Παράρτημα Α΄

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Ίσως αυτό το κεφάλαιο να έπρεπε να είναι το πρώτο, αλλά τα θέματα που συζητούνται σε αυτό το κεφάλαιο δεν ειναι εντελώς καινούρια για το φοιτητη. Έχετε ηδη μελετήσει πολλά από αυτά τα θέματα σε προηγούμενα μαθήματα ή θα έπρεπε (κάποια) να τα γνωρίζετε από την προπανεπιστημιακή σας εκπαίδευση. Παρ΄ όλα αυτα, αυτό το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο αξίζει μιας ανακεφαλαίωσης επειδή είναι τοσο κυρίαρχο στον τομέα της επεξεργασίας σήματος. Η απόδοση λίγου χρονου σε μια τετοια σύνοψη θα σας ωφελήσει τα μάλα :-) αργότερα. Επιπλέον, το υλικό αυτό είναι χρήσιμο όχι μόνο γι΄ αυτό το μάθημα αλλά και για άλλα που θα ακολουθήσουν. Επίσης, μπορει να χρησιμοποιηθεί και ως υλικό αναφορας για τη μελλοντική επαγγελματική σας καριέρα.

Α΄.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Οι *μιγαδικοί αριθμοί* είναι απλά μια προέκταση των συνηθισμένων αριθμών και είναι κομμάτι του σύγχρονου αριθμητικού συστήματος. Οι μιγαδικοί αριθμοί, ιδιαίτερα οι *φανταστικοί αριθμοί*, ακούγονται εξωτικοί, μυστήριοι, ψεύτικοι, και ίσως 'άχρηστοι'. Αυτές οι απόψεις κυρίως προέρχονται από την καινοτομία που έφεραν, και από το γεγονός οτι δεν ειμαστε από μικροί εξοικειωμένοι μαζι τους, παρά από την υποτιθέμενη 'μη ύπαρξή' τους. Οι μαθηματικοί τους αποκάλεσαν αφελώς 'φανταστικούσ', μια ονομασία που αμεσα προκαταλαμβάνει την αντίληψη. Αν αυτοί οι αριθμοί ειχαν ονομαστεί διαφορετικά, θα είχαν απομυθοποιηθεί πολύ καιρό πριν, όπως οι άρρητοι αριθμοί ή οι αρνητικοί αριθμοί.

Πολλές μάταιες προσπάθειες έχουν γίνει για να δωθεί ένα φυσικό νόημα στους μιγαδικούς αριθμούς. Όμως, αν το σκεφτεί κανείς, αυτή η προσπάθεια είναι μη αναγκαία. Στα μαθηματικά, μπορούμε να δώσουμε σε σύμβολα η πράξεις οποιο νόημα επιθυμούμε, αρκεί να τηρούμε μια εσωτερική συνέπεια. Μια πιο υγιής προσέγγιση θα ήταν να ορίσουμε ένα συμβολο i (με όποια άλλη σημασία πλην του 'φανταστικού'), που έχει την ιδιότητα $i^2 = -1$. Η ιστορία των μαθηματικών βρίθει περιπτώσεων που ολόκληρες οντότητες βρίσκονταν σε απέχθεια, ώσπου η εξοικείωση μαζι τους τις έκανε αποδεκτές. Όπως για παράδειγμα, οι αρνητικοί αριθμοί: η αποδοχή των αρνητικών αριθμών έκανε εφικτή τη λύση εξισώσεων όπως η $x + 5 = 0$, που ως τότε δεν ειχε λύση. Έτσι, το αριθμητικό σύστημα γενικεύθηκε ώστε να περιλαμβάνει και τους αρνητικούς αριθμούς. Όμως, εξισώσεις της μορφής $x^2 + 1 = 0 \leftrightarrow x^2 = -1$ εξακολουθούσαν να μην έχουν λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Έτσι, ήταν αναγκαιο να οριστεί ένα νέο ειδος αριθμού, του οποίο του τετράγωνο να είναι ίσο με -1.

Τον καιρό του Καρτέσιου και του Νεύτωνα[1], οι φανταστικοί αριθμοί έγιναν τμήμα του αριθμητικού συστήμα-

[1] Οι άνθρωποι φυσικά λέγονταν Descartes και Newton, και ποτέ δεν κατάλαβα γιατί τους 'ελληνοποιήσαμε' με αυτά τα περίεργα ονόματα... τέλοσπάντων...

