

Δειγματοληψία

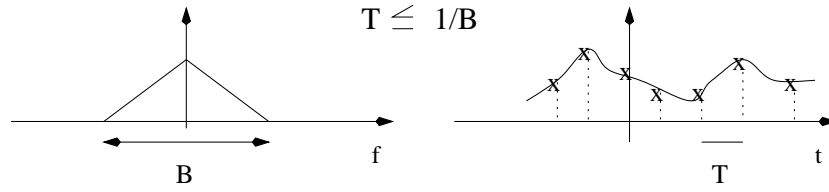
Όλα τα σήματα που έχουμε αναλύσει μέχρι τώρα είναι αναλογικά. Δηλαδή ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή t . Τα σήματα αυτά τα συμβολίζουμε π.χ. $x(t)$ για το σήμα το οποίο συμβολίζεται με το σύμβολο x και που ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή t (το t μέσα σε παρένθεση). Αυτός είναι η διεθνής τρόπος συμβολισμού των αναλογικών σημάτων. Με την αυξανόμενη χρήση υπολογιστών στη δεκαετία του '60 φάνηκε ότι σύντομα οι υπολογιστές θα ήταν πολύτιμοι βοηθοί στην ανάλυση πολλών ειδών σημάτων: από τις τηλεπικοινωνίες μέχρι την ιατρική, την πρόγνωση του καιρού, των σεισμών των οικονομικών δεδομένων κ.λ.π. Το πρόβλημα όμως είναι ότι ο υπολογιστής δεν μπορεί να χειριστεί αναλογικά σήματα. Έτσι το πρόβλημα της δειγματοληψίας αναλογικών σημάτων άρχισε από πολύ νωρίς (σχετικά) να απασχολεί τους επιστήμονες. Συγκεκριμένα ήταν το 1945 στα εργαστήρια των Bell Labs όταν ο Nyquist και ο Shannon διατύπωσαν το θεώρημα της δειγματοληψίας. Το θεώρημα αυτό απαντάει στην ερώτηση: Μπορούμε να αναπαράγουμε ένα σήμα εξ'ολοκλήρου μόνο αν έχουμε κάποια δείγματα αυτού;!!!!!! Αν ναι, κάτω από ποιές συνθήκες; Η απάντηση είναι καταφατική και δώθηκε από τους παραπάνω ερευνητές το 1945. Οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται είναι οι ακόλουθες:

1. Θα πρέπει το σήμα να είναι περιορισμένου φάσματος συχνοτήτων. Δηλαδή όλο το φασματικό του περιεχόμενο να βρίσκεται μεταξύ κάποιων πεπερασμένων συχνοτήτων. Αν π.χ. το φάσμα συχνοτήτων του σήματος είναι μεταξύ των συχνοτήτων $-f_{max}$ και f_{max} , όπου f_{max} είναι η μέγιστη συχνότητα που υπάρχει στο σήμα (και $-f_{max}$ η ελάχιστη) τότε το εύρος φάσματος συχνοτήτων του σήματος είναι $B = 2f_{max}$.
2. Αν ισχύει η πρώτη συνθήκη τότε θα μπορούμε από τα δείγματα του σήματος να επιστρέψουμε πίσω την αναλογική μορφή του σήματος ΑΡΚΕΙ τα δείγματα αυτά να έχουν απόσταση μεταξύ τους όχι μεγαλύτερη από

$$T = \frac{1}{B}$$

Επομένως, αν έχουμε ένα συνεχές σήμα το οποίο έχει περιορισμένο εύρος φάσματος συχνοτήτων π.χ. B η δειγματοληψία του σήματος αυτού με ρυθμό μικρότερο ή ίσο του $1/B$ θα μας δώσει δείγματα τα οποία ορίζουν ΠΛΗΡΩΣ το σήμα. Οι συνθήκες 1 και 2 φαίνονται¹ στο Σχήμα. 1 Στα

¹για τους οπτικούς τύπους. Όλα τα σχήματα σε αυτό το κεφάλαιο είναι μια ευγενική χορηγία του Υπουργείου Επικοινωνιών - για να μην πείτε ότι όλα τα έργα γίνονται μόνο προεκλογικά



Σχήμα 1: Σχέση εύρους φάσματος και ρυθμού δειγματοληψίας.

παρακάτω θα ασχοληθούμε με τη μαθηματική έκφραση της δειγματοληψίας και τις εφαρμογές της.

Εστω το αναλογικό σήμα $x(t)$ και η σειρά παλμών Dirac

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Η απόσταση μεταξύ των παλμών Dirac είναι T_s . Η ιδανική δειγματοληψία εκφράζεται με το γινόμενο των δύο αυτών σημάτων:

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

Ο παραπάνω πολλαπλασιασμός θα μας προμηθεύσει με δείγματα του αναλογικού σήματος που θα απέχουν απόσταση T_s δευτερόλεπτα. Για να αντιληφθούμε καλύτερα τις συνέπειες της δειγματοληψίας θα πρέπει να δούμε τα αποτελέσματα αυτής στο χώρο της συχνότητας. Όπως βλέπουμε από την παραπάνω εξίσωση η δειγματοληψία γίνεται με πολλαπλασιασμό δύο σημάτων στο χώρο του χρόνου. Επομένως στο χώρο της συχνότητας θα πρέπει να συμβαίνει συνέλιξη των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier των σημάτων. Αν θεωρήσουμε ότι

