μέσω του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier γράφουμε:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (8)$$

Επίσης ορισμένες φορές θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$F\{x(t)\}$$

για να δηλώσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x(t)$.

Από την εξίσωση (6) προκύπτει επίσης ότι:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-f) \quad (9)$$

δηλαδή η ανάκλαση του σήματος ως προς τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισοδυναμεί με ανάκλαση του φάσματος του σήματος.

Σημειώστε ότι σε πολλά βιβλία χρησιμοποιείτε η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ αντί της γραμμικής f . Τότε οι παραπάνω σχέσεις διαφοροποιούνται ως εξής:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (10)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad (11)$$

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν εύκολα (το μπαλάκι σε εσάς :)) όταν αντικαταστήσουμε το f στις Εξ.(6) και (7) με $\omega/2\pi$ ¹

¹επειδή ορισμένοι θα το σκεφτούν ... το $X(f)$ και βέβαια γράφεται $X(\omega/2\pi)$ ΟΜΩΣ ως γνωστόν το 2π είναι σταθερό νόμμερο άρα η συνάρτησή μας γράφεται απλά $X(\omega)$ για να μας δείξει ότι εξαρτάται μόνο (ουσιαστικά) από το ω .

Ο Μετασχηματισμός Fourier (Εξ.(7)) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= R(f) + jI(f) \end{aligned} \quad (12)$$

όπου είναι φανερό ότι ο Μετασχηματισμός Fourier είναι γενικά ένα μιγαδικό σήμα με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος να υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (13)$$

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (14)$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(-2\pi ft) dt = R(f) \quad (15)$$

δηλαδή το σήμα (συχνότητας) $R(f)$ είναι άρτιο σήμα, και

$$I(-f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(-2\pi ft) dt = -I(f) \quad (16)$$

δηλαδή το σήμα (συχνότητας) $I(f)$ είναι περιττό σήμα.

Αφού γενικά ο Μετασχηματισμός Fourier είναι ένα μιγαδικό σήμα θα έχει πλάτος (φάσμα πλάτους)

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \quad (17)$$

και φάση (φάσμα φάσης)

$$\theta_x(f) = \arctan \frac{I(f)}{R(f)} \quad (18)$$

Αν το σήμα μετριέται σε *Volts* (π.χ. είναι μεταβαλλόμενη τάση) τότε το $|X(f)|$ είναι σε *Volts/Hz* και η $\theta_x(f)$ σε radians.

Γνωρίζοντας τώρα τις παραπάνω ιδιότητες του πραγματικού και φανταστικού μέρους του Μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να δούμε μια πολύ χρήσιμη σχέση μεταξύ των αρνητικών και θετικών συχνοτήτων του φάσματος (υπενθύμιση: πάντα μιλάμε για πραγματικά σήματα). Από τις εξισώσεις (12), (15) και (16) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} X(-f) &= R(-f) + jI(-f) \\ &= R(f) - jI(f) \\ X(-f) &= X^*(f) \end{aligned} \quad (19)$$

Δηλαδή, για πραγματικά σήματα το φάσμα στις αρνητικές συχνότητες είναι ίσο με το συζυγές του φάσματος στις θετικές συχνότητες. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για πραγματικά σήματα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (7) από $-\infty$ έως $+\infty$. Αρκεί να υπολογιστεί το φάσμα μόνο για τις θετικές συχνότητες (από 0 έως $+\infty$) και μετά το φάσμα στις αρνητικές συχνότητες θα είναι ίσο με το συζυγές αυτού που υπολογίσαμε.

- Αν ένα σήμα είναι άρτιο:

$$x(-t) = x(t) \quad \forall t$$

τό φανταστικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος (το $\sin(2\pi ft)$ είναι περιττό σήμα ως προς t (ή f)) οπότε θα μηδενίζεται. Δηλαδή $I(f) = 0$.

Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού άρτιου σήματος είναι πραγματικό σήμα και ισούται με:

$$\begin{aligned} X(f) &= R(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

- Αν ένα σήμα είναι περιττό:

$$x(-t) = -x(t) \quad \forall t$$

τό πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt$$

θα είναι ολοκλήρωμα περιττού σήματος (το $\cos(2\pi ft)$ είναι άρτιο σήμα ως προς t (ή f)) οπότε θα μηδενίζεται. Δηλαδή $R(f) = 0$.

Επομένως ο Μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού περιττού σήματος είναι φανταστικό σήμα και ισούται με:

$$\begin{aligned} X(f) &= j I(f) \\ &= -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μετασχηματισμό Fourier του σήματος:

$$x(t) = \frac{1}{t}$$

Το σήμα $x(t)$ είναι περιττό άρα ο Μετασχηματισμός Fourier του σήματος θα έχει μόνο μιγαδικό μέρος:

$$X(f) = I(f) = -2j \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt$$

Όμως ισχύει (ωραίο μου τυπολόγιο!!!):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0 \end{cases}$$

Από το παραπάνω, ο Μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ είναι:

$$X(f) = \begin{cases} -j\pi & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j\pi & f < 0 \end{cases}$$

ή σε μια πιο compact μορφή:

$$X(f) = -j\pi \operatorname{sgn}(f)$$

όπου το σήμα $\operatorname{sgn}(\cdot)$ λέγεται σήμα προσήμου και φαίνεται στο Σχήμα.2. Το σήμα $\operatorname{sgn}(t)$ περιγράφεται μαθηματικά ως:

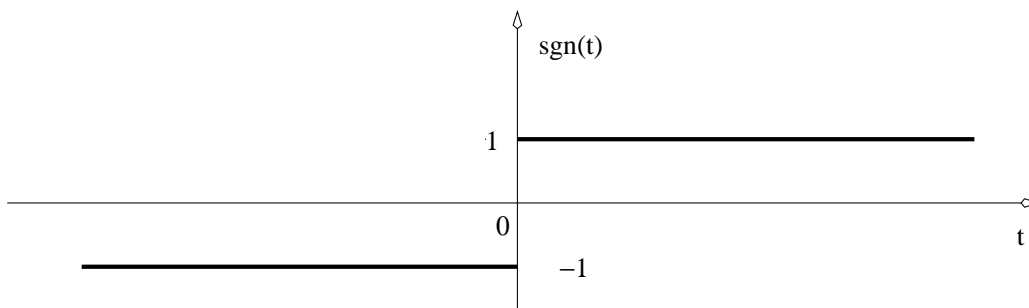
$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(t) &= \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \\ &= \frac{t}{|t|} \quad \text{για } t \neq 0 \end{aligned}$$

Η τιμή της συνάρτησης προσήμου για $t = 0$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή μεταξύ ± 1 . Προς χάρη όμως της συμμετρίας, εμείς θα την θεωρούμε (εκτός και μας βολεύει διαφορετικά :)) ίση με το μηδέν. Δηλαδή

$$\operatorname{sgn}(0) = 0$$

Γνωρίζουμε ότι ένα οποιοδήποτε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός άρτιου, $x_\alpha(t)$, και ενός περιττού μέρους, $x_\pi(t)$:

$$x(t) = x_\alpha(t) + x_\pi(t) \tag{20}$$



Σχήμα 2: Το σήμα προσήμου.