τος, αλλά ακόμη θεωρούνταν ως αλγεβρικό 'κατασκεύασμα'. Ο Ελβετός μαθηματικός Leonard Euler[2] εισήγαγε τη σημειογραφία i (απ′ τη λέξη imaginary), το 1777. Οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί χρησιμοποιούν το j αντί του i, για να μην υπάρχει συγχυση με το i που γι′ αυτούς συμβολίζει την ηλεκτρική ένταση. Έτσι

$$j^2 = -1 \tag{A′.1}$$

και

$$\sqrt{-1} = \pm j \tag{A′.2}$$

Ενάντια στην κοινή αντίληψη, δεν ήταν η λύση της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$ που έκανε τους φανταστικούς αριθμούς αποδεκτούς από τους τοτε μαθηματικούς. Θα μπορούσαν να απορρίψουν το $\sqrt{-1}$ ως ανοησία όταν εμφανίστηκε ως λύση της $x^2 + 1 = 0$, απλώς επειδη η εξίσωση δεν έχει πραγματική λύση. Όμως, το 1545, ο G. Cardano δημοσίευσε την Ars Magna - The Great Art, που θεωρείται η πιο σημαντική αλγεβρική εργασία της Αναγέννησης. Σε αυτό το βιβλίο, έδωσε μια μέθοδο για τη λύση της γενικής κυβικής εξίσωσης, στην οποία σε ενα ενδιάμεσο βήμα, εμφανιζόταν ένας αρνητικός αριθμός σε ρίζα. Σύμφωνα με τη μέθοδο του, η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{A′.3}$$

δίνεται από

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \tag{A′.4}$$

Για παραδειγμα, για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης $x^3 + 6x - 20 = 0$, θέτουμε $a = 6, b = -20$ και έχουμε

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}} = \sqrt[3]{20.392} = \sqrt[3]{0.392} = 2 \tag{A′.5}$$

Όταν όμως ο Cardano προσπάθησε να λύσει την εξίσωση

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \tag{A′.6}$$

με τη μέθοδό του, η λύση του ήταν

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \tag{A′.7}$$

Ήττα! :-) Τι θα κάνατε στη θέση του αν ήσασταν στο 1545; Εκείνες τις μέρες, ακόμα και οι αρνητικοί αριθμοί αντιμετωπίζονταν με καχυποψία, πόσο μάλλον μια τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού! :-) Βέβαια, σήμερα ξέρουμε ότι

$$(2 \pm j)^3 = 2 \pm j11 = 2 \pm \sqrt{-121} \tag{A′.8}$$

Έτσι, η μέθοδος του Cardano δίνει

$$x = (2 + j) + (2 - j) = 4 \tag{A′.9}$$

Ο Cardano προσπάθησε με μισή καρδιά :-) να εξηγήσει την παρουσία του $\sqrt{-121}$ αλλά τελικά απέρριψε το όλο εγχείρημα ως ''τόσο λεπτό όσο και άχρηστο''.

Άλλοι μαθηματικοί, οπως ο R. Bombelli και ο K. F. Gauss (ο οποίος και απέδειξε το Θεμελιώδες Θεώρημα

[2]Αυτός πως μας ξέφυγε και δεν τον κάναμε Οϊλερίδη ή Οϊλεράκη :-P

της Άλγεβρας – ότι δηλαδή κάθε εξίσωση n τάξης έχει ακριβώς n λύσεις) έπεισαν τη μαθηματική κοινότητα ότι οι μιγαδικοί αριθμοί (όρο που εισήγαγε ο Gauss) έχουν σημασία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Φυσικά, κάθε προβλημα του πραγματικού κόσμου πρέπει να ξεκινά με πραγματικούς αριθμούς και να τελειώνει με πραγματικούς αριθμούς. Όμως, η πορεία της λύσης μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά με τη χρήση των μιγαδικών αριθμών ως ενδιάμεσο βήμα. Ασφαλώς, μπορεί κανείς να λύσει όλα τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου με άλλες μεθόδους, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά πραγματικούς αριθμούς, αλλά μια τέτοια διαδικασία θα αύξανε τον κόπο του χωρίς να είναι πραγματικά απαραίτητο - γι′ αυτό και μας απασχολούν, γιατί μας <u>διευκολύνουν</u> :-) .

Α′.2 Άλγεβρα Μιγαδικών Αριθμών

Ένας μιγαδικός αριθμός (a, b) ή $a + jb$, μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά με ενα σημείο του οποίου οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι (a, b) στο μιγαδικό επίπεδο. Συμβολίζουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με το σύμβολο z, έτσι ώστε $z = a + jb$. Οι αριθμοί a και b, η τετμημένη και η τεταγμένη αντίστοιχα, ονομάζονται *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος, αντίστοιχα, του z. Επίσης, συνήθως συμβολίζονται ως

$$\Re\{z\} = a, \quad \Im\{z\} = b \tag{Α′.10}$$

Προσέξτε οτι στο μιγαδικό επίπεδο όλοι οι πραγματικοί αριθμοί βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, ενώ ολοι οι φανταστικοί βρίσκονται στον κατακόρυφο άξονα.