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

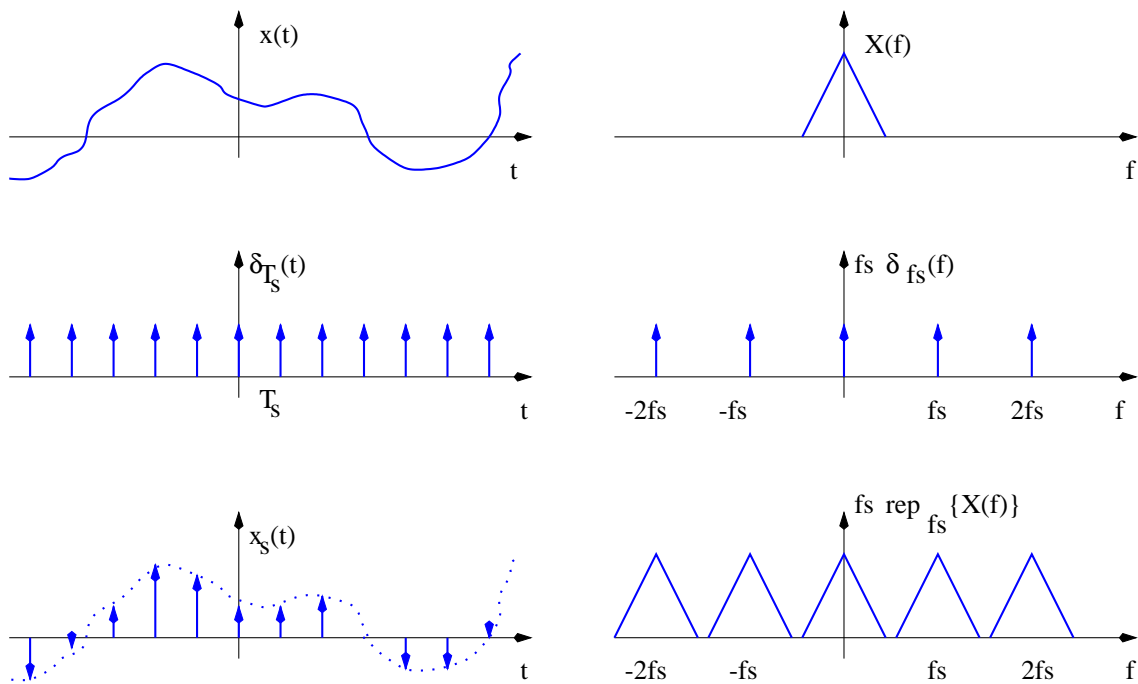
και ότι

$$F\{\delta_{T_s}(t)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T_s}\right) = T_s^{-1}\delta_{1/T_s}(f) = f_s\delta_{f_s}(f)$$

όπου $f_s = 1/T_s$, τότε

$$X_s(f) = X(f) \star f_s\delta_{f_s}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s X(f - nf_s) = f_s \text{rep}_{f_s}\{X(f)\}$$

όπου rep_{f_s} σημαίνει επανάληψη (repetition) κάθε f_s . Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η δειγματοληψία στο χρόνο με ρυθμό T_s έχει ως αποτέλεσμα την επανάληψη του φάσματος περιοδικά με περίοδο $f_s = 1/T_s$. Η διαδικασία της (ιδανικής) δειγματοληψίας στο χρόνο και στη συχνότητα



Σχήμα 2: Δειγματοληψία στο χρόνο και το αποτέλεσμα αυτής στο χώρο της συχνότητας.

φαίνονται στο Σχήμα. 2, όπου για να απλουστεύσουμε το σχήμα θεωρούμε ότι ο Μ.Φ. $X(f)$ του $x(t)$ είναι ένα θετικό πραγματικό μέγεθος. Από τον ορισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για περιοδικά σήματα με περίοδο T

$$\phi_x(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt$$

βρίσκουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της παλμικής σειράς Dirac είναι

$$\phi_{\delta_{T_s}}(\tau) = T_s^{-1} \delta_{T_s} = f_s \delta_{T_s}$$

Τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των δειγμάτων του σήματος είναι

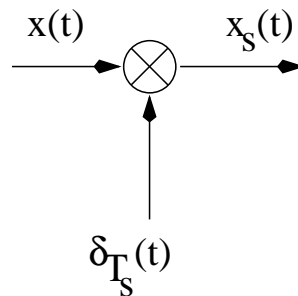
$$\begin{aligned} \phi_{x_s}(\tau) &= \phi_x(\tau) \phi_{\delta_{T_s}}(\tau) \\ &= f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_x(kT_s) \delta(\tau - kT_s) \end{aligned}$$

και η φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\begin{aligned}
 \Phi_{x_s}(f) &= F\{\phi_{x_s}(\tau)\} \\
 &= F\{\phi_x(\tau)\} \star f_s F\{\delta_{T_s}\} \\
 &= \Phi_x(f) \star f_s f_s \delta_{f_s}(f) \\
 &= \Phi_x(f) \star f_s^2 \delta_{f_s}(f) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 \Phi_x(f - n f_s) \\
 &= f_s^2 \text{rep}_{f_s}\{\Phi_x(f)\}
 \end{aligned}$$

Δηλαδή, όπως και το φάσμα συχνοτήτων του αναλογικού σήματος, έτσι και η φασματική πυκνότητα ισχύος του αναλογικού σήματος, $\Phi_x(f)$, επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο f_s όταν το αναλογικό σήμα δειγματοληπτηθεί με ρυθμό $T_s = 1/f_s$.

Στο Σχήμα. 3 φαίνεται το διάγραμμα της ιδανικής δειγματοληψίας.

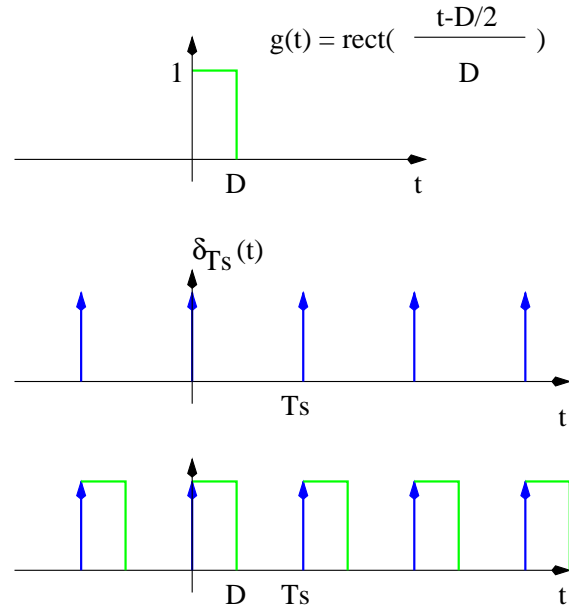


Σχήμα 3: Διάγραμμα ιδανικής δειγματοληψίας.

