Αναπαράσταση Φάσματος

Είδαμε ότι:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = Re\left\{Xe^{j\omega_0 t}\right\} = Re\left\{Xe^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

όπου $X = Ae^{j\Phi}$ είναι το μιγαδικό πλάτος. Πριν είχαμε δει το σήμα:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k),$$

δηλαδή ένα άθροισμα ημιτονοειδών ίδιας συχνότητας. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη δημιουργία του σήματος:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = A_0 + Re\left\{\sum_{k=1}^{N} X_k e^{j2\pi f_k t}\right\}$$

όπου x_k είναι το μιγαδικό πλάτος του μιγαδικού εκθετικού σήματος με συχνότητα f_k. Παρατηρήστε ότι εδώ τα ημιτονοειδή που αθροίζουμε δεν έχουν την ίδια συχνότητα.

Φάσμα είναι η γραφική παράσταση των συνιστωσών που υπάρχουν σε ένα σήμα/συνάρτηση. Είναι ένας γρήγορος τρόπος για να ελέγχουμε τη σχέση μεταξύ των συνιστωσών αυτών.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αρκετά με το σήμα:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

η συχνότητα f_k θα αναφέρεται σε Hz (κύκλοι / sec).
Χρησιμοποιώντας την αντίστροφη σχέση του Euler:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{A}{2} e^{j2\pi f_k t} e^{j\varphi_k} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_k t} e^{-j\varphi_k} \right\} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{X_k}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{X_k^*}{2} e^{-j2\pi f_k t} \right\} \end{aligned}$$

Άρα κάθε ημιτονοειδές σήμα αναλύεται σε δύο περιστρεφόμενα μιγαδικά πλάτη ένα με θετική συχνότητα f_k και ένα άλλο με αρνητική συχνότητα $-f_k$

Παράδειγμα:

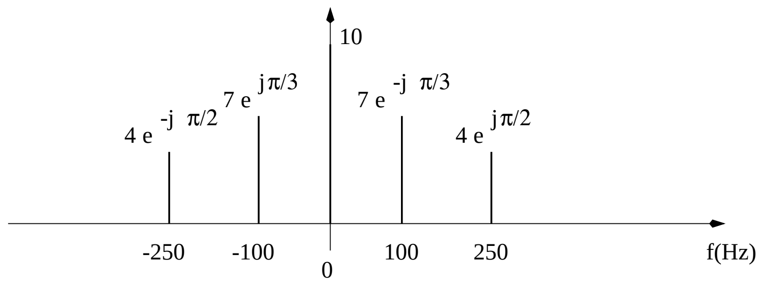
$$x(t) = 10 + 14\cos\left(2\pi 100 t - \frac{\pi}{3}\right) + 8\cos\left(2\pi 250 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler:

$$x(t) = 10 + \frac{14}{2}\left(e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi 100t} + e^{+j\frac{\pi}{3}}e^{-j2\pi 100t}\right) + \frac{8}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi 250t} + e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2\pi 250t}\right)$$

$$= 10e^{j2\pi 0t} + \left(7e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)e^{j2\pi 100t} + \left(7e^{j\frac{\pi}{3}}\right)e^{j2\pi(-100)t} + \left(4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)e^{j2\pi 250t} + \left(4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)e^{j2\pi(-250)t}$$

Άρα γραφικά μπορεί να αναπαρασταθεί ως:



Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης (αναμειγμένα παρανόμως).

Παρατηρούμε ότι το μιγαδικό πλάτος κάθε αρνητικής συχνότητας είναι συζηγές του μιγαδικού πλάτους της αντίστοιχης θετικής συχνότητας. Αυτό είναι μία από τις ιδιότητες του φάσματος όταν το σήμα που αναλύουμε είναι **πραγματικό**. Επίσης σημειώστε ότι στο παραπάνω σχήμα έχουμε παραστήσει (παρανόμως) μιγαδικά μεγέθη σαν αυτά να ήταν πραγματικά. Αυτό έχει γίνει με βάση το πλάτους τους αγνοώντας την πληροφορία της φάσης τους (αν και αυτή σημειώνετε). Κανονικά το φάσμα χωρίζεται στο φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης. Ας πούμε ότι για οικονομία χώρου βάλαμε τα δύο φάσματα σε ένα. Σε παρακάτω διαλέξεις θα έχουμε συζητήσουμε αρκετές φορές περί φασμάτων οπότε και ο παραπάνω διαχωρισμός του φάσματος σε φάσμ πλάτους και σε φάσμα φάσης θα τονίζεται.