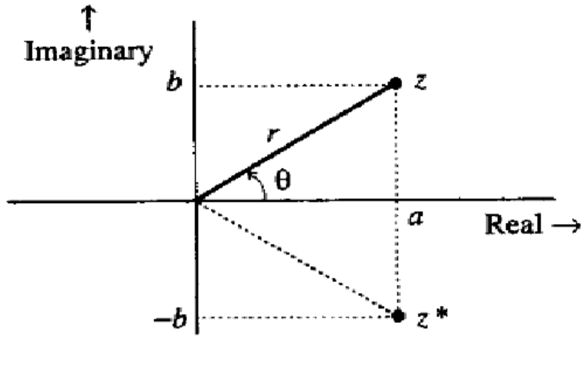
Μια ΠΟΛΥ χρήσιμη αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών είναι η *πολική μορφή*. Αν (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου $z = a + jb$, τότε

$$a = r\cos(\theta), \quad b = r\sin(\theta) \tag{Α′.11}$$

και

$$z = a + jb = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + j\sin(\theta)) \tag{Α′.12}$$

όπως στο σχήμα Α′.1



Σχήμα Α′.1: Αναπαράσταση αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο

Α'.2.1 Ο τύπος του Euler

Η περίφημη **σχέση του Euler**, που θα μας απασχολήσει ΠΟΛΥ στο μάθημα, ορίζεται ως

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{Α'.13}$$

Η τρομερά χρήσιμη, όσο και περίεργη – σε πρώτη ανάγνωση – σχέση αποδεικνύεται αν αναπτύξουμε τους όρους της με σειρές Maclaurin:

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \cdots && \text{(Α'.14)} \\ &= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots && \text{(Α'.15)} \\ \cos(\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots && \text{(Α'.16)} \\ \sin(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots && \text{(Α'.17)} \end{aligned}$$

Έτσι, εύκολα βλέπουμε οτι

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{Α'.18}$$

και από την προηγούμενη παράγραφο, μπορουμε να γράψουμε ότι

$$z = a + jb = re^{j\theta} \tag{Α'.19}$$

Έτσι, βλέπουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί σε καρτεσιανή μορφη, $a + jb$, ή σε πολική μορφή, $re^{j\theta}$, με

$$a = r\cos(\theta), \quad b = r\sin(\theta) \tag{Α'.20}$$

και

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{Α'.21}$$

Παρατηρήστε ότι το r είναι η απόσταση του σημείου z από την αρχή των αξόνων. Γι' αυτό το λόγο, το r επίσης λέγεται *απόλυτη τιμή* ή *μέγεθος* του μιγαδικού αριθμού z, και συμβολίζεται με $r = |z|$. Όμοια, το θ λέγεται *γωνία* ή *φάση* του z και συμβολίζεται με $\angle z$. Έτσι

$$|z| = r, \quad \angle z = \theta \tag{Α'.22}$$

και έτσι

$$z = |z|e^{j\angle z} \tag{Α'.23}$$

Επίσης

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta} = \frac{1}{|z|}e^{-j\angle z} \tag{Α'.24}$$

Συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού

Ορίζουμε ως z^* το *συζυγή* του $z = a + jb$ ως

$$z^* = a - jb = re^{-j\theta} = |z|e^{-j\angle z} \tag{Α'.25}$$

Η σχέση μεταξύ ενός μιγαδικού z και του συζυγούς του, z^*, φαίνεται στο σχήμα Α′.1. Παρατηρήστε ότι ο z^* είναι απλά η εικόνα του z με βάση τον οριζόντιο αξονα. Έτσι, *για να βρούμε το συζυγή ενός οποιουδήποτε μιγαδικού, απλά πρέπει να αντικαταστήσουμε το j με το $-j$ – που ισοδυναμεί με αλλαγή του προσήμου της φάσης του.* Πολύ χρησιμες ιδιότητες υπάρχουν μεταξύ του αθροίσματος ενός μιγαδικού και του συζυγούς του, καθώς και το γινόμενό τους:

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\Re\{z\} \quad (\text{Α}'.26)$$

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2 = r^2 \quad (\text{Α}'.27)$$