Το σήμα που λαμβάνουμε μετά την ιδανική δειγματοληψία (βλ. Σχήμα. 2 τελευταίο σχήμα αριστερά) είναι μια σειρά από παλμούς Dirac. Ένα τέτοιο σήμα δεν είναι πραγματοποιήσιμο μιας και οι τιμές των δειγμάτων δεν έχουν διάρκεια. Γι'αυτό και η ονομασία ιδανική δειγματοληψία. Μπορούμε επίσης να βγάλουμε το ίδιο συμπέρασμα (δηλ. ότι το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί) ελέγχοντας το φάσμα του σήματος μετά τη δειγματοληψία. Για παράδειγμα στο Σχήμα. 2 φαίνεται ότι το (βασικό) φάσμα που αντιστοιχεί στο αναλογικό σήμα επαναλαμβάνεται στο άπειρο χωρίς καμμία βαθμιαία μείωση καθώς η συχνότητα τείνει στο άπειρο ($|f| \rightarrow \infty$). Βλέπουμε λοιπόν πως είτε από το χώρο του χρόνου είτε από το χώρο της συχνότητας φτάνουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Για να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε ένα διακριτό σήμα, θα πρέπει τα δείγματα που θα πάρουμε από το αναλογικό σήμα να έχουν κάποια (έστω και μικρή) διάρκεια. Για να πετύχουμε

κάτι τέτοιο αντικαθιστούμε τη σειρά παλμών Dirac με σειρά από τετραγωνικούς παλμούς διάρκειας D . Αυτό με τη σειρά του μπορεί να προκύψει από συνέλιξη ενός βασικού παλμού διάρκειας D μετατοπισμένου κατά $D/2$ με τη σειρά παλμών Dirac όπως φαίνεται στο Σχήμα. 4 Ο βασικός



Σχήμα 4: Συνέλιξη ορθογώνιου παλμού με σειρά παλμών Dirac.

ορθογώνιος παλμός μήκους D που είναι μετατοπισμένος κατά $D/2$ γράφεται ως

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t - D/2}{D}\right)$$

οπότε ο Μ.Φ. αυτού του παλμού είναι

$$G(f) = D \text{sinc}(fD) e^{-j\pi f D} \quad (1)$$

Δεδομένου ότι ο Μ.Φ. του σήματος μετά την ιδανική δειγματοληψία είναι

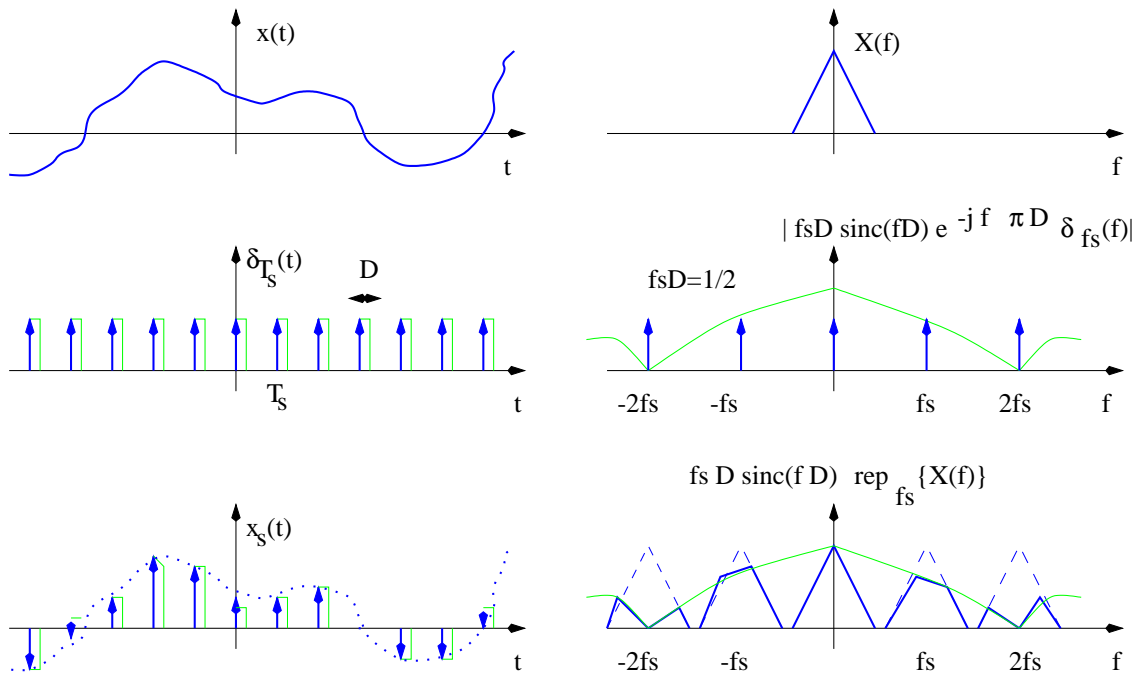
$$X_s(f) = f_s \text{rep}_{f_s}\{X(f)\} \quad (2)$$

ο Μ.Φ. του σήματος που προκύπτει όταν παρεμβάλουμε τον ορθογώνιο παλμό θα είναι

$$\begin{aligned} X_{sh}(f) &= X_s(f)G(f) \\ &= D f_s \text{sinc}(fD) \text{rep}_{f_s}\{X(f)\} e^{-j\pi f D} \end{aligned} \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος θα επαναλαμβάνεται περιοδικά όπως και στην ιδανική δειγματοληψία. Όμως η βασική διαφορά είναι ότι σε αυτή την περίπτωση

το φάσμα θα πολλαπλασιάζεται με μια συνάρτηση *sinc*. Έτσι, το φάσμα θα τείνει στο μηδέν καθώς η συχνότητα θα τείνει στο άπειρο. Στο Σχήμα. 5 φαίνεται ένα παράδειγμα μη ιδανικής δειγματοληψίας όπου η διάρκεια του παλμού είναι $D = 1/(2 f_s)$. Όταν χρησιμοποιούμε ορθογώ-



Σχήμα 5: Μη ιδανική δειγματοληψία στο χρόνο και το αποτέλεσμα αυτής στο χώρο της συχνότητας.

νιο παλμό διάρκειας D για τη δειγματοληψία, το σήμα μετά τη δειγματοληψία έχει την ίδια τιμή για αυτή την διάρκεια (όπως φαίνεται και από το Σχήμα. 5 - κάτω αριστερά). Δηλ. διατηρεί την ίδια τιμή για χρόνο D . Για αυτό το λόγο αυτός ο τρόπος δειγματοληψίας ονομάζεται και δειγματοληψία με διατήρηση τιμής (sampling with holding). Το διάγραμμα αυτής της δειγματοληψίας με διατήρηση τιμής φαίνεται στο Σχήμα. 6(α) και περιγράφει διαγραμματικά τη σχέση

$$x_{sh}(t) = x(t)[\delta_{T_s}(t) \star g(t)]$$

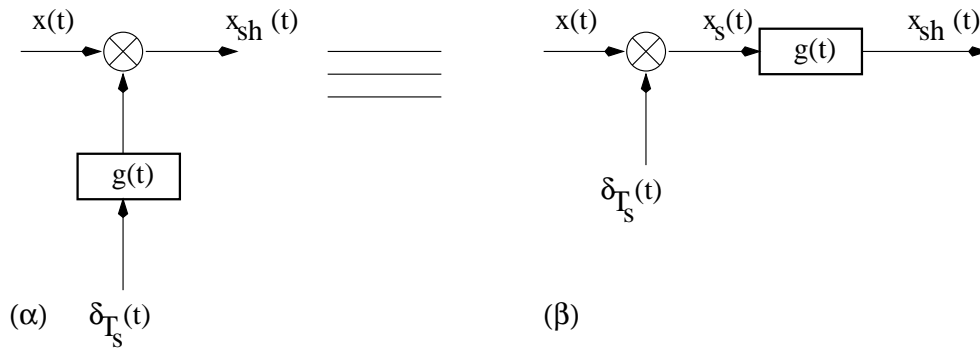
Επειδή η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως

$$x_{sh}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] \star g(t)$$

δίνουμε στο Σχήμα. 6(β) το ισοδύναμο στο πρώτο διάγραμμα που περιγράφει τη δεύτερη σχέση.