Αν και το φάσμα ημιτονοειδών σημάτων βρίσκεται εύκολα χρημιμοποιώντας τη σχέση του Euler αυτό δεν είναι πάντα εύκολο για άλλου είδους σήματα. Όμως υπάρχουν βασικά μαθηματικά εργαλεία που βασίζονται στην εργασία του I. Fourier (1822) και γι' αυτό λέγονται: Μετασχηματισμός Fourier κ' Σειρές Fourier. Έτσι χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να δούμε ποιο είναι το φασματικό περιεχόμενο ενός σήματος.

Ανάλογα με τον τύπο του σήματος (περιοδικό ή μη περιοδικό) είναι δυνατόν να αναπαραστήσουμε κάθε σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων όπου:

1. Οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας που λέγεται θεμελιώδης. (περιοδικά σήματα) (αρμονική σχέση).

2. Οι συχνότητες δεν έχουν αυτή την αρμονική σχέση μεταξύ τους (μη περιοδικά σήματα).

Ο μετασχηματισμός Fourier θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Πολλαπλασιασμός ημιτονοειδών σημάτων.

Αυτή η πράξη έχει εφαρμογή:

1. Στη μουσική για τη παραγωγή «κρότων» (beat note) όπου ένα ημιτονοειδές σήμα μικρής συχνότητας π.χ. 10 Hz πολλαπλασιάζεται με ένα άλλο σήμα συχνότητας 1kHz.
2. Στη ραδιοφωνία όπου χρησιμοποιούμε διαμόρφωση κατά πλάτος (AM - Amplitude Modulation).

Παραδείγματα:

1.

$$x(t) = \cos(10\pi t)\cos(\pi t) = \frac{e^{j10\pi t} + e^{-j10\pi t}}{2} \cdot \frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2}$$

$$= \frac{2}{4}\cos(11\pi t) + \frac{1}{2}\cos(9\pi t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi\ \mathbf{5,5}\ t) + \frac{2}{4}\cos(2\pi\ \mathbf{4,5}\ t)$$

Παρατηρείστε πόσο κοντά είναι οι δύο συχνότητες. Έτσι φτιάχνουμε ένα beat note στη μουσική: Προσθέτοντας δύο ημιτονοειδή σήματα με μικρή διαφορά στη συχνότητα. Δηλαδή παίζοντας δύο γειτονικά πλήκτρα στο πιάνο *ταυτόχρονα*.

2.

$$x(t) = \sin^2(10\pi t) = \left(\frac{e^{j10\pi t} - e^{-j10\pi t}}{2j}\right)^2$$

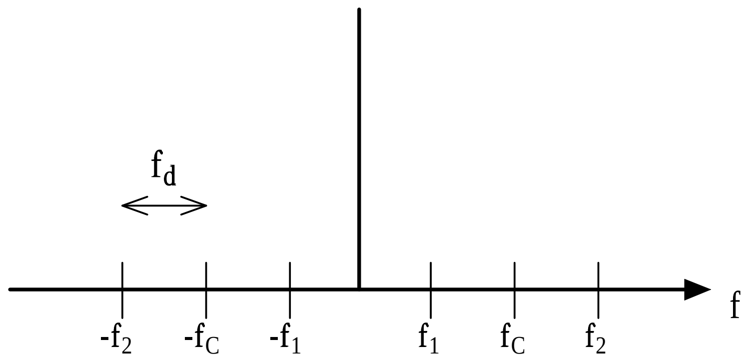
Υπενθύμιση: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, $j^2 = -1$

$$x(t) = -\frac{1}{4}\left(e^{-j20\pi t} + e^{-j20\pi t} - 2e^{j(10-10)\pi t}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(20\pi t)$$

Ας ψάξουμε μια σχέση μεταξύ του σήματος κρότου, του φάσματός του, και της πολλαπλασιαστικής σχέσης των σημάτων. Προσθέτουμε δύο ημιτονοειδή σήματα με κοντινές συχνότητες:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

Ορίζουμε: $\frac{f_1+f_2}{2} = f_C$, $\frac{f_2-f_1}{2} = f_d$
Ονομάζουμε: f_C : Κεντρική συχνότητα , f_d : Συχνότητα απόκλισης.



Σχήμα 2: Κεντρική συχνότητα και συχνότητα απόκλισης.