Α′.2.2 Κατανόηση μερικών χρήσιμων ιδιοτήτων

Στο μιγαδικό επίπεδο, το $re^{j\theta}$ αναπαριστα ένα σημείο σε απόσταση r από το κέντρο των αξόνων και υπό γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα. Για παραδειγμα, ο αριθμός -1 είναι σε μοναδιαία απόσταση από την αρχη των αξόνων και έχει γωνία π ή pi (για την ακρίβεια, έχει γωνία κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του $\pm\pi$). Έτσι

$$1e^{j\pm\pi} = -1 \quad (\text{Α}'.28)$$

Γενικότερα,

$$e^{\pm jn\pi} = -1, \;\; n \text{ περιττος ακέραιος} \quad (\text{Α}'.29)$$

Ο αριθμός 1 απ′ την άλλη μεριά, βρίσκεται επίσης σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων, αλλά υπό γωνία 2π (για την ακρίβεια, υπό γωνία $\pm 2n\pi$, για κάθε ακέραιο n). Έτσι,

$$e^{\pm j2n\pi} = 1, \;\; n \text{ ακέραιος} \quad (\text{Α}'.30)$$

Ο αριθμός j είναι σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων και υπό γωνία $\pi/2$. Έτσι,

$$e^{j\pi/2} = j \quad (\text{Α}'.31)$$

Όμοια

$$e^{-j\pi/2} = -j \quad (\text{Α}'.32)$$

και άρα

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j \quad (\text{Α}'.33)$$

Για την ακρίβεια,

$$e^{\pm jn\pi/2} = \pm j, \;\; n = 1, 5, 9, 13, \cdots \quad (\text{Α}'.34)$$

και

$$e^{\pm jn\pi/2} = \mp j, \;\; n = 3, 7, 11, 15, \cdots \quad (\text{Α}'.35)$$

Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στον Πίνακα Α′.1.

Πίνακας Χρήσιμων τιμών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων		
r	θ	$re^{j\theta}$
1	0	$e^{j0} = 1$
1	$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
1	$\pm n\pi$	$e^{\pm jn\pi} = -1$, n περιττός
1	$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
1	$\pm 2n\pi$	$e^{\pm j2n\pi} = 1$, n ακέραιος
1	$\pm\pi/2$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$
1	$\pm n\pi/2$	$e^{\pm jn\pi/2} = \pm j,\ n = 1, 5, 9, 13, \cdots$
1	$\pm n\pi/2$	$e^{\pm jn\pi/2} = \mp j,\ n = 3, 7, 11, 15, \cdots$

Πίνακας Α΄.1: Πίνακας Χρήσιμων τιμών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων

Α΄.2.3 Αριθμητικές Πράξεις, Δυνάμεις, και Ρίζες Μιγαδικών Αριθμών

Για να κάνουμε πρόσθεση και αφαιρεση με μιγαδικούς αριθμούς, οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι σε καρτεσιανή μορφή. Έτσι, αν

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + j4 = 5e^{j53.1^o} \\ z_2 &= 2 + j3 = \sqrt{13}e^{j56.3^o} \end{aligned}$$

θα έχουμε

$$z_1 + z_2 = (3 + j4) + (2 + j3) = 5 + j7 \tag{Α΄.36}$$

Αν οι αριθμοί μας δίνονταν στην πολική τους μορφή, θα έπρεπε να κάνουμε τη μετατροπή σε καρτεσιανή για να κάνουμε τις πράξεις (πρόσθεση ή αφαιρεση). Σε περίπτωση όμως πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης, η πράξη μπορει να γίνει και με τις δυο μορφές, με πολύ βολικότερη την πολική. Δείτε:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} \tag{Α΄.37}$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)} \tag{Α΄.38}$$

Επιπλέον,

$$z^n = (re^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta} \tag{Α΄.39}$$

και

$$z^{1/n} = (re^{j\theta})^{1/n} = r^{1/n} e^{j\theta/n} \tag{Α΄.40}$$

Τα παραπάνω δειχνουν ότι ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, οι δυνάμεις και οι ρίζες, μπορούν να υπολογιστούν με καταπληκτική ευκολία όταν οι αριθμοί είναι σε πολική μορφη. Αν δεν το πιστεύετε, απλά δοκιμάστε να κάνετε τις πράξεις σε καρτεσιανή μορφή. :-)

Α΄.3 Ημίτονα

Θεωρηστε το ημίτονο

$$f(t) = C\cos(2\pi f_0 t + \theta) \tag{Α΄.41}$$

Γνωριζουμε ότι

$$\cos(\phi) = \cos(\phi + 2\pi n), \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{Α′.42}$$

