Θεώρημα Parseval

Εστω δύο περιοδικά πραγματικά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ τα οποία αναπτύσσονται σε σειρά Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \\ y(t) &= B_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \cos(m\omega_0 t + \psi_m) \end{aligned} \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο σήματα $(x(t)y(t))$ και ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα σε μία περίοδο T_0 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x(t)y(t)dt &= A_0B_0 \underbrace{\int_0^{T_0} dt}_{T_0} + B_0 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \underbrace{\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k)dt}_{0} + \\ &\quad + A_0 \sum_{m=1}^{+\infty} B_m \underbrace{\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t + \psi_m)dt}_{0} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} A_k B_m \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k)\cos(m\omega_0 t + \psi_m)dt \\ &= A_0B_0T_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k B_k \int_0^{T_0} \left\{ \frac{1}{2}\cos(2k\omega_0 t + \phi_k + \psi_k) + \frac{1}{2}\cos(\phi_k - \psi_k) \right\} dt \\ &= A_0B_0T_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k B_k \frac{1}{2}\ To\ \cos(\phi_k - \psi_k) \\ \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)y(t)dt &= A_0B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k B_k}{2}\cos(\phi_k - \psi_k) \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση των παρακάτω ταυτοτήτων:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k)\cos(m\omega_0 t + \psi_m)dt &= \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \dfrac{T_0}{2} & m = k \end{cases} \\ \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t + \phi_k)dt &= 0 \quad \text{για κάθε} \quad k \\ \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b) \end{aligned}$$

Οταν $x(t) = y(t)$ τότε

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 \\ A_k &= B_k \\ \phi_k &= \psi_k \end{aligned}$$

για κάθε k. Ετσι η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k^2}{2} \tag{2}$$

Η εξίσωση (2) είναι το περίφημο θεώρημα του Parseval το οποίο δείχνει πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στις διάφορες συχνότητες $k\omega_0$.

Παράδειγμα 1:

Ας αναπτύξουμε σε σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = \sin^4(t)$$

όπου η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = \pi$ (γιατί;).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler

$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

και τη διωνυμική σειρά:

$$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

γράφουμε:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^4(t) = \left\{\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right\}^4 \\
&= \frac{1}{16}(e^{j4t} - 4e^{j3t}e^{-jt} + 6\underbrace{e^{j2t}e^{-j2t}}_{1} - 4e^{jt}e^{-j3t} + e^{-j4t}) \\
&= \frac{1}{16}\left[(e^{j4t} + e^{-j4t}) + 6 - 4(e^{j2t} + e^{-j2t})\right] \\
&= \frac{1}{16}(2\cos(4t) + 6 - 8\cos(2t)) \\
x(t) &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)
\end{aligned}$$

Η ενέργεια του σήματος σε μια περίοδο είναι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^8(t)dt = 0.2734.$$

Αρα:

$$\int_0^{\pi} |x(t)|^2 dt = \pi\, 0.2734 = 0.8590$$

Για να δούμε πως κατανέμεται η ενέργεια αυτή σε κάθε συχνότητα του σήματος. Στη συχνότητα $0Hz$ (DC συνιστώσα) έχουμε ενέργεια:

$$\pi\, A_0^2 = \pi\, 0.1406 = 0.4418$$

Θεωρώντας τη βασική συχνότητα την κανονικοποιημένη συχνότητα $\omega_0 = 1$, βλέπουμε ότι το σήμα μας έχει τις συχνότητες: $2\omega_0$ και $4\omega_0$ Στη συχνότητα ω_0 ο συντελεστής της σειράς Fourier είναι μηδέν ($A_1 = 0$) άρα δεν έχει ενέργεια το σήμα σε αυτή τη συχνότητα (ή διαφορετικά δεν περιέχει τη συχνότητα ω_0 το σήμα).