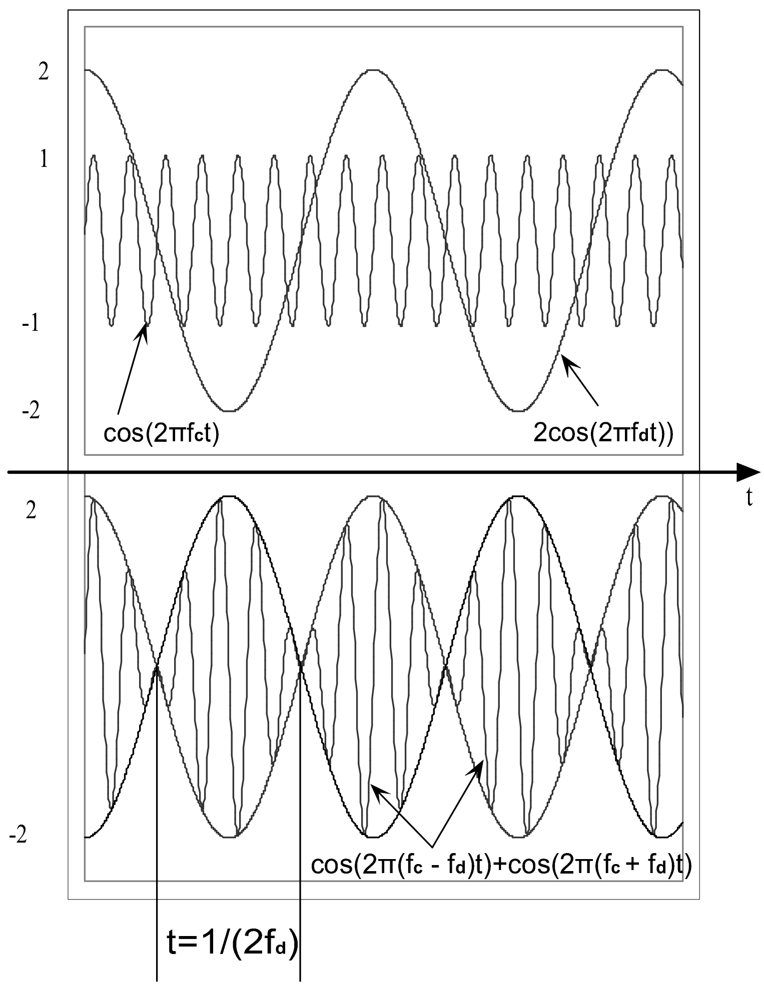
Ισχύει: $f_1 = f_C - f_d$, $f_2 = f_C + f_d$

$$\begin{aligned} x(t) &= Re\left\{e^{j2\pi f_1 t}\right\} + Re\left\{e^{j2\pi f_2 t}\right\} \\ &= Re\left\{e^{j2\pi(f_C - f_d)t} + e^{j2\pi(f_C + f_d)t}\right\} \\ &= Re\left\{e^{j2\pi f_C t}\left(e^{j2\pi f_d t} + e^{-j2\pi f_d t}\right)\right\} \\ &= 2\cos(2\pi f_d t)\cdot\cos(2\pi f_C t) \end{aligned}$$

Για παράδειγμα αν έχουμε αθροίσματα δύο ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητες $f_1 = 180\text{Hz}$ κ' $f_2 = 220\text{Hz}$ αυτά έχουν προκύψει από πολλαπλασιασμό δύο ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητες $f_C = 200\text{Hz}$ κ' $f_d = 20\text{Hz}$

Έτσι: $2\cos(2\pi 20t)\cos(2\pi 200t) = cos(2\pi 180t) + \cos(2\pi 220t)$

Στο σχήμα 3 φαίνεται (πάνω) δύο σήματα στο χρόνο τα οποία θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε και (κάτω) το γινόμενο αυτών. Από το σχήμα και τη σχέση απόστασης δύο μηδενισμών $\left(t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f_d}\right)$ βλέπουμε ότι όσο η f_d (η διαφορά μεταξύ των συχνοτήτων) μικραίνει, τόσο μεγαλώνουν οι αποστάσεις των μηδενισμών και το beating effect μειώνεται.
Αυτό ακριβώς χρησιμοποιούν οι μουσικοί όταν κουρδίζουν δύο όργανα να έχουν τον ίδιο τόνο. Όσο έχουν τα όργανά τους διαφορετικό τόνο, τόσο ακούνε το beat effect . Όταν τα όργανά τους πλησιάζουν σε τόνο, τόσο το f_d μικραίνει άρα και το φαινόμενο του κρότου.