Έτσι, το $\cos(\phi)$ επαναλαμβάνεται για κάθε αλλαγή μεγέθους 2π στη γωνία ϕ. Για το παραπάνω ημίτονο, η γωνία $2\pi f_0 t + \theta$ αλλάζει κατά 2π όταν το t αλλάζει κατά $1/f_0$. Ξεκάθαρα, το ημίτονο επαναλαμβάνεται κάθε $1/f_0$ δευτερόλεπτα. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε f_0 επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο. Αυτός ο αριθμός λέγεται **συχνότητα** του ημιτόνου, μετριέται σε Herz - Hz, και το διάστημα επανάληψης T_0 δίνεται από τη σχέση

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \tag{Α′.43}$$

και λέγεται **περίοδος**, και μετριέται σε δευτερόλεπτα (seconds). Επίσης, η ποσότητα C λέγεται πλάτος, και η θ λέγεται φάση[3]. Ας θεωρησουμε δυο ειδικές περιπτώσεις ημιτόνων με $\theta = 0$ και $\theta = \pi/2$, όπως παρακάτω:

1. $f(t) = C\cos(2\pi f_0 t)$
2. $f(t) = C\cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = C\sin(2\pi f_0 t)$

Η γωνία (ή φάση) μπορει να εκφραστεί σε μοίρες ή σε ακτίνια (radians). Στα πλαίσια του μαθήματος, προτιμούμε την έκφραση σε ακτίνια. Επίσης, συχνά στη βιβλιογραφία χρησιμοποιειται η μεταβλητή ω_0 (γωνιακή συχνότητα, μετριέται σε rad/sec) για να εκφράσει την ποσότητα $2\pi f_0$:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{Α′.44}$$

Με αυτό το συμβολισμό, θα έχουμε

$$f(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{Α′.45}$$

και η περίοδος του ημιτόνου δινεται από τη σχέση

$$T_0 = \frac{1}{\omega_0/2\pi} = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{Α′.46}$$

και άρα

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{Α′.47}$$

Στις σημειώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τη συχνότητα f_0 σε Hz. Φυσικά μπορειτε να υιοθετήσετε οποια μορφή θέλετε, αρκεί να είστε συνεπείς. :-)

Πρόσθεση ημιτόνων

Δυο ημίτονα που έχουν την ίδια συχνότητα αλλά διαφορετικές φάσεις προστίθενται και δημιουργούν ένα ημίτονο ίδιας συχνότητας. Ας το δείξουμε:

$$\begin{aligned} C\cos(2\pi f_0 t + \theta) &= C\cos(\theta)\cos(2\pi f_0 t) - C\sin(\theta)\sin(2\pi f_0 t) \\ &= a\cos(2\pi f_0 t) + b\sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \tag{Α′.48}$$

με

$$a = C\cos(\theta), \quad b = -C\sin(\theta) \tag{Α′.49}$$

[3]Πολλές φορές στη βιβλιογραφία, υπάρχει σύγχυση όσον αφορά τη φάση, γιατι μερικές φορές αναφέρουμε ως φάση το συνολικό όρισμα του ημιτόνου, δηλ. το $2\pi f_0 t + \theta$, και ως θ αναφέρουμε τη *φάση μετατόπισης*. Από δω και στο εξής όταν αναφέρουμε τη φάση, θα μιλάμε πάντα για τη φάση μετατόπισης θ.

Έτσι,

$$C = \sqrt{a^2+b^2} \quad (\text{A}'.50)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right) \quad (\text{A}'.51)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν οτι το C και το θ αποτελούν το μέτρο και τη φάση, αντίστοιχα, του μιγαδικού αριθμού $a-jb$. Με άλλα λόγια, $a-jb = Ce^{j\theta}$. Άρα, για να βρούμε τα C,θ, μετατρεπουμε το $a-jb$ σε πολική μορφή, και το πλάτος και η φάση της πολικής μορφής είναι το C και το θ αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας,

$$a\cos(2\pi f_0 t) + b\sin(2\pi f_0 t) = C\cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (\text{A}'.52)$$

με C και θ που δίνονται όπως παραπάνω. Προσέξτε ομως! Ο υπολογισμός της θ θέλει μια ιδιαίτερη προσοχή. Γιατί; Θυμηθείτε οτι για έναν μιγαδικό $z = a+jb$, η φάση του, θ, δίνεται από τη σχέση

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\Im\{z\}}{\Re\{z\}}\right) \quad (\text{A}'.53)$$