όπου

$$\begin{aligned} x_{\alpha}(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_{\pi}(t) &= \frac{x(t) - x(-t)}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Από τις εξισώσεις (9), (12), (15), (16) και τις παραπάνω εξισώσεις, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} x_{\alpha}(t) &\leftrightarrow R(f) \\ x_{\pi}(t) &\leftrightarrow j I(f) \end{aligned}$$

Δηλαδή το πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier σχετίζεται με το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος ενώ το φανταστικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier σχετίζεται με το περιττό μέρος του σήματος.

Μιγαδικά σήματα

Εστω το μιγαδικό σήμα:

$$x(t) = x_1(t) + j x_2(t)$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier, $X(f)$, του σήματος ορίζεται όμοια όπως και στα πραγματικά σήματα:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (22)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω σχέση τη μιγαδική μορφή του $x(t)$ και αναπτύξουμε το $e^{-j2\pi ft}$ σε συνημίτονο και ημίτονο, ο Μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ γράφεται ως:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t) + j x_2(t)) (\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t) \cos(2\pi ft) + x_2(t) \sin(2\pi ft)] dt + \\ &\quad + j \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t) \cos(2\pi ft) - x_1(t) \sin(2\pi ft)] dt \end{aligned} \quad (23)$$

Επομένως για ένα μιγαδικό σήμα το πραγματικό μέρος του Μετασχηματισμού Fourier δίνεται από την εξίσωση:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t) \cos(2\pi ft) + x_2(t) \sin(2\pi ft)] dt$$

ενώ το φανταστικό μέρος από την εξίσωση:

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_2(t) \cos(2\pi ft) - x_1(t) \sin(2\pi ft)] dt$$

Στα παρακάτω (για να μην πληκτρολογώ πολλά ενώ ταυτόχρονα έτσι πετυχαίνω να σας δυσκολεύω τη ζωή με συμβολισμούς - όπως κάθε δάσκαλος που σέβεται τον εαυτό του) θα χρησιμοποιήσουμε το ακρώνυμο Μ.Φ. για τον Μετασχηματισμό Fourier και το ακρώνυμο Α.Μ.Φ. για τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier. Προσοχή όχι ΑΦΜ αλλά ΑΜΦ !!!

Ναι δεν το είπαμε αλλά δεν είναι και μυστικό: ο Μ.Φ. δεν ορίζεται για όλα τα σήματα. Μια ουσιαστική ικανή συνθήκη (όχι όμως και αναγκαία) για να υπάρχει ο Μ.Φ. ενός σήματος είναι το σήμα να είναι κατά απόλυτη τιμή ολοκληρώσιμο:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Όλα τα σήματα που χρησιμοποιούμε στην πράξη είναι περιορισμένης διάρκειας και επομένως ικανοποιούν το παραπάνω κριτήριο. Παρόλα αυτά, όταν αναλύουμε κάποια σήματα στο χαρτί και μελετάμε κάποιο φαινόμενο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε και σήματα που δεν πληρούν το παραπάνω κριτήριο. Για παράδειγμα, το πιο απλό σήμα αυτής της κατηγορίας που μπορούμε να φανταστούμε είναι μια σταθερά

$$x(t) = 5 \quad \forall t$$

Όμως, όπως και οι μιγαδικοί αριθμοί έτσι και αυτά τα σήματα μπορεί να μην προκύπτουν στην πράξη αλλά μας βοηθούν στην ανάλυση και περιγραφή διαφόρων συστημάτων, σημάτων και φαινομένων. Ο Μ.Φ. αυτών των σημάτων δεν ορίζεται παρά όταν επεκτύνουμε τον Μ.Φ. σε μία κατηγορία συναρτήσεων που ονομάζονται κατανομές. Μια τέτοια επέκταση είναι πραγματικά εκτός ορίων του μαθήματος. Έτσι θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης όποτε χρειαστεί.

Έτσι, πριν προχωρήσουμε την ανάπτυξη του Μετασχηματισμού Fourier θα ήταν καλό να διαχωρήσουμε τα σήματα ανάλογα με το ενεργειακό τους περιεχόμενο.

Σήματα ενέργειας και ισχύος

Από το ηλεκτρισμό γνωρίζουμε ότι η ισχύ P (σε Watts) που καταναλώνεται σε μία αντίσταση R όταν στα άκρα της αντίστασης υπάρχει τάση U δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Αν η τάση U μεταβάλλεται με το χρόνο (είναι δηλ. ένα σήμα) τότε και η ισχύ θα μεταβάλλεται σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση

$$P(t) = \frac{U^2(t)}{R}$$

Η ενέργεια (σε Joules) που καταναλώνεται από τη χρονική στιγμή t_1 στη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} U^2(t) dt$$

Η μέση ισχύ που καταναλώνεται στο ίδιο διάστημα είναι:

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \frac{1}{R} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U^2(t) dt$$

Αν θεωρήσουμε την αντίσταση να είναι 1Ω τότε τα παραπάνω μεταφέρονται στη θεωρία σήματος, ορίζοντας:

Ενέργεια ενός σήματος στο διάστημα $[t_1 t_2]$

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

και Μέση Ισχύ στο ίδιο διάστημα:

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

Αν θεωρήσουμε το σήμα $x(t)$ να έχει άπειρη διάρκεια, και θεωρήσουμε $t_1 \rightarrow -\infty$ και $t_2 \rightarrow +\infty$, τότε μιλάμε για:

Ολική Ενέργεια του σήματος:

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

και Συνολική Μέση Ισχύ

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt$$

Η συνολική μέση ισχύ ορίζεται σαν μια πρωτεύουσα τιμή Cauchy² του ολοκληρώματος από $-\infty$ έως $+\infty$.

Για ένα περιοδικό σήμα η συνολική μέση ισχύ ισούται με την μέση ισχύ του σήματος σε μία περίοδο T_0 :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x^2(t) dt$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι μιγαδικό τα παραπάνω ισχύουν αρκεί να κάνουμε την αλλαγή

$$x^2(t) \rightarrow |x(t)|^2$$

Ορισμός: Ονομάζουμε σήματα ενέργειας τα σήματα τα οποία έχουν περιορισμένη ενέργεια:

$$W_x < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

δηλαδή που η ενέργειά τους δεν είναι άπειρη. Τότε όμως η ισχύ αυτών των σημάτων θα είναι μηδέν (σύμφωνα με τον ορισμό της ισχύος).

Ορισμός: Ονομάζουμε σήματα ισχύος τα σήματα τα οποία έχουν περιορισμένη ισχύ:

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Για να είναι περιορισμένο (φραγμένο) το παραπάνω όριο θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \infty$$

δηλαδή το σήμα να έχει άπειρη ενέργεια.

Επομένως:

Ένα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ ενώ ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια.