Στη συχνότητα $2\omega_0$ ο συντελεστής της σειράς Fourier είναι μη μηδενικός άρα υπάρχει η συχνότητα $2\omega_0$ στο σήμα και η ενέργεια που έχει κατανεμηθεί σε αυτήν είναι:

$$\pi\,\frac{A_2^2}{2} = \pi\,\frac{(1/2)^2}{2} = \pi\,0.125 = 0.3927$$

Ομοια δεν έχει ενέργεια το σήμα στη συχνότητα $3\omega_0$ ενώ στη συχνότητα $4\omega_0$ το σήμα έχει ενέργεια:

$$\pi\,\frac{A_4^2}{2} = \pi\,\frac{(1/8)^2}{2} = \pi\,0.0078 = 0.0245$$

Αλλες συνιστώσες το σήμα δεν περιέχει. Προσθέτοντας λοιπόν όλες τις παραπάνω ενέργειες στις διάφορες συχνότητες έχουμε:

$$\pi\,\left\{A_0^2 + \frac{A_2^2}{2} + \frac{A_4^2}{2}\right\} = \pi\,0.2734 = 0.8590$$

Βλέπουμε ότι είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρήκαμε όταν υπολογίσαμε τη συνολική ενέργεια του σήματος.

Παράδειγμα 2:

Σε προηγούμενο μάθημα είχαμε αναπτύξει σε σειρά Fourier το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

Η ενέργεια του σήματος σε μια περίοδο T_0 είναι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = 1$$

και το ανάπτυγμα του σήματος σε σειρά Fourier βρήκαμε να είναι:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0 t) + \cdots)$$

Αν υπολογίσουμε με το θεώρημα του Parseval την ενέργεια που έχει κάθε συχνότητα του σήματος όπως κάναμε και στο προηγούμενο παράδειγμα θα δούμε ότι στις τρείς πρώτες περιττές συχνότητες (οι άρτιες συχνότητες δεν έχουν ενέργεια) περιέχουν συνολικά ενέργεια: 0.9496 ή 94.9 % της συνολικής ενέργειας του σήματος σε μία περίοδο. Οι 10 πρώτοι περιττοί όροι περιέχουν ενέργεια 0.9816 ή 98.1 % της συνολικής ενέργειας του σήματος σε μία περίοδο. Τέλος οι 1000000 (thanks matlab!!) πρώτοι περιττοί όροι περιέχουν ενέργεια 0.99999979735786 ή 99.9 % της συνολικής ενέργειας του σήματος σε μία περίοδο.

Θεώρημα Parseval για μιγαδικά σήματα

Εχουμε δει ότι ένα περιοδικό μιγαδικό [1] σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Εστω ένα άλλο περιοδικό μιγαδικό σήμα $y(t)$ που έχει την ίδια περίοδο T_0 με το σήμα $x(t)$ και το οποίο αντίστοιχα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0 t}$$

Ακολουθούμε την ίδια πορεία όπως παραπάνω μόνο που τώρα θα πρέπει να προσέξουμε πως χρησιμοποιούμε τα μιγαδικά σήματα. Π.χ. αντί για $y(t)$ θα χρησιμοποιήσουμε το συζυγές του: $y^*(t)$. Ετσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} x(t) y^*(t) dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_k b_m^* \int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt \\
&= T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k^*
\end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση της πολύ γνωστής πλέον (λέω: ΠΛΕΟΝ) σχέσης

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ T_0 & k = m \end{cases} \tag{3}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) y^*(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k^* \tag{4}$$

Οταν τα δύο σήματα είναι ίδια τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \tag{5}$$

Η σχέση (5) είναι το θεώρημα Parseval για μιγαδικά σήματα.

[1] Σημ: ένα μιγαδικό σήμα είναι η γενική περίπτωση του σήματος. Δηλ. ένα πραγματικό σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μιγαδικό του οποίου το φανταστικό μέρος είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier a_k παρουσιάζουν συζυγή συμμετρία ως προς τη συχνότητα 0. δηλ: $a_k = a_{-k}^*$. Στην περίπτωση που το σήμα δεν είναι πραγματικό τότε δεν υπάρχει η παραπάνω συμμετρία στους συντελεστές Fourier.