αφού

$$a = \Re\{z\}, \quad b = \Im\{z\} \quad (\text{A}'.54)$$

Προφανώς το πρόσημο των a, b υποδηλώνει και σε ποιό τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου βρίσκεται ο μιγαδικός αριθμός. Ένας μιγαδικός z_1 με $\Re\{z_1\} = 1/2, \Im\{z_1\} = 1/2$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, ενώ ένας αλλος, z_2, με $\Re\{z_2\} = -1/2, \Im\{z_2\} = -1/2$ βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι αυτοί οι αριθμοί ανήκουν στην ευθεία $y = x$, άρα τέμνουν τα τεταρτημόρια στη μέση, οπότε η φάση τους θα είναι $\theta_1 = \pi/4$ για τον z_1, ενώ η φάση του z_2 θα είναι $\theta_2 = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Όλα αυτά, με εποπτικό τρόπο, εκμεταλλευόμενοι την ''ιδιαίτερη'' επιλογή των μιγαδικών αριθμών που έχουμε, και τις ελάχιστες γνώσεις τριγωνομετρίας. Ας πάμε τώρα να υπολογίσουμε τη γωνία θ με τον τύπο που γνωρίσαμε παραπάνω:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{1/2}{1/2} = \tan^{-1}(1) = \pi/4 \quad (\text{A}'.55)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{-1/2}{-1/2} = \tan^{-1}(1) = \theta_1!!! \quad (\text{A}'.56)$$

που είναι προφανώς λάθος. Για τον παραπάνω λόγο, πρέπει πάντα να σημειώνουμε το τεταρτημόριο που ανήκει ο μιγαδικός αριθμός, ωστε να προσαρμόζουμε καταλληλα τους υπολογισμούς μας. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα:

Στις παρακάτω περιπτώσεις, εκφράστε το $f(t)$, ως συνάρτηση ενός μόνο συνημιτόνου.

1. $f(t) = \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{3}\sin(2\pi f_0 t)$
2. $f(t) = -3\cos(2\pi f_0 t) + 4\sin(2\pi f_0 t)$

1. Σε αυτήν την περίπτωση, $a = 1, b = \sqrt{3}$, και από τις σχέσεις που είδαμε μόλις πιο πάνω, θα ειναι:

$$C = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}, \ \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \pi/3 \quad (\text{A}'.57)$$

Έτσι θα ειναι

$$f(t) = 2\cos(2\pi f_0 t + \pi/3) \tag{Α′.58}$$

2. Σε αυτήν την περίπτωση, $a = -3, b = 4$, και τότε

$$C = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \tag{Α′.59}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{-3} = -127^o \tag{Α′.60}$$

Παρατηρήστε οτι $\tan^{-1}\frac{-4}{-3} \neq \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.1^o$. Έτσι

$$f(t) = 5\cos(2\pi f_0 t - 127^o) \tag{Α′.61}$$

Ημίτονα σε μορφή εκθετικών

Τα ημίτονα μπορούν να εκφραστούν με όρους εκθετικών με χρήση των τύπων του Euler:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \tag{Α′.62}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \tag{Α′.63}$$

Αντίστροφα, αυτές οι εξισώσεις γίνονται:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{Α′.64}$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta) \tag{Α′.65}$$

Α′.4 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Σε αυτήν την παράγραφο, θα δούμε μερικά πράγματα σχετικά με την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα (Partial Fraction Expansion - PFE), που μας είναι χρήσιμη στο μετασχ. Laplace, αλλά και στη μελέτη σημάτων και συστημάτων γενικότερα. Όπως λέει και το όνομά της, η PFE διασπά μια ρητή συνάρτηση, με συνήθως υψηλής τάξης πολυώνυμα στον αριθμητή και στον παρονομαστή, σε απλά κλάσματα, με πολυώνυμα μικρής τάξης (1 ή 2) στον παρονομαστή.

Η μέθοδος που ακολουθούμε για την PFE είναι πολύ απλή, και απλά χρειάζεται τριβή για να τη συνηθίσετε. Υπάρχουν δυο συνήθεις περιπτώσεις PFE που συναντάμε στην Επεξεργ. Σήματος σχετικά με τη ρητή συνάρτηση που θέλουμε να απλουστεύσουμε.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται ΜΟΝΟΝ όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη της τάξης του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε PFE.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1. Ο παρονομαστής έχει απλές ρίζες

2. Ο παρονομαστής έχει μια ή περισσότερες ρίζες πολλαπλότητας r

A′.4.1 Απλές ρίζες

Θεωρούμε πρώτα την πιο απλή περίπτωση, όπου η συνάρτησή μας

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{A′.66}$$

έχει απλές ρίζες στον παρονομαστή της, $Q(x)$. Θεωρήστε το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}, \quad m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)} \end{aligned} \tag{A′.67}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = \frac{k_1}{x-\rho_1} + \frac{k_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-\rho_n} \tag{A′.68}$$