²Η πρωτεύουσα τιμή Cauchy ενός ολοκληρώματος από $-\infty$ έως $+\infty$ ορίζεται ως το όριο:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x(t) dt$$

Μετασχηματισμός Fourier για σήματα ενέργειας

Για όλα τα σήματα ενέργειας, ο Μ.Φ. υπάρχει:

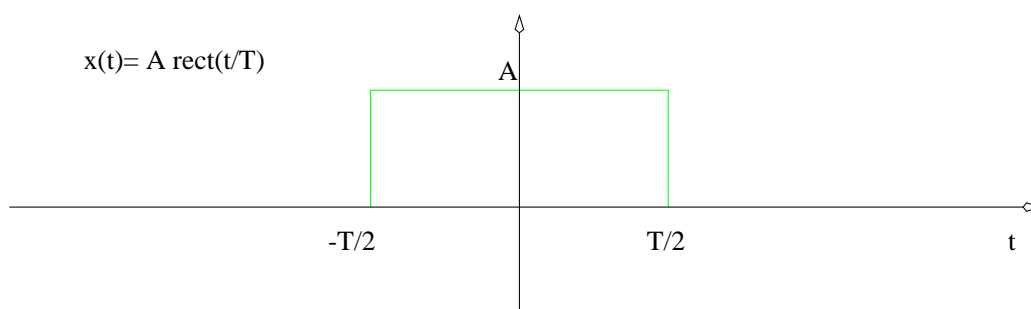
$$X(f) = F \{x(t)\} = |X(f)| e^{j\theta_x(f)}$$

όπου το $|X(f)|$ είναι το φάσμα πλάτους και $\theta_x(f)$ είναι το φάσμα φάσης. Αν το σήμα μετρείται σε Volts τότε το φάσμα πλάτους είναι σε Volts/Hz και το φάσμα φάσης σε radian.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος ενέργειας που φαίνεται στο Σχήμα.1:

$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Το σήμα $x(t)$ έχει διάρκεια T . Εξω από το διάστημα $[-T/2 \ T/2]$ το σήμα είναι μηδενικό. Ο



Σχήμα 3: Το ορθογώνιο σήμα πλάτους A και διάρκειας T : $x(t) = A \text{rect}(t/T)$

Μ.Φ. του σήματος μπορεί να υπολογιστεί από την Εξίσωση (7). Όμως καλό είναι να κάνουμε λίγο χρήση των ιδιοτήτων των σημάτων και των ολοκληρωμάτων. Μπορεί σε αυτό το παράδειγμα η λύση να είναι απλή με απευθείας υπολογισμό του Μ.Φ. όμως σε άλλα παραδείγματα η χρήση αυτών των ιδιοτήτων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το σήμα είναι άρτιο επομένως ο Μ.Φ. του σήματος θα έχει μόνο πραγματικό μέρος (Εξίσωση(13):

$$\begin{aligned} X(f) = R(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &= 2A \int_0^{+T/2} \cos(2\pi ft) dt \\ &= 2A \frac{1}{2\pi f} \sin(2\pi ft) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) \\ &= AT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \\ &= AT \text{sinc}(fT) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\text{sinc}(x)$ ορίζεται ως:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (24)$$

όπου για $x = 0$ ορίζεται να είναι:

$$\text{sinc}(0) = 1$$

Από τα παραπάνω μπορούμε λοιπόν να γράψουμε, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που μάθαμε (μην πάνε χαμένοι), ότι:

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} X(f) = AT \text{sinc}(Tf)$$

Η συνάρτηση $X(f) = AT \text{sinc}(Tf)$ είναι άρτια και έχει μηδενισμούς όπου μηδενίζεται η συνάρτηση $\sin(\pi fT)$, δηλαδή στις συχνότητες, f :

$$\pi fT = \pm m\pi \Rightarrow f = \pm m \frac{1}{T}$$

όπου m είναι ακέραιος.

Επίσης θα είναι φθίνουσα καθώς θα αυξάνει κατά απόλυτη τιμή το f . Η συνάρτηση $X(f) = AT \text{sinc}(Tf)$ φαίνεται στο Σχήμα.5α

Φάσμα Πλάτους:

$$|X(f)| = AT |\text{sinc}(fT)|$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα.5β

Φάσμα Φάσης:

$$\theta_x(f) = \arctan\left(\frac{I(f)}{R(f)}\right)$$

Όμως το σήμα είναι άρτιο και επομένως

$$I(f) = 0 \quad \forall f$$

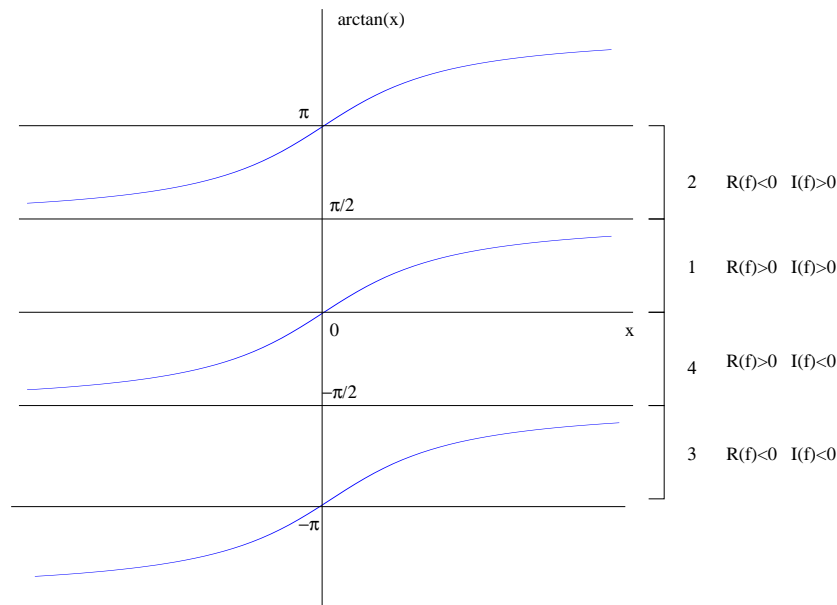
άρα

$$\theta_x(f) = \arctan(0) = k\pi$$

όπου k ακέραιος. Για $k = 0$ η τιμή της φάσης λέγεται πρωτεύουσα τιμή ενώ για $|k| > |1|$ ονομάζονται δευτερεύουσες τιμές. Επειδή η φάση ορίζεται μεταξύ του $-\pi$ και π το k παίρνει τις τιμές:

-1, 0 και 1.

Οι πρωτεύουσες τιμές της φάσης (ορίζεται από $-\pi/2$ έως $\pi/2$) αφορούν το πρώτο και τέταρτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Δηλαδή εκεί όπου το πραγματικό μέρος είναι θετικό. Επομένως όταν το πραγματικό μέρος είναι θετικό, η φάση θα ισούται με την πρωτεύουσα τιμή της συνάρτησης \arctan . Όταν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό τότε η φάση ΠΡΕΠΕΙ να υπολογιστεί από τις δευτερεύουσες τιμές της συνάρτησης και όχι από την πρωτεύουσα τιμή. Τα παραπάνω εξηγούνται σχηματικά στο Σχήμα.4 όπου το πεδίο τιμών της συνάρτησης \arctan χωρίζεται σε τέσσερα μέρη (όσα και τα τεταρτημόρια στο μιγαδικό επίπεδο) ανάλογα με το πρόσημο του πραγματικού και φανταστικού μέρους. Στην άσκηση μας το φανταστικό μέρος είναι μηδέν



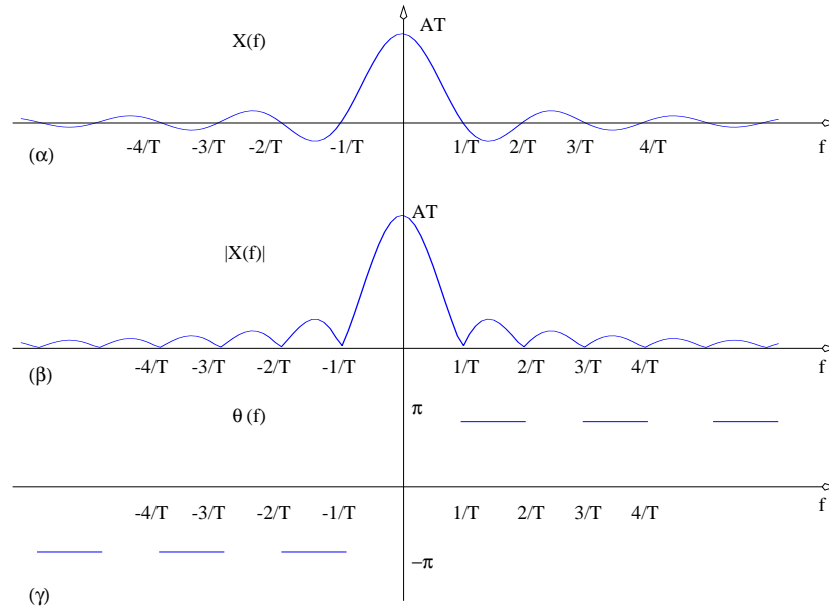
Σχήμα 4: Πρωτεύουσες και δευτερεύουσες τιμές της \arctan .