Σχήμα 3: Πολλαπλασιασμός σημάτων στο χρόνο beat effect.

Διαμόρφωση πλάτους.

Πολλαπλασιασμός ημιτονοειδών σημάτων είναι πολύ χρήσιμος και στις τηλεπικοινωνίες. Αυτά τα σήματα που τα λέμε AM προκύπτουν απ΄ τον αγγλικό όρο Amplitude Modulation και απ΄ τα μαθηματικά απ΄ τον πολλαπλασιασμό ενός ημιτονοειδούς σήματος **χαμηλής** συχνότητας με ένα άλλο **υψηλής** συχνότητας.

$$x(t) = u(t)\cos(2\pi f_C t)$$

Όπου η συχνότητα f_C θεωρείται πολύ μεγαλύτερη από τη μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στο σήμα $u(t)$. Το σήμα $\cos(2\pi f_C t)$ λέγεται φέρων σήμα και η συχνότητα f_C λέγεται φέρουσα συχνότητα. Το σήμα $u(t)$ μπορεί να είναι π.χ. μουσική ή φωνή.

Προς το παρόν θα θεωρήσουμε $u(t)$ να είναι άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων π.χ. Αν $u(t) = 5 + 2\cos(2\pi 20t)$ και η φέρουσα συχνότητα είναι $f_c = 200Hz$ τότε το AM σήμα είναι

$$x(t) = (5 + 2\cos(2\pi 20t))\cos(2\pi 200t)$$

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ των σημάτων κρότου και των σημάτων AM είναι ότι η περιβάλλουσα, δηλαδή το ημιτονοειδές σήμα με τη χαμηλή συχνότητα $u(t) = 5 + 2\cos(2\pi 20t)$, δεν παίρνει αρνητικές τιμές! Πράγματι στο παράδειγμά μας το $2\cos(2\pi 20t)$ είναι μεταξύ του +2 και του -2. Προσθέτοντας το σήμα σταθερού πλάτους (DC) 5 έχει ως αποτέλεσμα το $u(t)$ να παίρνει τιμές μεταξύ 7 και 3.

Ας δούμε κάθε σήμα χωριστά:

$$u(t) = 5 + 2\cos(2\pi 20t)$$

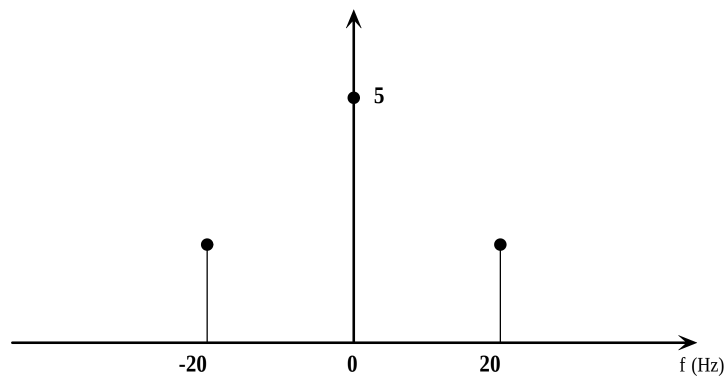
και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler προκύπτει:

$$\begin{aligned} u(t) &= 5 + 2\left(\frac{e^{j2\pi 20t} + e^{-j2\pi 20t}}{2}\right) \\ &= 5 + e^{j2\pi 20t} + e^{-j2\pi 20t} \\ &= 5e^{j2\pi \mathbf{0} t} + e^{j2\pi 20t} + e^{-j2\pi 20t} \end{aligned}$$

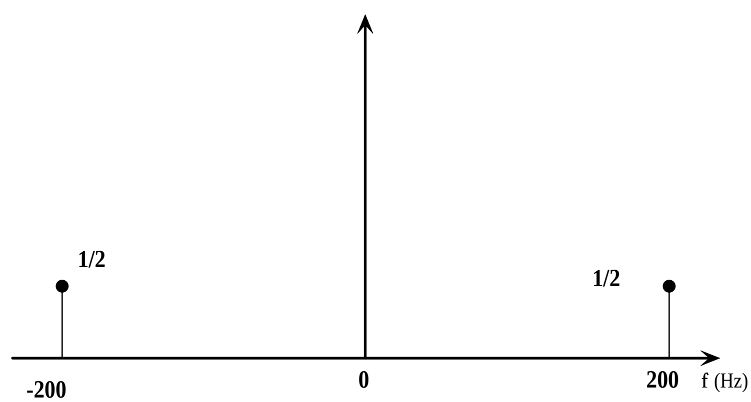
Άρα στο χώρο συχνότητας το σήμα $u(t)$ μπορεί να σχεδιαστει όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