Για να βρούμε τον συντελεστή k_i, πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές της παραπάνω σχέσης με $(x-\rho_1)$, και έπειτα θέτουμε $x = \rho_1$. Άρα

$$(x-\rho_1)F(x)\Big|_{x=\rho_1} = \Big[k_1 + \frac{k_2(x-\rho_1)}{x-\rho_2} + \frac{k_3(x-\rho_3)}{x-\rho_3} + \cdots + \frac{k_n(x-\rho_1)}{x-\rho_n}\Big]\Big|_{x=\rho_1} \tag{A′.69}$$

Όλοι οι όροι στη δεξιά πλευρά απαλείφονται, εκτός του k_1. Άρα καταλήγουμε στο

$$k_1 = (x-\rho_1)F(x)\Big|_{x=\rho_1} \tag{A′.70}$$

Παρόμοια, καταλήγουμε ότι

$$k_i = (x-\rho_i)F(x)\Big|_{x=\rho_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{A′.71}$$

Η παραπάνω διαδικασία δουλεύει ανεξάρτητα αν οι ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές.

A′.4.2 Ρίζες πολλαπλότητας r

Αν η συνάρτηση $F(x)$ έχει πολλαπλή ρίζα, με πολλαπλότητα r, στον παρονομαστή, τότε θα είναι της μορφής

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-\lambda)^r(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_j)} \tag{A′.72}$$

Το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για αυτή τη συνάρτηση δίνεται ως

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{d_0}{(x-\lambda)^r} + \frac{d_1}{(x-\lambda)^{r-1}} + \cdots + \frac{d_{r-1}}{(x-\lambda)} \\ &+ \frac{k_1}{x-\rho_1} + \frac{k_2}{x-\rho_2} + \cdots + \frac{k_j}{x-\rho_j} \end{aligned} \tag{A′.73}$$

Οι συντελεστές k_i αντιστοιχούν στις ρίζες χωρίς πολλαπλότητα και υπολογίζονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για να βρούμε τους συντελεστές $d_0, \cdots, d_{r-1}$, πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με

$(x-\lambda)^r$:

$$(x-\lambda)^r F(x) = d_0 + d_1(x-\lambda) + d_2(x-\lambda)^2 + \cdots + d_{r-1}(x-\lambda)^{r-1} + \\ + k_1\frac{(x-\lambda)^r}{x-\rho_1} + k_2\frac{(x-\lambda)^r}{x-\rho_2} + \cdots + k_n\frac{(x-\lambda)^r}{x-\rho_n} \quad (\text{A}'.74)$$

Θέτοντας $x=\lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$(x-\lambda)^r F(x)\Big|_{x=\lambda} = d_0 \quad (\text{A}'.75)$$

Άρα το d_0 υπολογίζεται ‘‘κρύβοντας ’’ τον όρο $(x-\lambda)^r$ στην $F(x)$, και θέτοντας $x=\lambda$ στη σχέση που απομένει. Αν παραγωγίσουμε τη σχέση Α′.74 ως προς x, το δεξιό μέλος καταλήγει στο d_1+ όροι που περιέχουν το $(x-\lambda)$ στους αριθμητές. Θέτοντας $x=\lambda$ και στα δυο μέλη, έχουμε

$$\frac{d}{dx}\Big[(x-\lambda)^r F(x)\Big]\Big|_{x=\lambda} = d_1 \quad (\text{A}'.76)$$

Άρα, το d_1 υπολογίζεται ‘‘κρύβοντας ’’ τον όρο $(x-\lambda)^r$ από τον όρο $F(x)$, παραγωγίζοντας την υπόλοιπη έκφραση ως προς x και μετά θέτοντας $x=\lambda$. Συνεχίζοντας κατ΄ αυτόν τον τρόπο, έχουμε ότι

$$d_j = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dx^j}[(x-\lambda)^r F(x)]\Big|_{x=\lambda} \quad (\text{A}'.77)$$

Άρα ο συντελεστής d_j υπολογίζεται ‘‘κρύβοντας ’’ τον όρο $(x-\lambda)^r$ στο $F(x)$, υπολογίζοντας μετά την $j-$οστή παράγωγο την έκφρασης που απομένει, διαιρώντας με $j!$, και τέλος θέτοντας $x=\lambda$.