Από την Εξ. 3 προκύπτει ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος του δειγματοληπτημένου σήματος με διατήρηση τιμής είναι

$$\Phi_{x_{sh}}(f) = D^2 f_s^2 \text{sinc}^2(fD) \text{rep}_{f_s} \{ \Phi_x(f) \} \quad (4)$$



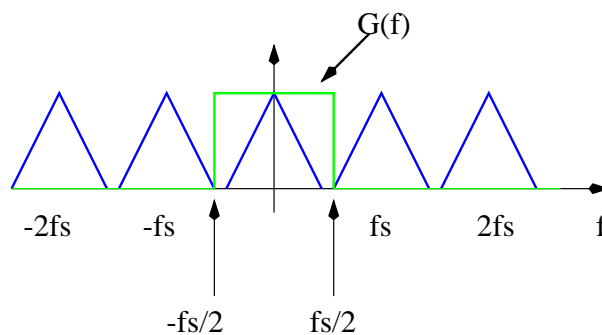
Σχήμα 6: Δύο ισοδύναμα διαγράμματα για την δειγματοληψία με διατήρηση τιμής.

όπου $\Phi_x(f)$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος του αναλογικού σήματος.

Ανασυγκρότηση του αναλογικού σήματος

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή η δειγματοληψία είναι σημαντική γιατί μέσω αυτής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστές για την επεξεργασία πολλών σημάτων. Όμως υπάρχουν εφαρμογές όπου χρειαζόμαστε να επιστρέψουμε από την διακριτή μορφή στην αναλογική μορφή του σήματος. Δηλ. θα πρέπει να ανασυγκροτήσουμε (ανασυνθέσουμε) το αναλογικό σήμα από τα δείγματά του. Ένα παράδειγμα αποτελεί η μουσική απο CD. Το σήμα έχει σωθεί στο CD σε διακριτή μορφή. Όταν εμείς πατάμε το Play για να ακούσουμε μουσική θα πρέπει τα δείγματα του σήματος της μουσικής να ανασυνθέσουν το αναλογικό σήμα της μουσικής. Μόνο σε μια τέτοια μορφή θα φτάσει η μουσική ευχάριστα στα αυτιά μας².

Όπως μελετήσαμε την ιδανική δειγματοληψία, θα μελετήσουμε και την ιδανική ανασυγκρότηση του αναλογικού σήματος από τα δείγματά του. Από το Σχήμα. 2 παρατηρούμε ότι το φάσμα του αναλογικού σήματος περιέχεται μέσα στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος. Συγκεκριμένα, είναι το φάσμα που περικλείεται ανάμεσα στις συχνότητες $-f_s/2$ έως $f_s/2$. Επομένως μπορούμε να ανακτήσουμε το αναλογικό σήμα ανακτώντας αρχικά το φάσμα του και μετά με ανάστροφο μετασχηματισμό Fourier το αναλογικό σήμα. Η ανάκτηση του φάσματος μπορεί να γίνει με την εφαρμογή ενός παράθυρου στη συχνότητα που θα απομονώσει το φάσμα από $-f_s/2$ έως $f_s/2$ όπως φαίνεται στο Σχήμα. 7. Το παράθυρο ενεργεί ως φίλτρο μηδενίζοντας ότι



Σχήμα 7: Απομόνωση συχνοτήτων με τη χρήση ορθογώνιου παράθυρου (φίλτρου).

βρίσκεται εκτός των ορίων $[-f_s/2, f_s/2]$ ενώ διατηρεί ανέπαφη ό,τι πληροφορία βρίσκεται ανάμεσα στις παραπάνω συχνότητες. Η μαθηματική έκφραση του φίλτρου στο χώρο της συχνότητας είναι:

$$G(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

²εχτός και αν προτιμάμε να ακούσουμε bits αντί για νότες - περί ορέξεως ουδέν λόγος βέβαια ...

Ο συντελεστής $1/f_s$ είναι απαραίτητος γιατί λόγω της δειγματοληψίας το φάσμα του σήματος έχει πολλαπλασιαστεί με f_s (βλ. Σχήμα. 2). Έτσι με αυτόν τον τρόπο το αποτέλεσμα θα είναι ίσο με το αρχικό φάσμα $X(f)$:

$$X(f) = X_s(f) G(f)$$

Επειδή πολλαπλασιασμός στο χώρο της συχνότητας σημαίνει συνέλιξη στο χώρο του χρόνου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής στο χώρο του χρόνου:

$$x(t) = x_s(t) \star g(t) \quad (5)$$

όπου

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t)$$

και

$$\begin{aligned} g(t) &= T_s f_s \text{sinc}(t f_s) \\ &= \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \end{aligned}$$

όπου βέβαια $f_s T_s = 1$. Η Εξ. 5 τότε γράφεται

$$\begin{aligned} x(t) &= [x(t)\delta_{T_s}(t)] \star g(t) \\ &= g(t) \star \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)g(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - k\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Η Εξ. 6 είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι ιδανικά ένα αναλογικό σήμα (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) μπορεί να ανασυγκροτηθεί όταν τα δείγματά του $x(kT_s)$ (δηλαδή από κάποιες διακριτές μόνο χρονικές στιγμές του σήματος) συνδυαστούν γραμμικά με τη συνάρτηση *sinc*.