(αναμενόμενο μιας και το σήμα μας είναι άρτιο). Τότε, σύμφωνα με αυτά που είπαμε, για τις συχνότητες εκείνες που το πραγματικό μέρος είναι θετικό η φάση θα είναι ίση με την πρωτεύουσα τιμή της $\arctan(0)$ δηλαδή μηδέν. Όταν το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό τότε έχουμε δύο επιλογές: $+\pi$, $-\pi$. Επειδή έχουμε συμφωνήσει να θεωρούμε θετικές συχνότητες αυτές που περιστρέφουν τη φάση κατά τη μαθηματική φορά (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού) θα αντιστοιχίσουμε το $+\pi$ στις θετικές συχνότητες. Αντίστοιχα θα αντιστοιχίσουμε το $-\pi$ στις αρνητικές συχνότητες. Συνοπτικά (ουφφφ)

$$\left. \begin{array}{l} R(f) > 0 \\ I(f) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_x(f) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} R(f) < 0 \\ I(f) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_x(f) = \pm\pi \begin{cases} +\pi & f > 0 \\ -\pi & f < 0 \end{cases}$$

Το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα.5γ.



Σχήμα 5: (α) Ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου σήματος του Σχήματος3. (β) Το φάσμα πλάτους, $|X(f)|$. (γ) Το φάσμα φάσης $\theta_x(f)$

Ας θεωρήσουμε τώρα το ορθογώνιο σήμα στη συχνότητα (και όχι στο χρόνο όπως προηγουμένως):

$$X(f) = A \operatorname{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

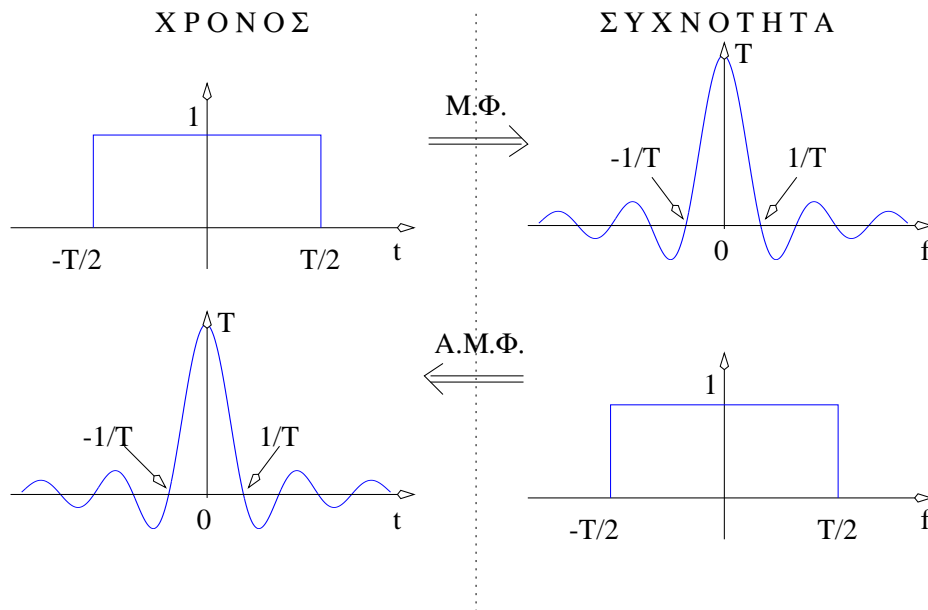
και ας υπολογίσουμε τον Α.Μ.Φ. του $X(f)$ (Εξίσωση 6):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cos(2\pi ft) df \\ &= 2A \int_0^{+T/2} \cos(2\pi ft) df \\ &= \frac{A}{\pi t} \sin(\pi t T) \\ &= AT \operatorname{sinc}(tT) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχει μια συμμετρία (παραλήπουμε τα πλάτη για απλοποίηση):

$$\begin{aligned} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) &\leftrightarrow T \operatorname{sinc}(fT) \\ T \operatorname{sinc}(tT) &\leftrightarrow \operatorname{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \end{aligned}$$

Η συμμετρία αυτή φαίνεται και στο Σχήμα.6



Σχήμα 6: Συμμετρία του μετασχηματισμού Fourier

Η συμμετρία αυτή δεν είναι τυχαία. Ισχύει για όλα τα σήματα και αποτελεί μια βασική ιδιότητα του Μ.Φ. Πράγματι:

Αν στον ορισμό του Α.Μ.Φ. (Εξίσωση 6) θέσουμε όπου t το $-t$ έχουμε:

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{-j2\pi ft} df$$

Αν στην παραπάνω σχέση ανταλλάξουμε μεταξύ τους τις μεταβλητές t και f , δηλαδή $t \leftrightarrow f$, τότε:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι αν $X(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ ΤΟΤΕ ο μετασχηματισμός Fourier του $X(t)$ θα είναι ίσος με $x(-f)$. Πράγματι, στην αρχή δείξαμε ότι:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow X(f) = T \text{sinc}(fT)$$

και λίγο παραπάνω ότι

$$X(t) = T \text{sinc}(tT) \leftrightarrow x(-f) = \text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Εστω ότι ένα μιγαδικό σήμα $x(t)$ έχει Μ.Φ. $X(f)$:

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

Τότε:

1. Συμμετρία:

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

Αυτή η ιδιότητα έχει δειχθεί παραπάνω και είναι πολύ σημαντική.

Παράδειγμα:

Αν $x(t) = \text{rect}(t/T)$ τότε (όπως έχουμε δείξει):

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

και χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα μπορούμε να πούμε (μετά βεβαιότητας) ότι ο Μ.Φ. του

$$X(t) = \frac{\sin(\pi t T)}{\pi t}$$

είναι

$$x(-f) = \text{rect}(-f/T) = \text{rect}(f/T)$$

2. $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$ και $x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \Rightarrow \\ X^*(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt \Rightarrow \\ X^*(-f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

Άρα:

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$$

Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$$

Συνέπεια της ιδιότητας:

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό τότε $x(t) = x^*(t)$ και επομένως $X(f) = X^*(-f)$. Δηλαδή όταν το σήμα είναι πραγματικό το φασματικό περιεχόμενο του σήματος στις θετικές συχνότητες ισούται με το συζυγές φασματικό περιεχόμενο των αρνητικών συχνοτήτων. Το είχαμε πεί και παραπάνω αυτό σαν σχόλιο στην Εξίσωση (19).

3. $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$ για $a \neq 0$

Απόδειξη:

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του σήματος $x(at)$:

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt$$

Θέτουμε $t' = at$.