Μοναδικότητα των συντελεστών Fourier

Θεωρούμε ξανά την ανάπτυξη σε μιγαδική σειρά Fourier του σήματος $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{6}$$

Εστω τώρα ότι προσπαθούμε να αναπτύξουμε το ίδιο σήμα χρησιμοποιώντας την ίδια τύπου σειρά ($e^{jk\omega_0 t}$) αλλά που οι συντελεστές δεν είναι απαραίτητα οι συντελεστές Fourier a_k. Θα συμβολίσουμε τους νέους συντελεστές ως b_k. Επιπλέον χρησιμοποιούμε μόνο $2N+1$ από τους νέους συντελεστές οπότε έχουμε μια προσέγγιση του αρχικού σήματος:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{jk\omega_0 t} \tag{7}$$

Το λάθος από την προσέγγιση αυτή γράφεται ως:

$$e(t) = x(t) - x_N(t) \tag{8}$$

Θέλουμε να επιλέξουμε τους συντελεστές b_k έτσι ώστε το λάθος αυτό να είναι ελάχιστο. Συγκεκριμμένα επιλέγουμε να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |e(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e(t)e^*(t)dt \tag{9}$$

Αντικαθιστώντας στην (8) τη σχέση (6) και (7) μπορούμε να γράψουμε την (8) ως:

$$e(t) = \sum_{k=-N}^{N} (\ a_k - b_k\ ) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{|k|>N} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{10}$$

όπου το τελευταίο άθροισμα δηλώνει όλες τις τιμές του k από $-\infty$ έως ∞ εκτός το πεδίο τιμών $[-N\ :\ N]$. Το λάθος $e(t)$ προκύπτει ως άθροισμα δύο σημάτων με την ίδια περίοδο επομένως θα είναι και αυτό περιοδικό με την ίδια περίοδο. Ως περιοδικό σήμα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier:

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{jk\omega_0 t} \tag{11}$$

όπου

$$g_k = \begin{cases} a_k - b_k & -N \le k \le N \\ a_k & |k| > N \end{cases}$$

Τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval για μιγαδικά σήματα η ενέργεια του σήματος $e(t)$ σε μία περίοδο είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |e(t)|^2 dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g_k|^2 \\
&= \sum_{k=-N}^{N} |a_k - b_k|^2 + \sum_{|k|>N} |a_k|^2
\end{aligned} \tag{12}$$

Από την παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ελάχιστο όταν

$$a_k = b_k \quad |k| \leq N$$

και τότε το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι

$$\epsilon_{min} = \sum_{|k|>N} |a_k|^2$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι το μέσω τετραγωνικό σφάλμα είναι ελάχιστο όταν οι συντελεστές b_k δεν είναι άλλοι παρά οι συντελεστές Fourier (a_k).

Επομένως αν η ανάπτυξη σε σειρά Fourier ενός σήματος περιοριστεί σε N όρους, τότε αν θέλουμε να έχουμε το μικρότερο λάθος από την προσέγγιση αυτή, οι συντελεστές των όρων αυτών δεν μπορεί να είναι άλλοι από τους συντελεστές Fourier. Επιπλέον επειδή το ελάχιστο σφάλμα είναι άθροισμα θετικών αριθμών αυτό θα μειώνεται όσο το N θα αυξάνεται.

Πράξεις με σήματα

Εστω δύο περιοδικά με την ίδια περίοδο μιγαδικά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ και τα αναπτύγματα σε Fourier αυτών:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

- Τότε το σήμα

  $$z(t) = c_1\ x(t) \pm c_2\ y(t)$$

  όπου c_1 και c_2 σταθερές θα είναι περιοδικό με την ίδια περίοδο των $x(t)$ και $y(t)$ και οπότε θα έχει ανάπτυγμα Fourier:

  $$
  \begin{aligned}
  z(t) &= c_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \pm c_2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \\
  &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\ c_1 a_k \pm c_2 b_k\ ) e^{jk\omega_0 t} \\
  &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k e^{jk\omega_0 t}
  \end{aligned}
  $$

  Δηλαδή οι συντελεστές Fourier, z_k, του νέου σήματος δεν είναι παρά:

  $$z_k = (\ c_1 a_k \pm c_2 b_k\ )$$

- Θεωρούμε το σήμα

  $$z(t) = x(t)\ y(t)$$

  το οποίο είναι και αυτό περιοδικό με την ίδια περίοδο των $x(t)$ και $y(t)$.

  Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα Fourier των σημάτων[2] $x(t)$ και $y(t)$ γράφουμε:

  $$
  \begin{aligned}
  z(t) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{jl\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0 t} \\
  &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_l b_m e^{j(l+m)\omega_0 t} \\
  &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m] e^{jk\omega_0 t}
  \end{aligned}
  $$

[2] Παρατηρείστε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε σήματα τότε θα χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα για δείκτες στα αθροίσματα, ενώ όταν αθροίζουμε σήματα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους ίδιους δείκτες.