Εφαρμογές της δειγματοληψίας στις Τηλεπικοινωνίες

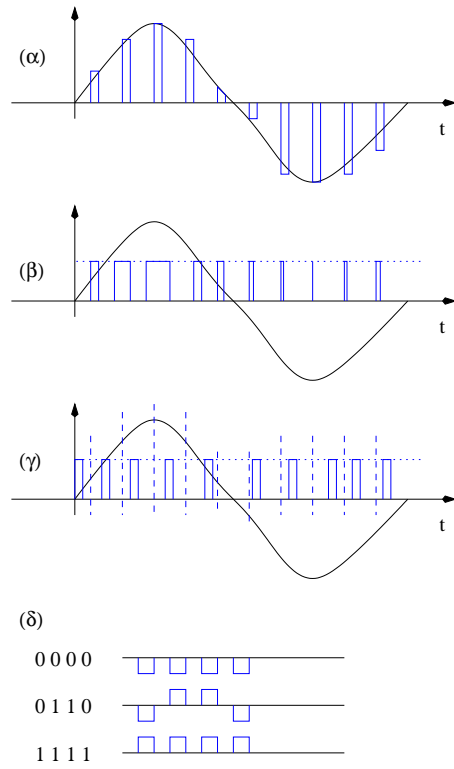
Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η δειγματοληψία δίνει τη δυνατότητα να επεξεργαστούμε με υπολογιστές πολλά είδη σημάτων. Ένα σημαντικό πεδίο εφαρμογής της δειγματοληψίας είναι στις Τηλεπικοινωνίες.

Η δειγματοληψία μας επιτρέπει να στείλουμε αντί του αναλογικού σήματος μια σειρά από παλμούς (ψηφιακή επικοινωνία). Με αυτό τον τρόπο μπορούμε εύκολα να ενισχύσουμε το σήμα στα σημεία αναμετάδοσης του σήματος. Η ενίσχυση του σήματος σε τακτά χρονικά διαστήματα είναι αναγκαία λόγω εξασθένισης του εκπεμπόμενου σήματος. Το κακό στην περίπτωση του αναλογικού σήματος είναι ότι μαζί με το χρήσιμο σήμα φτάνει στον αναμεταδότη και θόρυβος που προέρχεται π.χ. από μηχανικές λειτουργίες του συστήματος.

Όταν ένας αναμεταδότης ενισχύει το χρήσιμο σήμα ενισχύει ταυτόχρονα και το θόρυβο. Η συχνή επανάληψη της ενίσχυσης θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταφορά μαζί με το χρήσιμο σήμα και ισχυρό θόρυβο με αποτέλεσμα τη μείωση της ποιότητας της επικοινωνίας.

Αντίθετα η χρήση παλμών μέσω της δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος δίνει τη δυνατότητα στον αναμεταδότη να εκτιμήσει που βρίσκονται οι παλμοί και να ξαναφτιάξει από την αρχή το μεταδιδόμενο σήμα μηδενίζοντας έτσι το θόρυβο που έχει φτάσει μέχρι τον αναμεταδότη. Αυτός είναι ένας βασικός λόγος για τον οποίο τα συστήματα ψηφιακής επικοινωνίας έχουν υψηλή ποιότητα μετάδοσης δεδομένων σε σχέση με τα συστήματα αναλογικής μετάδοσης.

Παραδείγματα παλμικής διαμόρφωσης φαίνονται στο Σχήμα. 8



Σχήμα 8: Διάφορα συστήματα παλμικής διαμόρφωσης. (α) Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος - Pulse Amplitude Modulation-PAM, (β) Διαμόρφωση παλμών κατά εύρος - Pulse Width Modulation-PWM, (γ) Διαμόρφωση παλμών κατά θέση - Pulse Position Modulation-PPM, (δ) Παλμοκωδική διαμόρφωση - Pulse Code Modulation-PCM

Ιδεατό φίλτρο

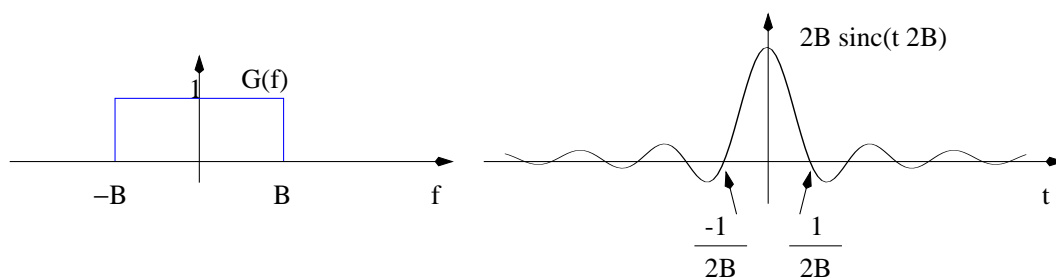
Στα προηγούμενα είδαμε ότι για να ανασυγκροτήσουμε το αναλογικό σήμα από τα δείγματά του αρκούσε να πολλαπλασιάσουμε το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος (δηλ. των δειγμάτων του σήματος) με ένα φίλτρο που είχε σχήμα ορθογώνιου παράθυρου. Όπως γνωρίζουμε, ένα τέτοιο σήμα στη συχνότητα θα αντιστοιχεί σε ένα *sinc* στο χρόνο. Συγκεκριμένα αν το φίλτρο χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$G(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

τότε έχει εύρος συχνοτήτων $2B$, από τη συχνότητα $f = -B$ έως τη συχνότητα $f = B$ έχει πλάτος 1 και εκτός αυτού του εύρους συχνοτήτων έχει πλάτος 0. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $G(f)$ θα μας δίνει μια περιγραφή του φίλτρου στο χρόνο:

$$g(t) = F^{-1}\{G(f)\} = 2B \text{sinc}(t 2B)$$

όπου F^{-1} σημαίνει αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier. Το φίλτρο στο χώρο της συχνότητας και του χρόνου φαίνεται στο Σχήμα. 9. Σημειώστε ότι το φίλτρο που απεικονίζει το Σχήμα. 9