Για $a > 0$:

$$\begin{aligned} F\{x(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi \frac{f}{a}t'} dt' \\ &= \frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

Για $a < 0$:

$$\begin{aligned} F\{x(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(t')e^{-j2\pi \frac{f}{a}t'} dt' \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi \frac{f}{a}t'} dt' \\ &= -\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε περίπτωση:

$$F\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Παράδειγμα: Ας πάρουμε για παράδειγμα το σήμα

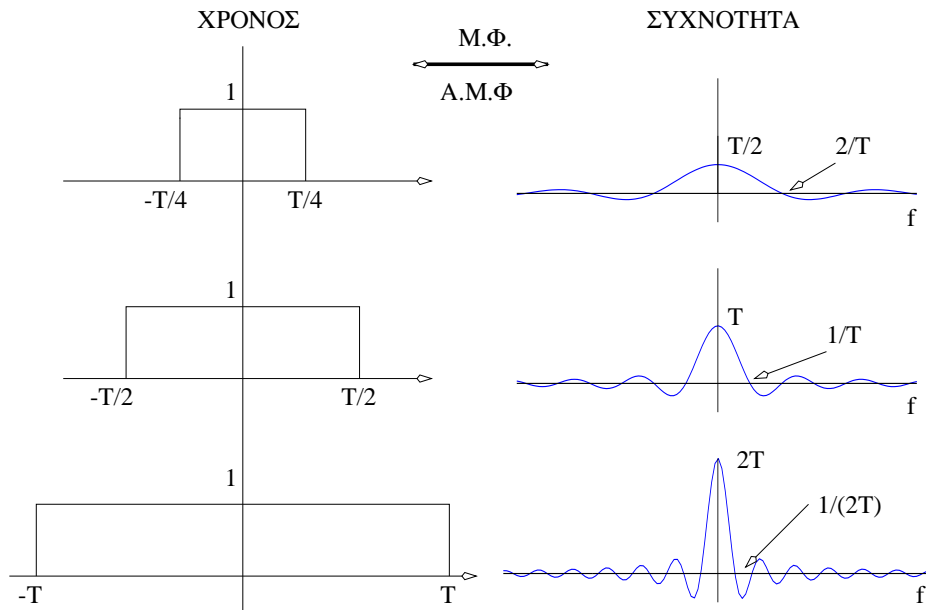
$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

το οποίο όπως έχουμε δει έχει Μ.Φ.

$$X(f) = T \text{sinc}(fT)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα θα ισχύει

$$\begin{aligned} x(2t) &= \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) \leftrightarrow \frac{1}{2}X\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2}T \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \\ x\left(\frac{t}{2}\right) &= \text{rect}\left(\frac{t/2}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \leftrightarrow 2X(2f) = 2T \text{sinc}(2fT) \end{aligned}$$



Σχήμα 7: Διαστολή στο χρόνο σημαίνει συστολή στη συχνότητα και αντιστρόφως.

Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα.7

Τι σημαίνουν όλα αυτά; Όταν ο άξονας του χρόνου διαστέλεται ($a > 1$) τότε ο άξονας των συχνοτήτων συστέλεται και αντίστροφα όταν $0 < a < 1$. Το παραπάνω διατυπώνεται πιο όμορφα ως εξής: Το σήμα και ο μετασχηματισμός αυτού κατά Fourier δεν μπορούν να είναι και τα δύο μικρής έκτασης.

Άλλο παράδειγμα:

Αν $a = -1$ τότε σύμφωνα με αυτήν την ιδιότητα:

$$F\{x(-t)\} = X(-f)$$

Δηλαδή: $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$

4. Αν επίσης $y(t) \leftrightarrow Y(f)$, τότε

$$C_1x(t) \pm C_2y(t) \leftrightarrow C_1X(f) \pm C_2Y(f)$$

όπου C_1 και C_2 είναι σταθερές.

5. $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi ft_0} X(f)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
F\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t - t_0)}_{t'} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi ft'} e^{-j2\pi ft_0} dt' \\
&= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi ft'} dt' \\
&= e^{-j2\pi ft_0} X(f)
\end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι

$$F\{x(t + t_0)\} = e^{+j2\pi ft_0} X(f)$$

6. $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$

Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του Α.Μ.Φ. (Εξίσωση (6)) θετώντας $t = 0$. Η παραπάνω σχέση λέει ότι το άθροισμα του φάσματος ισούται με την τιμή του σήματος στη χρονική στιγμή $t = 0$.

7. $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$

Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του Μ.Φ. (Εξίσωση (7)) θετώντας $f = 0$. Η παραπάνω σχέση λέει ότι το άθροισμα του σήματος ισούται με την DC συνιστώσα του φάσματος.

8. $x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f \mp f_0)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
F\{x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{\pm j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f \mp f_0)t} dt \\
&= X(f \mp f_0)
\end{aligned}$$

και για οπτική απεικόνιση (για τους οπτικούς τύπους):

$$\begin{aligned}
x(t)e^{+j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow X(f - f_0) \\
x(t)e^{-j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow X(f + f_0)
\end{aligned}$$

9. Παράγωγος $\frac{d}{dt}\{x(t)\} \leftrightarrow j2\pi f X(f)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
F\left\{\frac{d x(t)}{d t}\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d x(t)}{d t} e^{-j 2 \pi f t} d t \\
&= x(t) e^{-j 2 \pi f t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j 2 \pi f \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j 2 \pi f t} d t}_{X(f)}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες παραγωγικής ολοκλήρωσης. Αν το $x(t)$ έχει Μ.Φ. αυτό σημαίνει ότι καθώς $t \rightarrow \pm \infty$, το σήμα θα φθίνει προς το μηδέν (αν θυμάστε έχουμε πεί ότι το σήμα $x(t)$ είναι σήμα περιορισμένης ενέργειας). Επομένως

$$x(t) \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad t \rightarrow \pm \infty$$

Δηλαδή

$$x(t) e^{-j 2 \pi f t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

και άρα

$$F\left\{\frac{d x(t)}{d t}\right\} = j 2 \pi f X(f)$$

Γενικά ισχύει:

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow (j 2 \pi f)^n X(f)$$

και λόγω της ιδιότητας της συμμετρίας του Μ.Φ.:

$$(-j 2 \pi t)^n x(t) \leftrightarrow X^{(n)}(f)$$

όπου $\{^{(n)}\}$ συμβολίζει τη n -οστή παράγωγο ενώ $\{^n\}$ συμβολίζει τη n -οστή δύναμη.

Παράδειγμα εφαρμογής ιδιοτήτων Μ.Φ.