Α′.5 Χρήσιμο Τυπολόγιο

Α′.5.1 Κανόνας του De L' Hospital

Αν $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι απροσδιόριστης μορφης $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$, τότε

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{Α′.78}$$

Α′.5.2 Σειρές Taylor - Maclaurin

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \tag{Α′.79}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots \tag{Α′.80}$$

Α′.5.3 Δυναμοσειρές

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{Α′.81}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{Α′.82}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \tag{Α′.83}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots,\ x^2 < \pi^2/4 \tag{Α′.84}$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots,\ x^2 < \pi^2/4 \tag{Α′.85}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + x^n \tag{Α′.86}$$

$$\approx 1 + nx,\ |x| \ll 1 \tag{Α′.87}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,\ |x| < 1 \tag{Α′.88}$$

Α′.5.4 Μιγαδικοί Αριθμοί

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j \tag{Α′.89}$$

$$e^{\pm jn\pi} = (-1)^n \tag{Α′.90}$$

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j\sin(\theta) \tag{Α′.91}$$

$$a + jb = re^{j\theta},\ r = \sqrt{a^2+b^2},\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{Α′.92}$$

$$(re^{j\theta})^k = r^k e^{jk\theta} \tag{Α′.93}$$

$$(r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} \tag{Α′.94}$$

Α′.5.5 Παραγώγιση

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x)) \tag{Α′.95}$$

$$(fg(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{Α′.96}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \tag{Α′.97}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{Α′.98}$$

$$(\ln(ax))' = \frac{a}{x} \tag{Α′.99}$$

$$(\log(ax))' = \frac{a\log(e)}{x} \tag{Α′.100}$$

$$(e^{bx})' = be^{bx} \tag{Α′.101}$$

$$(a^{bx})' = b(\ln a)a^{bx} \tag{Α′.102}$$

$$(\sin(ax))' = a\cos(ax) \tag{Α′.103}$$

$$(\cos(ax))' = -a\sin(ax) \tag{Α′.104}$$

$$(\tan(ax))' = \frac{a}{\cos^2(ax)} \tag{Α′.105}$$

$$(\sin^{-1}(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} \tag{Α′.106}$$

$$(\cos^{-1}(ax))' = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} \tag{Α′.107}$$

$$(\tan^{-1}(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}} \tag{Α′.108}$$

Α΄.5.6 Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$
\begin{aligned}
e^{\pm jx} &= \cos(x) \pm j\sin(x) && \text{(A}'\text{.109)}\\
\cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) && \text{(A}'\text{.110)}\\
\sin(x) &= \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) && \text{(A}'\text{.111)}\\
\cos(x \pm \pi/2) &= \mp \sin(x) && \text{(A}'\text{.112)}\\
\sin(x \pm \pi/2) &= \pm \cos(x) && \text{(A}'\text{.113)}\\
2\sin(x)\cos(x) &= \sin(2x) && \text{(A}'\text{.114)}\\
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 && \text{(A}'\text{.115)}\\
\cos^2(x) - \sin^2(x) &= \cos(2x) && \text{(A}'\text{.116)}\\
\cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) && \text{(A}'\text{.117)}\\
\sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) && \text{(A}'\text{.118)}\\
\cos^3(x) &= \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x)) && \text{(A}'\text{.119)}\\
\sin^3(x) &= \frac{1}{4}(3\sin(x) - \sin(3x)) && \text{(A}'\text{.120)}\\
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) && \text{(A}'\text{.121)}\\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) && \text{(A}'\text{.122)}\\
\tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} && \text{(A}'\text{.123)}\\
\sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) && \text{(A}'\text{.124)}\\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) && \text{(A}'\text{.125)}\\
\sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) && \text{(A}'\text{.126)}\\
a\cos(x) + b\sin(x) &= C\cos(x+\theta),\ \ C = \sqrt{a^2+b^2},\ \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right) && \text{(A}'\text{.127)}
\end{aligned}
$$

Α′.5.7 Αόριστα Ολοκληρώματα

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (\text{A}'.128)$$

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) \quad (\text{A}'.129)$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax) \quad (\text{A}'.130)$$

$$\int \sin^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} \quad (\text{A}'.131)$$

$$\int \cos^2(ax)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} \quad (\text{A}'.132)$$

$$\int x\sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax\cos(ax)) \quad (\text{A}'.133)$$

$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax\sin(ax)) \quad (\text{A}'.134)$$

$$\int x^2\sin(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin(ax) + 2\cos(ax) - a^2x^2\cos(ax)) \quad (\text{A}'.135)$$

$$\int x^2\cos(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos(ax) - 2\sin(ax) + a^2x^2\sin(ax)) \quad (\text{A}'.136)$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)},\ a^2 \neq b^2 \quad (\text{A}'.137)$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)dx = -\Big[\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)}\Big],\ a^2 \neq b^2 \quad (\text{A}'.138)$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)},\ a^2 \neq b^2 \quad (\text{A}'.139)$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} \quad (\text{A}'.140)$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) \quad (\text{A}'.141)$$

$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{A}'.142)$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) \quad (\text{A}'.143)$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) \quad (\text{A}'.144)$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \quad (\text{A}'.145)$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) \quad (\text{A}'.146)$$