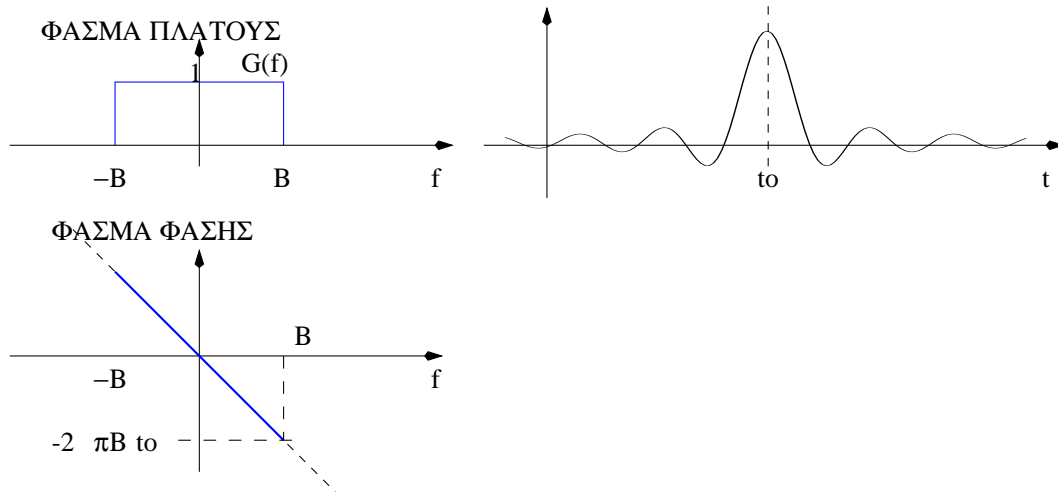
Σχήμα 9: Φίλτρο παραθύρου στη συχνότητα (αριστερά) και στο χρόνο (δεξιά)

έχει μηδενική φάση.

Το πρόβλημα με αυτό το φίλτρο είναι ότι το σήμα που του αντιστοιχεί στο χρόνο ($g(t)$) είναι ένα μη αιτιατό σήμα ($g(t) \neq 0$, για $t < 0$), επομένως μη πραγματοποιήσιμο. Αρα δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να απομονώσουμε τις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Μια λύση (και μοναδική) είναι να μεταφέρουμε το $g(t)$ δεξιά στο χρόνο π.χ. κατά $t = t_0$ έτσι ώστε η περισσότερη ενέργεια του σήματος να βρίσκεται στον θετικό άξονα του χρόνου. Σε μια τέτοια περίπτωση ίσως να μπορούμε να αμελήσουμε το μέρος του σήματος που είναι στον αρνητικό άξονα του χρόνου μιας και αυτό το μέρος δεν θα έχει πολύ μεγάλο πλάτος (ενέργεια). Καταρχήν, μια τέτοια μετακίνηση του σήματος στο χρόνο θα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας γραμμικής φάσης

στο φάσμα του φίλτρου. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα. 10, όπου το σήμα $g(t)$ έχει μετατοπιστεί δεξιά κατά $t = t_0$.

Αυτό σημαίνει ότι το σήμα που θα λάβουμε μετά το φιλτράρισμα θα περιέχει πέρα της δικής

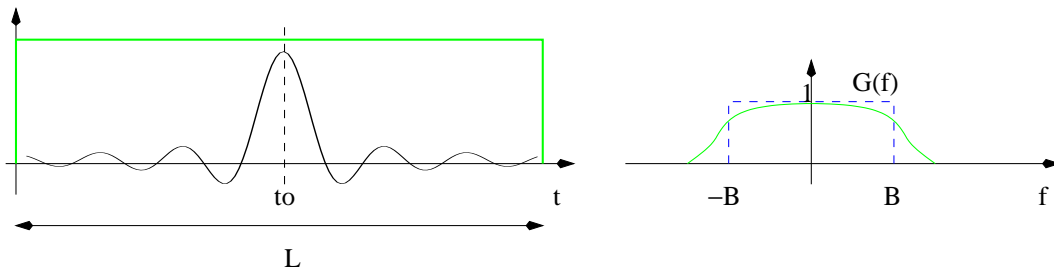


Σχήμα 10: Φίλτρο παραθύρου στη συχνότητα (αριστερά) και στο χρόνο (δεξιά) όταν το σήμα του φίλτρου μετατοπιστεί δεξιά στο χρόνο κατά $t = t_0$

του φάσης και μια πρόσθετη: την γραμμική φάση του φίλτρου. Ευτυχώς μια τέτοια φάση μπορεί εύκολα να αφαιρεθεί αν γνωρίζουμε την μετατόπιση t_0 . Από το Σχήμα. 10 παρατηρούμε επίσης ότι το φάσμα πλάτους του φίλτρου δεν αλλάζει (αναμενόμενον!!).

Παρόλα αυτά το φίλτρο και πάλι δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί αφού η διάρκειά του επεκτείνεται έως το άπειρο ($+\infty$). Για να μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τελικά το φίλτρο, θα πρέπει να το περιορίσουμε και στον θετικό άξονα του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με ένα παράθυρο π.χ. μήκους L . Αν το L είναι μικρό το σφάλμα στην πραγματοποίηση του φίλτρου θα είναι μεγάλο. Ομως τότε θα έχουμε ένα μικρού μήκους φίλτρο που είναι εύκολα πραγματοποιήσιμο και η συνέλιξη του σήματος με το φίλτρο θα υπολογίζεται γρήγορα. Αν αντίθετα το μήκος L το επιλέξουμε να είναι μεγάλο, τότε το σφάλμα στην πραγματοποίηση του φίλτρου θα είναι μικρό αλλά το φίλτρο θα είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί και θα είναι και χρονοβόρο στο να φιλτράρει ένα σήμα. Ο πολλαπλασιασμός του $g(t - t_0)$ με ένα παράθυρο μήκους L φαίνεται στο Σχήμα. 11. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι τώρα και το φάσμα πλάτους έχει αλλάξει. Το ιδεατό φάσμα πλάτους φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή ενώ το φίλτρο που θα προκύψει μετά τον πολλαπλασιασμό του $g(t - t_0)$ με το παράθυρο είναι με συνεχή γραμμή. Όταν μεγαλώσουμε το μήκος L τότε το φάσμα πλάτους θα πλησιάσει περισσότερο

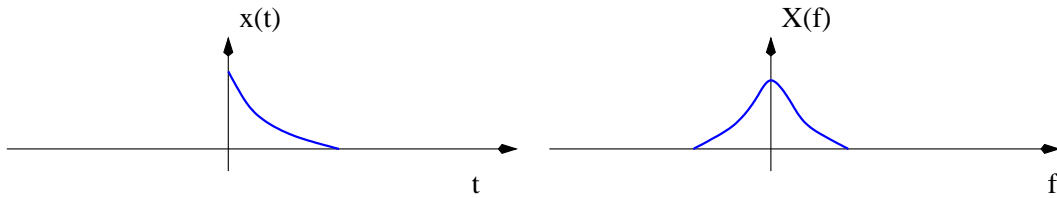
το φάσμα πλάτους του ιδεατού φίλτρου (αλλά με τα γνωστά προβλήματα).