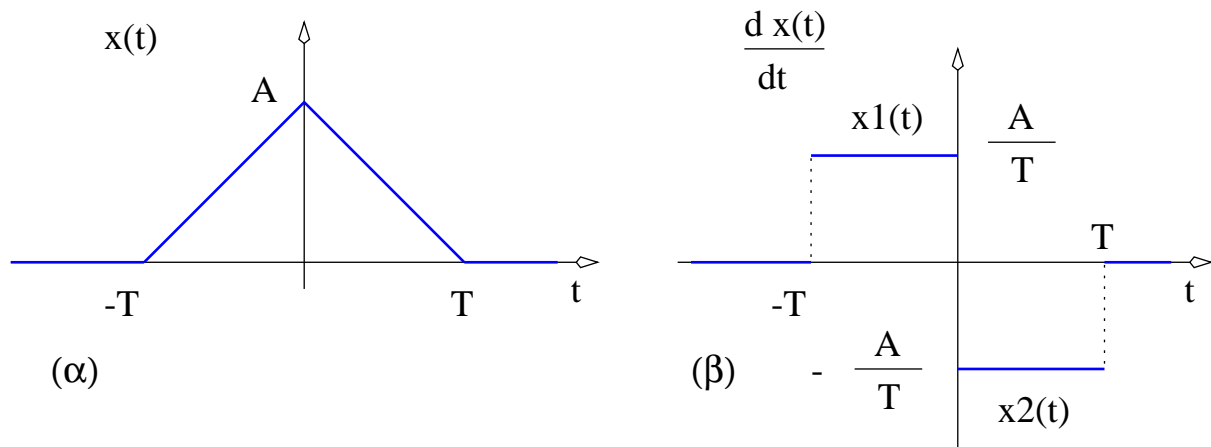
Να υπολογίσετε τον Μ.Φ. του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Το σήμα φαίνεται στο Σχήμα.8α ενώ η παράγωγος του σήματος (ως προς t) δίδεται στο Σχήμα.8β.

Σε αυτό το πρόβλημα θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
x^{(1)}(t) &\leftrightarrow (j 2 \pi f) X(f) \\
x(t \pm t_0) &\leftrightarrow X(f) e^{\pm j 2 \pi f t_0} \\
C_1 x(t) \pm C_2 y(t) &\leftrightarrow C_1 X(f) \pm C_2 Y(f)
\end{aligned}$$



Σχήμα 8: (α). Τριγωνικό σήμα διάρκειας $2T$ και (β) Η παράγωγος του σήματος ως προς t .

Όπως παρατηρούμε και από το Σχήμα 8β, η παράγωγος του σήματος αποτελείται από δύο σήματα ορθογώνια το ένα μετατοπισμένο αριστερά από την αρχή των αξόνων κατά $-T/2$ ($x_1(t)$) και το άλλο δεξιά από την αρχή των αξόνων κατά $T/2$ ($x_2(t)$).

Εδώ προτιμήσαμε να δουλέψουμε με την παράγωγο του σήματος $x^{(1)}(t)$ αντί με το σήμα $x(t)$. Αυτό γιατί ξέρουμε τον Μ.Φ. του ορθογώνιου σήματος (του σήματος παραθύρου) και επίσης ξέρουμε από τις ιδιότητες του Μ.Φ. τη σχέση παραγώγου και Μ.Φ.

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j2\pi f X(f) = F\{x_1(t) + x_2(t)\} = F\{x_1(t)\} + F\{x_2(t)\} \quad (25)$$

όπου

$$x_1(t + T/2) = \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - (-T/2)}{T}\right) = \frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t + T/2}{T}\right)$$

και

$$x_2(t - T/2) = -\frac{A}{T} \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} F\{x_1(t + T/2)\} &= \frac{A}{T} T \text{sinc}(fT) e^{+j2\pi f T/2} \\ F\{x_2(t - T/2)\} &= -\frac{A}{T} T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f T/2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην Εξίσωση (25):

$$\begin{aligned} j2\pi f X(f) &= A \text{sinc}(fT) [e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}] \\ X(f) &= A \text{sinc}(fT) \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \\ X(f) &= A T \text{sinc}^2(fT) \end{aligned}$$

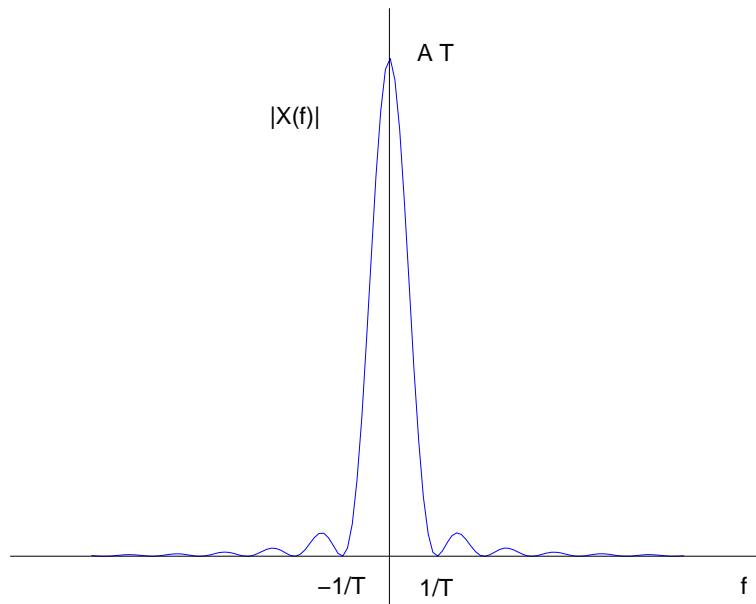
Παρατηρούμε ότι ο Μ.Φ. του τριγωνικού σήματος είναι πραγματικό σήμα και θετικό για όλες τις τιμές της f . Έτσι, το φάσμα φάσης θα είναι μηδέν $\forall f$

$$R(f) > 0 \text{ και } I(f) = 0 \quad \forall f \Rightarrow \theta_x(f) = 0 \quad \forall f$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$|X(f)| = AT \operatorname{sinc}^2(fT)$$

και φαίνεται στο Σχήμα.9



Σχήμα 9: Φάσμα πλάτους ενός τριγωνικού σήματος διάρκειας $2T$.

Πράξεις μεταξύ σημάτων και Μετασχηματισμός Fourier

Έχουμε ήδη δει ότι όταν $x(t) \leftrightarrow X(f)$ και $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ τότε

$$C_1x(t) \pm C_2y(t) \leftrightarrow C_1X(f) \pm C_2Y(f)$$

1. Πολλαπλασιασμός σημάτων.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. του γινομένου δύο σημάτων $x(t)$, $y(t)$:

$$F\{x(t)y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (26)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον Α.Μ.Φ. του $x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du$$

στην (26) τότε έχουμε³:

$$\begin{aligned} F\{x(t)y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut} du \right] y(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t} dt \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u) du \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συνηθίζουμε να το συμβολίζουμε με

$$X(f) \star Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u) du$$

και ονομάζεται ΣΥΝΕΛΙΞΗ (convolution) δύο σημάτων $X(f)$ και $Y(f)$. Η πράξη της συνέλιξης είναι πολύ σημαντική στη θεωρία σημάτων. Θα δούμε αυτή την έννοια αναλυτικά παρακάτω. Η μορφή της συνέλιξης όπως την είδαμε είναι στη συχνότητα. Ορίζεται όμως και στο χρόνο. Συνέλιξη δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ονομάζεται η συνάρτηση

$$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u) du \quad (27)$$

³Εδώ θα έχουμε διπλό ολοκλήρωμα και θα χρειαστεί να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$$

Για να μπορεί να συμβεί αυτό χρησιμοποιούμε το θεώρημα Fubini το οποίο λέει ότι η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να αλλάξει αν καθένα από αυτά τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα όταν στη θέση της $f(x,y)$ βάλουμε την $|f(x,y)|$. Μια τέτοια συνθήκη ισχύει για τα σήματα ενέργειας άρα μπορούμε εδώ να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης

Συνοπτικά έχουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα με πολλές χρήσεις:

$$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) \star Y(f) \quad (28)$$

Επειδή $x(t)y(t) = y(t)x(t)$ έχουμε επίσης ότι

$$X(f) \star Y(f) = Y(f) \star X(f)$$

Επομένως για την συνέλιξη ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

2. Συνέλιξη σημάτων - Convolution.