όπου $k = l + m$.

Ετσι οι συντελεστές Fourier, z_k, του νέου σήματος υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$z_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Περιοδική ετεροσυσχέτιση (periodic cross-correlation)

  Η περιοδική συνάρτηση ετεροσυσχέτισης δύο μιγαδικών σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ ορίζεται ως:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(t) y(t+\tau) dt \tag{13}$$

  Αντικαθιστώντας στην (13) τα αντίστοιχα αναπτύγματα σε σειρά Fourier των σημάτων, η (13) γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
\phi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* e^{-jl\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0 t} e^{jm\omega_0 \tau}] dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* \, b_l e^{jl\omega_0 \tau} + \sum_{l \neq m=-\infty}^{+\infty} a_l^* \, b_m e^{jm\omega_0 \tau} e^{j(m-l)\omega_0 t}] dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* \, b_l e^{jl\omega_0 \tau}
\end{aligned}$$

  όπου και πάλι κάναμε χρήση της γνωστής ΠΛΕΟΝ σχέσης (3) ...

  Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι και η συνάρτηση της ετεροσυσχέτισης αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές $a_l^* \, b_l$, δηλαδή

$$\phi_{xy}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* \, b_l e^{jl\omega_0 t}$$

  και επομένως η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι και αυτή περιοδική με περίοδο ίση με την περίοδο των σημάτων που συσχετίσαμε.

- Περιοδική αυτοσυσχέτιση (periodic auto-correlation)

  Αν συσχετίσουμε το σήμα $x(t)$ με τον εαυτό του τότε προκύπτει η συνάρτηση της αυτο-συσχέτισης. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω, η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης γράφεται ως:

$$\begin{aligned}\phi_x(\tau) &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l^* \; a_l e^{jl\omega_0\tau} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l|^2 e^{jl\omega_0\tau}\end{aligned} \tag{14}$$

Αν θεωρήσουμε μηδενική μετακίνηση του σήματος ($\tau = 0$) τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης για αυτή την τιμή του τ θα ισούται με την ενέργεια του σήματος:

$$\phi_x(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |a_l|^2 = ||x||^2$$

όπου $||\cdot||$ συμβολίζει τη νόρμα ενός σήματος.

- Μετακίνηση ως προς τη χρονική στιγμή $t = 0$.

  Αν ένα σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

  τότε το μετακινημένο σήμα κατά t_0, $x(t-t_0)$, θα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

  όπως προκύπτει εύκολα από την προηγούμενη σχέση με απλή αντικατάσταση του t με $t - t_0$. Επομένως:

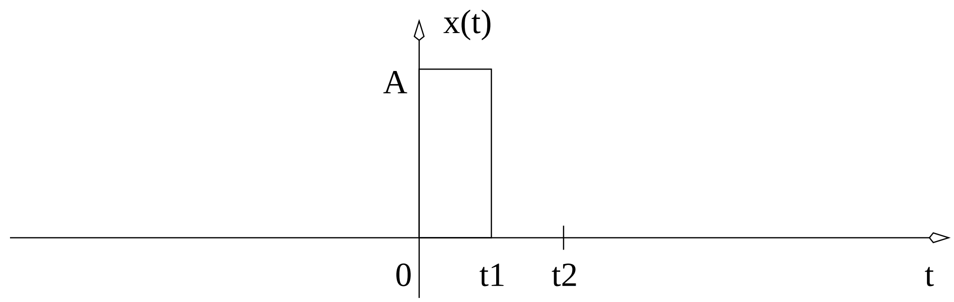
$$x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[a_k e^{-jk\omega_0 t_0}\right] e^{jk\omega_0 t}$$

Σήμα ΜΗ περιοδικό αλλά πεπερασμένης διάρκειας

Εστω ένα ΜΗ περιοδικό σήμα $x(t)$ το οποίο έχει περιορισμένη διάρκεια t_1

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το σήμα $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα. 1 Αν θέσουμε $t_1 = T_0/2$ και $t_2 = T_0$ τότε μπορούμε



Σχήμα 1: Σήμα μη περιοδικό περιορισμένης διάρκειας.