Σχήμα 11: Ιδανικό (διακεκομμένη γραμμή) και πραγματοποιήσιμο (συνεχές γραμμή) φίλτρο παραθύρου.

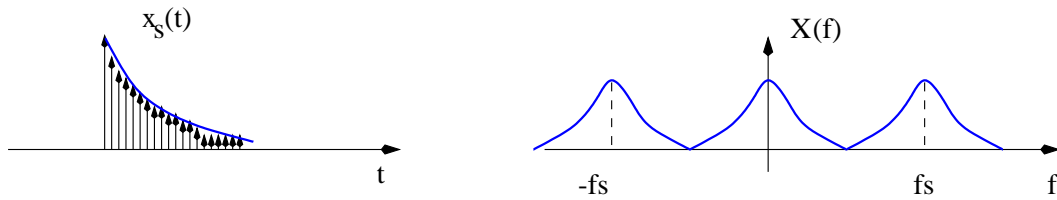
Δειγματοληψία και Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Ας θεωρήσουμε το αναλογικό σήμα $x(t)$ και τον Μ.Φ. του σήματος $X(f)$ όπως αυτά φαίνονται στο Σχήμα. 12. Αν και η μορφή αυτών των σημάτων μας είναι γνωστή (π.χ. το σήμα $x(t)$ είναι εκθετικής μορφής) δεν θα μας απασχολήσει εδώ η ακριβής μαθηματική τους έκφραση. Δεν θα μας είναι αναγκαία. Και πάλι εδώ για ευκολία στο σχεδιασμό του φάσματος συχνοτήτων θεωρούμε ότι $X(f)$ είναι ένα πραγματικό μέγεθος. Η δειγματοληψία του σήματος $x(t)$ με ρυθμό T_s



Σχήμα 12: Αριστερά το σήμα στο χρόνο και δεξιά ο Μ.Φ. του σήματος

γνωρίζουμε ότι έχει ως αποτέλεσμα την περιοδική επανάληψη του φάσματος του σήματος με περίοδο $f_s = 1/T_s$, όπως φαίνεται στο Σχήμα. 13. Όπως ήδη έχουμε δει η δειγματοληψία του



Σχήμα 13: Αριστερά το δειγματοληπτημένο σήμα στο χρόνο και δεξιά ο Μ.Φ. των δειγμάτων του σήματος

$x(t)$ περιγράφεται μαθηματικά (η επανάληψη ποτέ δεν έβλαψε) ως³:

$$\begin{aligned}
 x_s(t) &= x(t)\delta_{T_s}(t) \\
 &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Ο Μ.Φ. του σήματος $x_s(t)$ τότε είναι

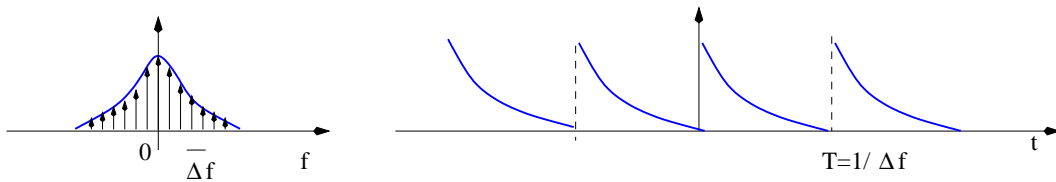
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-j2\pi fnT_s} \tag{8}$$

³Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή n για το χρόνο και τη μεταβλητή k για τη συχνότητα. Αντίθετα από αυτό που κάναμε στις διαλέξεις

όπου κάναμε χρήση της γνωστής αντιστοιχίας

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi ft_0}$$

Ωραία! τα παραπάνω είναι για τη δειγματοληψία στο χώρο του χρόνου και είναι ότι είδαμε στις προηγούμενες σελίδες. ΟΜΩΣ, εμείς έχουμε ξανασυναντήσει δειγματοληψία αλλά στη συχνότητα. Γνωρίζουμε ότι ένα διακριτό φάσμα συχνοτήτων αντιστοιχεί σε ένα περιοδικό σήμα στο χρόνο. Επομένως, η δειγματοληψία ενός συνεχούς φάσματος με ρυθμό $\Delta f = 1/T$ θα έχει ως αποτέλεσμα ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T όπως φαίνεται στο Σχήμα. 14. Η δειγματοληψία



Σχήμα 14: Δειγματοληψία στο χώρο της συχνότητας έχει ως αποτέλεσμα την περιοδικότητα του σήματος στο χρόνο.

στο χώρο της συχνότητας περιγράφεται από παρόμοιες εξισώσεις όπως η δειγματοληψία στο χώρο του χρόνου:

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f)\delta_{\Delta f}(f) \\ &= X(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k\Delta f) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta f)\delta(f - k\Delta f) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Ο αντίστροφος μετ. Fourier της $X(f)\delta_{\Delta f}(f)$ είναι ένα σήμα περιοδικό όπως βλέπουμε από το Σχήμα. 14:

$$\begin{aligned} X(f)\delta_{\Delta f}(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t, T) \star T\delta_T(t) &= x(t, T) \star T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= T \text{rep}_T\{x(t, T)\} \end{aligned} \quad (10)$$

όπου $x(t, T)$ συμβολίζει μία περίοδο του σήματος. Επομένως το περιοδικό σήμα $x_p(t)$ που λαμβάνουμε έχει τη μορφή:

$$x_p(t) = T \text{rep}_T\{x(t, T)\} \quad (11)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετ. Fourier στο δεύτερο μέλος της Εξ. 9 έχουμε μια δεύτερη μορφή για το ίδιο περιοδικό σήμα:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= F^{-1}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right)\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right)\exp(j2\pi\frac{k}{T}t) \end{aligned} \quad (12)$$

Από τις Εξ. 11 και 12 μπορούμε να βρούμε την έκφραση της μια περιόδου $x(t, T)$ του περιοδικού σήματος $x_p(t)$:

$$x(t, T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right)\exp(j2\pi\frac{k}{T}t) \quad (13)$$

Επομένως⁴ τώρα έχουμε ένα διακριτό φάσμα και ένα περιοδικό σήμα στο χρόνο (συνεχές ως προς το χρόνο, βλ. Σχήμα. 14). Πρίν είχαμε διακριτό σήμα και περιοδικό φάσμα συχνοτήτων (συνεχές ως προς τη συχνότητα, βλ.Σχήμα. 13) Τι θα γίνει αν το περιοδικό σήμα που είναι συνεχές στο χρόνο το δειγματοληπτήσουμε με ρυθμό T_s ; Καταρχήν τα δείγματα που θα έχουμε σε μία περίοδο T θα είναι

$$N = \frac{T}{T_s}$$

Αυτό επίσης που θα συμβεί θα είναι να δημιουργήσουμε ένα περιοδικό διακριτό φάσμα το οποίο θα περιγράφεται από την Εξ. 8 αν όπου f θέσουμε $f = k/T$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{k}{T}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-j2\pi\frac{k}{T}nT_s} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\exp(-j2\pi kn/N) \end{aligned} \quad (14)$$