Προηγούμενα είδαμε ότι η συνέλιξη δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ορίζεται ως:

$$x(t) \star y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της συνέλιξης δύο σημάτων⁴

$$\begin{aligned} F\{x(t) \star y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du \right] e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-j2\pi ft} dt \right]}_{Y(f)e^{-j2\pi fu}} du \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-j2\pi fu} du \\ &= Y(f) X(f) = X(f) Y(f) \end{aligned} \quad (29)$$

Στην παραπάνω απόδειξη κάναμε χρήση της ιδιότητας

$$y(t-t_0) \leftrightarrow Y(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} x(t) \star y(t) &\leftrightarrow X(f)Y(f) \\ y(t) \star x(t) &\leftrightarrow Y(f)X(f) \end{aligned} \quad (30)$$

Από τις δύο αυτές πράξεις που μόλις είδαμε προκύπτει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα.

ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ indeed:

Πολλαπλασιασμός στο Χρόνο σημαίνει Συνέλιξη στη Συχνότητα

ΚΑΙ

Συνέλιξη στο Χρόνο σημαίνει Πολλαπλασιασμός στη Συχνότητα.

⁴Και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}x(t) y(t) &\leftrightarrow X(f) \star Y(f) \\x(t) \star y(t) &\leftrightarrow X(f) Y(f)\end{aligned}$$

3. Αυτοσυσχέτιση (autocorrelation)

Η αυτοσυσχέτιση σημάτων ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης ενός σήματος με τον εαυτό του, συμβολίζεται δε με $\phi_x(\tau)$ και υπολογίζεται ως:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t + \tau)dt \quad (31)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος⁵

$$\begin{aligned}F\{\phi_x(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t + \tau)dt \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right]}_{X(f)e^{j2\pi ft}} dt \\&= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j2\pi ft} dt \\&= X(f)X^*(f) \Rightarrow \\F\{\phi_x(\tau)\} &= |X(f)|^2\end{aligned}$$

Δηλαδή ο Μ.Φ. της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι πραγματική συνάρτηση (μιγαδικό μέρος μηδέν) και για όλες τις συχνότητες είναι θετική. Αρα η φάση του Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν για όλες τις συχνότητες. Αυτό είναι επίσης σημαντικό: ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος του φάσματος φάσης του σήματος. Εμείς γνωρίζουμε ότι μετατόπιση στο χρόνο σημαίνει φάση (φάση μετατόπισης). Επομένως, αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όπως και να μετακινηθεί το σήμα στον άξονα του χρόνου ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος κάθε τέτοιας μετακίνησης. Μια τέτοια σημαντική συνάρτηση έχει βέβαια όνομα. Ονομάζεται Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας⁶ (Energy Spectral Density) και συμβολίζεται ως:

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (32)$$

που όπως δείξαμε ισούται με:

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \quad (33)$$

⁵και εδώ αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης :)

⁶Ποιού νεκρού Έλληνα γλωσσολόγου θα τρίζουν τώρα τα κόκκαλα!!!!

Από την Εξίσωση (32) έχουμε επίσης ότι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \quad (34)$$

Αν στην Εξίσωση (34) θέσουμε $\tau = 0$ θα έχουμε το περίφημο θεώρημα του Parseval (τον είχατε ξεχασμένο ε;;!) για τον Μ.Φ. σημάτων ενέργειας:

$$\phi_x(0) = W_x = \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (35)$$

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$$

Αν το σήμα είναι σε *Volts* η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της ενέργειας εκφράζεται σε $\text{Volts}^2 \text{sec}^2 = \text{Volts}^2 \text{sec}/\text{Hz}$ και η αυτοσυσχέτιση σε $\text{Volts}^2 \text{sec}$.

Από τα παραπάνω είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι

ο Μ.Φ. της αυτοσυσχέτισης μας υπολογίζει την Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

ΚΑΙ ότι

ο Α.Μ.Φ. της Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας μας υπολογίζει την αυτοσυσχέτιση

4. Ετεροσυσχέτιση cross-correlation

Η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (36)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον Μ.Φ. της ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων

$$\begin{aligned} F\{\phi_{xy}(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X^*(f)Y(f) \end{aligned}$$

Δεν αναπτύξαμε αναλυτικά τα ολοκλήρωματα μιας και η διαδικασία είναι ανάλογη αυτής που ακολουθήσαμε παραπάνω για την αυτοσυσχέτιση.

Ο Μ.Φ. της ετεροσυσχέτισης δύο σημάτων ονομάζεται Συνάρτηση Διαφασματικής Πυκνότητα Ενέργειας⁷ - Energy InterSpectral Density και ορίζεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = X^*(f)Y(f)$$

⁷Εδώ πια θα σπάσανε τα κόκκαλα

Η $\Phi_{xy}(f)$ είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση και μη συμμετρική ως προς τη συχνότητα μηδέν.

Παρατηρείστε ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην ετεροσυσχέτιση

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{yx}(\tau)$$

Ο Μ.Φ. της $\phi_{yx}(\tau)$

$$\Phi_{yx}(f) = F\{\phi_{yx}(\tau)\} = Y^*(f)X(f)$$

Δηλαδή

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

επειδή

$$(Y^*(f)X(f))^* = X^*(f)Y(f)$$

Επίσης

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{yx}(\tau)$$

αλλά μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$$

Αν τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ μετριοούνται σε *Volts* τότε οι μονάδες μέτρησης της ετεροσυσχέτισης και της Διαφασματικής Πυκνότητα Ενέργειας είναι αντίστοιχα: $Volts^2 sec$ και $Volts^2 sec^2 = Volts^2 sec/Hz$

5. Θεώρημα του γινομένου

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\phi_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xy}(f)df$$

Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df$$

και για πραγματικά σήματα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)Y(f)df$$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ: Τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι δύο απλοί αριθμοί (είτε είναι πραγματικά τα σήματα είτε είναι μιγαδικά). Δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε δύο σήματα στο χρόνο

$(x(t)y(t))$ και μετά ολοκληρώσουμε ως προς t θα λάβουμε έναν αριθμό (π.χ. 5). Τον ΙΔΙΟ αριθμό (π.χ. 5) θα λάβουμε όταν πολλαπλασιάσουμε αυτά τα σήματα στη συχνότητα $(X^*(f)Y(f))$ και ολοκληρώσουμε (ως προς f). Εχουμε λοιπόν ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ του γινομένου μεταξύ του χώρου του χρόνου και του χώρου της συχνότητας!! Αυτό δείχνει, με το δικό του τρόπο, την ισοδυναμία των δύο χώρων!!

6. Σχόλιο: Σχέση συσχέτισης και συνέλιξης.

Είναι προφανές από τον ορισμό τους ότι η συσχέτιση και η συνέλιξη δεν είναι το ίδιο πράγμα. Ομως και από την άλλη μοιάζουν πολύ. Υπάρχει λοιπόν σχέση που να συνδέει αυτές τις δύο πράξεις; Υπάρχει!!

Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

Θέτουμε $t' = -t$, οπότε

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-t')y(-t+\tau)dt'$$

Ας συγκρίνουμε τώρα με την συνέλιξη των δύο σημάτων

$$x(\tau) \star y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(-t+\tau)dt$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \star y(\tau)$$

Παρόμοια σχέση προκύπτει και για την αυτοσυσχέτιση

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) \star x(\tau)$$

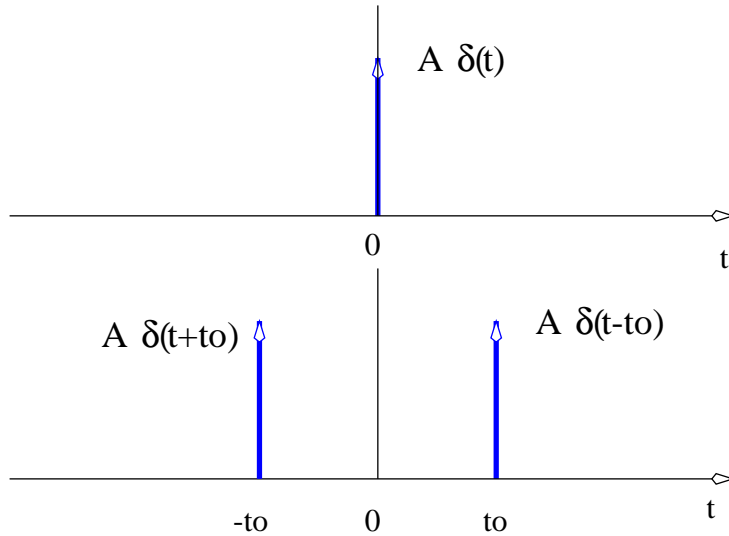
7. Πράξεις με τη συνάρτηση $\delta(t)$

Η συνάρτηση $\delta(t)$ ονομάζεται επίσης κρουστικό σήμα Dirac ή και κατανομή δέλτα.

Η κατανομή δέλτα συμβολίζεται ως ένα τόξο στην αρχή των αξόνων ($t = 0$) με πλάτος ανάλογο του σταθερού συντελεστή μπροστά από την $\delta(t)$. Π.χ. στο Σχήμα.10. Στο Σχήμα.10 φαίνονται επίσης οι μετακινημένες κατά t_0 δέλτα κατανομές.

Η κατανομή δέλτα (με $A = 1$) έχει την παρακάτω ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (37)$$



Σχήμα 10: Η κατανομή $A\delta(t)$, $A\delta(t - t_0)$ και $A\delta(t + t_0)$.

αν η συνάρτηση (σήμα) $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$. Ομοια, αν το σήμα $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = t_0$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (38)$$

και αν το σήμα $x(t)$ είναι συνεχής στο $t = -t_0$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t + t_0)dt = x(-t_0) \quad (39)$$

Αν $x(t) = 1$ τότε από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) = 1 \quad (40)$$

Επίσης αν $x(t) = e^{-j2\pi ft}$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad (41)$$

Ομως η παραπάνω σχέση είναι ο Μ.Φ. της κατανομής $\delta(t)$ και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (37) δείχνουμε ότι

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = e^{-j2\pi f0} = 1 \quad (42)$$

και ο Α.Μ.Φ. είναι

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}df \quad (43)$$

Η Εξίσωση (43) αποτελεί έναν από τους ορισμούς της συνάρτησης δέλτα.

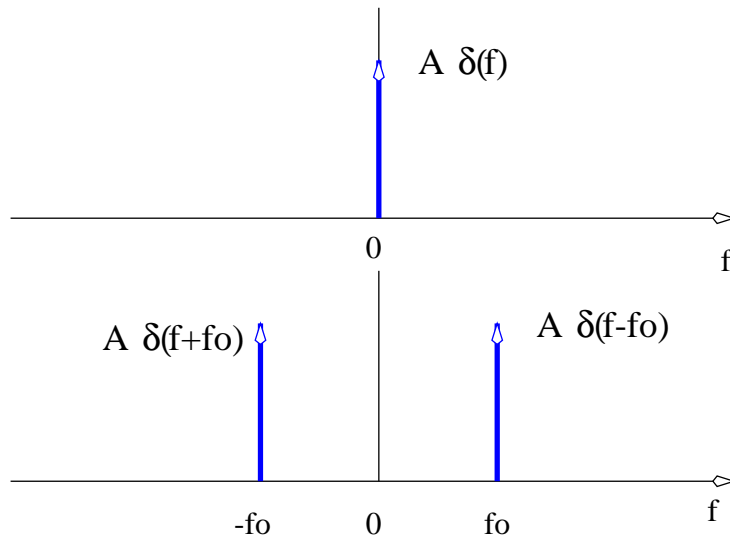
Επομένως ισχύει

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (44)$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συμμετρίας

$$1 \leftrightarrow \delta(f) \quad (45)$$

Η κατανομή $\delta(f)$ καθώς και μετακινήσεις αυτές στον άξονα της συχνότητας φαίνονται στο Σχήμα.11. Έχουμε δείξει παραπάνω ότι



Σχήμα 11: Η κατανομή $A\delta(f)$, $A\delta(f - f_0)$ και $A\delta(f + f_0)$.

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

Αν στην παραπάνω θεωρήσουμε ως σήμα την κατανομή δέλτα: $x(t) = \delta(t)$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow 1e^{-j2\pi ft_0} = e^{-j2\pi ft_0}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow \delta(f) \\ 5 &\leftrightarrow 5\delta(f) \\ 5e^{-j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow 5\delta(f + f_0) \\ 2e^{j2\pi f_0 t} &\leftrightarrow 2\delta(f - f_0) \\ 5\delta(t - t_0) &\leftrightarrow 5e^{-j2\pi ft_0} \\ 2\delta(t + t_0) &\leftrightarrow 2e^{j2\pi ft_0} \end{aligned}$$

Η κατανομή $\delta(t)$ είναι πολύ χρήσιμη στην περιγραφή των σημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και της συχνότητας. Επίσης οι παραπάνω ιδιότητες που είδαμε είναι χρήσιμες

στον εύκολο υπολογισμό του Μ.Φ. και του Α.Μ.Φ. των σημάτων.

Για παράδειγμα το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 3 & t = -5 \\ 2 & t = 0 \\ -2 & t = 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

γράφεται συνοπτικά

$$x(t) = 3\delta(t + 5) + 2\delta(t) - 2\delta(t - 1)$$

και ο Μ.Φ. του σήματος

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= 3F\{\delta(t + 5)\} + 2F\{\delta(t)\} - 2F\{\delta(t - 1)\} \\ &= 3e^{j2\pi f5} + 2 - 2e^{-j2\pi f1} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα ισχύουν στη συχνότητα. Αν ένα φάσμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$X(f) = \begin{cases} 5e^{j\phi_1} & f = 3Hz \\ 3e^{j\phi_2} & f = 4Hz \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

γράφεται συνοπτικά

$$X(f) = 5e^{j\phi_1}\delta(f - 3) + 3e^{j\phi_2}\delta(f - 4)$$

και ο Α.Μ.Φ.

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = 5e^{j\phi_1}e^{+j2\pi 3t} + 3e^{j\phi_2}e^{+j2\pi 4t}$$

Στο πεδίο του χρόνου ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} x(t) \star \delta(t) &= x(t) \\ x(t) \star \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \\ \delta(t - t_1) \star \delta(t - t_2) &= \delta(t - t_1 - t_2) \end{aligned}$$

όπου \star συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης που είδαμε παραπάνω.

Αντίστοιχα στο πεδίο της συχνότητας:

$$\begin{aligned} X(f) \star \delta(f) &= X(f) \\ X(f) \star \delta(f - f_0) &= X(f - f_0) \\ \delta(f - f_1) \star \delta(f - f_2) &= \delta(f - f_1 - f_2) \end{aligned}$$