Όμοια το φέρων σήμα $\cos(2\pi 200t)$ έχει το φασματικό περιεχόμενο που φαίνεται στο σχήμα 5 αφού, χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Euler όπως παραπάνω, προκύπτει:

$$\cos(2\pi 200t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi 200t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 200t}$$



Σχήμα 4: Απεικόνιση του σήματος $u(t) = 5 + 2\cos(2\pi 20t)$ στο χώρο της συχνότητας



Σχήμα 5: Απεικόνιση του σήματος $\cos(2\pi 200t)$ στο χώρο συχνότητας

Συνεπώς για το AM σήμα προκύπτει:

$$\begin{aligned}
x(t) &= [5 + 2\cos(2\pi 20t)]\cos(2\pi 200t) \\
&= \left(5e^{j2\pi 0t} + e^{j2\pi 20t} + e^{-j2\pi 20t}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi 200t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 200t}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-j2\pi 220t} + \frac{5}{2}e^{-j2\pi 200t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 180t} + \qquad (1) \\
&+ \frac{1}{2}e^{j2\pi 180t} + \frac{5}{2}e^{j2\pi 200t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 200t} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω εξίσωση το μέρος (1) περιέχει τις αρνητικές συχνότητες και το μέρος (2) περιέχει τις θετικές συχνότητες.

Σχηματικά ο χώρος της συχνότητας του AM σήματος θα είναι αυτός που φαίνεται στο σχήμα 6 δηλαδή η φασματική εικόνα του σήματος $u(t)$ έχει μεταφερθεί

Σχήμα 6: Ο χώρος συχνότητας για το AM σήμα

γύρω από τη φασματική εικόνα του φέροντος σήματος [1].

Μέχρι τώρα έχουμε μάθει:

1. Ο πολλαπλασιασμός ημιτονοειδών σημάτων είναι ισοδύναμος με την πρόσθεση ημιτονοειδών σημάτων σε διαφορετικές συχνότητες.

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos(2\pi f_\Delta t)\cos(2\pi f_c t) \\
&= \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)
\end{aligned}$$

   όπου $f_1 = f_c - f_\Delta$ και $f_2 = f_c + f_\Delta$.

2. Όταν προσθέτουμε ημιτονοειδή σήματα με την **ίδια** συχνότητα προκύπτει ένα ημιτονοειδές σήμα που έχει την **ίδια** συχνότητα με όλα αυτά που προσθέσαμε.

[1] γύρω από τη φέρουσα συχνότητα για την ακρίβεια

Το πλάτος και η φάση του νέου ημιτονοειδούς σήματος προκύπτει μετά από την άθροιση όλων των μιγαδικών πλατών:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \phi_k) &= Re\left\{\left[\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\phi_k}\right] e^{j\omega_0 t}\right\} \\ &= A\cos(\omega_0 t + \phi)\end{aligned}$$

Ας δούμε τώρα τι προκύπτει όταν προσθέτουμε ημιτονοειδή σήματα που έχουν διαφορετικές συχνότητες αλλά αυτές σχετίζονται μεταξύ τους με αρμονικό τρόπο:

$$\begin{aligned} f_k = k f_0 &\text{ αρμονικές συχνότητες} \\ \text{όπου } f_0 &\text{ θεμελειώδης συχνότητα}\end{aligned}$$

όπου $k \in \mathbb{N}$

Έστω λοιπόν:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό. Χρησιμοποιώντας μιγαδικά πλάτη:

$$x(t) = X_0 + Re\left\{\sum_{k=1}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right\}$$

όπου $X_0 = A_0 e^{j(2\pi \mathbf{0} f_0 t + \phi_0)} = A_0 e^{j0} = A_0$ με $\phi_0 = 0$, $X_k = A_k e^{j\phi_k}$. Αν $T_0 = \frac{1}{f_0}$ είναι η περίοδος του σήματος τότε είναι εύκολο να δείξετε ότι $x(t + T_0) = x(t)$ αφού $e^{j2\pi k} = 1$.