να θεωρήσουμε το σήμα περιοδικό (πάλι αυτό;;;!!!! σαν εφιάλτης!!) το οποίο σε μία περίοδο γράφεται ως

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 & T_0/2 < t < T_0 \end{cases}$$

Οπότε βέβαια μπορούμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier κατά τα γνωστά. Δηλαδή

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A dt = \frac{A}{T_0}\frac{T_0}{2} = \frac{A}{2}$$

και για $k \neq 0$

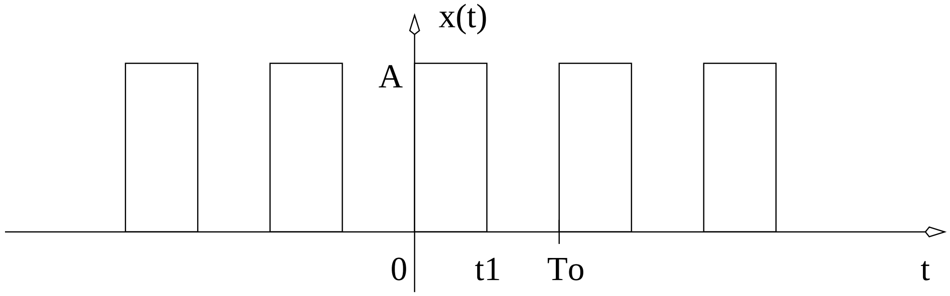
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{-A}{j2k\pi}[(-1)^k - 1] \end{aligned}$$

επομένως:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ άρτια} \\ \dfrac{A}{jk\pi} & k \text{ περιττά} \end{cases}$$

Ετσι το σήμα γράφεται σε ανάπτυγμα Fourier ως:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} e^{j(2k+1)\omega_0 t}$$



Σχήμα 2: Το περιοδικό σήμα που αντιστοιχεί στο σήμα του Σχήματος 1

.

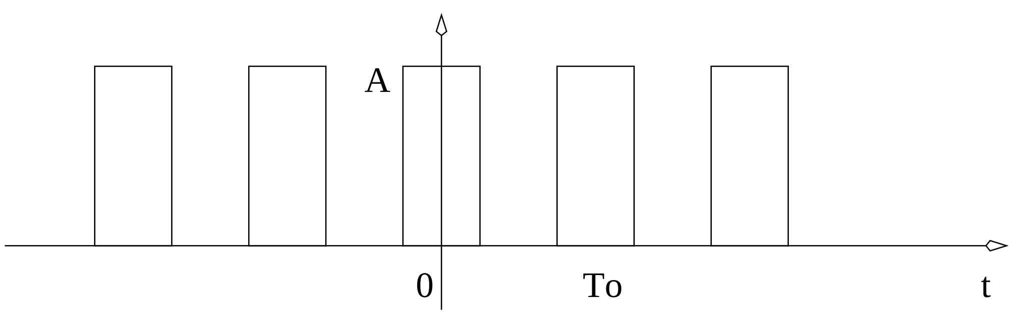
Ομως το σήμα αυτό που βρήκαμε είναι περιοδικό και μόνο σε μία περίοδο είναι ίσο με το αρχικό ΜΗ περιοδικό σήμα. Πράγματι το σήμα που εμείς αναπτύξαμε σε σειρά Fourier φαίνεται στο Σχήμα.2 Αν μετακινήσουμε το περιοδικό ή μη περιοδικό σήμα κατά $T_0/4$ αριστερά, δηλαδή $x(t+T_0/4)$,τότε σύμφωνα με τα παραπάνω, το νέο σήμα θα έχει συντελεστές Fourier:

$$\begin{aligned} a_k^{'} &= a_k \ e^{j(2k+1)\omega_0 \ T_0/4} \\ &= \frac{A}{j\pi}\frac{1}{2k+1}e^{j(2k+1)\omega_0 \ T_0/4} \\ &= \frac{A}{j\pi}\frac{1}{2k+1}(e^{j\pi})^k j \\ &= \frac{A}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1} \end{aligned}$$

επομένως

$$x(t+\frac{T_0}{4}) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}e^{j(2k+1)\omega_0 t}$$

Το σήμα μετά τη μετακίνησή του αριστερά κατά $\dfrac{T_0}{4}$ φαίνεται στο Σχήμα.3



Σχήμα 3: Το περιοδικό σήμα μετά τη μετακίνησή του αριστερά κατά $\dfrac{T_0}{4}$