Εδώ είναι μια ευκαιρία να συσχετίσουμε N δείγματα από το χώρο του χρόνου σε N δείγματα από το χώρο της συχνότητας. Πράγματι, θεωρώντας μονάχα μια περίοδο τόσο για το σήμα στο χρόνο δηλαδή $x(nT_s, T)$ όσο και στη συχνότητα, δηλαδή $X(\frac{k}{T}, f_s)$ η Εξ. 14 γράφεται ως

$$X\left(\frac{k}{T}, f_s\right) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x(nT_s, T)\exp(-j2\pi kn/N) \quad (15)$$

όπου n_0 είναι μια οποιαδήποτε σταθερά χρόνου η οποία μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε μια περίοδο δηλ. N δείγματα, αλλά απ'όπου θέλουμε εμείς να κάνουμε αρχή.

Από την Εξ. 13 μπορούμε να βρούμε μια αντίστοιχη σχέση για το $x(nT_s, T)$ αν θέσουμε όπου t ίσο με nT_s . Πράγματι

$$x(nT_s, T) = \frac{1}{NT_s} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} X\left(\frac{k}{T}, f_s\right)\exp(-j2\pi kn/N) \quad (16)$$

⁴αν σε αυτήν την παράγραφο μπερδευτείτε μην το βαζετε κάτω ... πρέπει να την καταλάβετε!!

που k_0 είναι και πάλι μια σταθερά που μας επιτρέπει την επιλογή της αρχής. Συνήθως στην πράξη χρησιμοποιούμε

$$\begin{aligned} n_0 &= 0 \\ k_0 &= -N/2 \end{aligned}$$

Αν κανονικοποιήσουμε τον άξονα του χρόνου θέτωντας $T_s = 1$ και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό

$$\begin{aligned} x(n) &\stackrel{def}{=} x(nT_s, T) \\ X(k) &\stackrel{def}{=} X(k/T, f_s) \\ W_N &\stackrel{def}{=} \exp(j2\pi/N) \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) W_N^{nk} \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \end{aligned} \quad (17)$$

Το ζεύγος σχέσεων στην Εξ. 17 ονομάζεται ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Fourier (Discrete Fourier Transform-DFT) και είναι και το οποίο είναι πραγματικά ένα σημαντικό ζευγάρι σχέσεων. Σχετίζονται N σημεία στο χρόνο με N σημεία στη συχνότητα.

Χρησιμοποιώντας συμμετρίες της συνάρτησης W_N , ο Cooley και ο Tukey δημοσίευσαν το 1965 ένα γρήγορο τρόπο υπολογισμού του DFT και τον ονόμασαν FFT⁵ δηλ. Fast Fourier Transform. Ο FFT είναι πραγματικά πολύ πιο γρήγορος από τον DFT. Χρησιμοποιώντας τον DFT, για ένα σήμα με N δείγματα χρειαζόμαστε N^2 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς για να υπολογίσουμε τα N δείγματα στη συχνότητα $X(k)$. Για τον FFT χρειαζόμαστε μόνο $N/2 \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Αν για παράδειγμα $N = 1024$ τότε για τον DFT θα χρειαζόμασταν 1 048 576 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς ενώ για τον FFT μόνο 5 120 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς!! Ε, υπάρχει κάποια μικρή διαφορά...

Όταν ο FFT δημοσιεύθηκε έκανε πολύ μεγάλη εντύπωση. Εσκασαν πολλοί από το κακό τους. Κάποιοι μάλιστα επιτήδειοι που ζήλεψαν απείρως τους δύο ερευνητές έβγαλαν στη φόρα ότι και ο Gauss είχε ανακαλύψει τον FFT ... τι να πεί κανείς γι' αυτήν την περίφημη επιστημονική κοινότητα που σφίζει από αγάπη!!!

⁵που OXI δεν σημαίνει Fast Food Towards

Παραδείγματα DFT

1. Να υπολογιστεί ο DFT του σήματος

$$x(n) = \delta(n)$$

όπου $\delta(n)$ ορίζεται ως

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Από τον ορισμό του DFT και τον ορισμό της $\delta(n)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{-nk} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\delta(n) \stackrel{DFT}{\leftrightarrow} 1$$

2. Να υπολογιστεί ο DFT του σήματος

$$x(n) = \exp(2\pi n_0 n/N)$$

σε N σημεία δηλ. $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n_0 n/N} e^{-j2\pi nk/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi/N(k-n_0)n} \\ &= 1 + e^{-j2\pi/N(k-n_0)} + e^{-j2\pi/N(k-n_0)2} + \dots + e^{-j2\pi/N(k-n_0)(N-1)} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi/N(k-n_0)N}}{1 - e^{-j2\pi/N(k-n_0)}} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi(k-n_0)}}{1 - e^{-j2\pi/N(k-n_0)}} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του k ο αριθμητής είναι μηδέν. Ομως για την περίπτωση που $k = n_0$ ΚΑΙ ο παρονομαστής είναι μηδέν. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν μπορούμε

να υπολογίσουμε τον DFT από την τελευταία σχέση αλλά από μια ενδιάμεση. Έτσι για $k = n_0$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi/N(k-n_0)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} 1 \\ &= N\delta[n - n_0] \end{aligned}$$

Επομένως για $k = 0, 1, \dots, N - 1$

$$e^{j2\pi n_0 n/N} \stackrel{DFT}{\longleftrightarrow} N \delta[k - n_0]$$

όπου σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\delta[k - n_0] = \begin{cases} 1 & k = n_0 \\ 0 & k \neq n_0 \end{cases}$$

3. Να υπολογιστεί ο DFT του σήματος

$$x(n) = \cos(2\pi n_0 n/N)$$

Από τη σχέση του Euler

$$x(n) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi n_0 n/N) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi n_0 n/N)$$

Έτσι από το προηγούμενο παράδειγμα (προφανώς ισχύει η γραμμική ιδιότητα και για τον DFT)

$$X(k) = \frac{1}{2} N \delta[k - n_0] + \frac{1}{2} N \delta[k + n_0]$$