ΗΥ215: 2^{η} Σειρά Ασκήσεων

4 Μαρτίου 2009

Παράδοση: 11 Μαρτίου 2009

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Έστω ότι το πραγματικό και περιοδικό με περίοδο T_0 σήμα $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

όπου $f_0 = 1/T_0$. Πως θα αναπτύσσεται το σήμα $x(-t)$ και $x(t-t_0)$;

2. Δείξτε ότι το άρτιο, $x_e(t)$, και περιττό, $x_o(t)$ μέρος του περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος, $x(t)$, αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k| \cos(\measuredangle X_k) e^{j2\pi k f_0 t} \\ x_o(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k| \sin(\measuredangle X_k) e^{j(2\pi k f_0 t + \pi/2)} \end{aligned}$$

όπου $\measuredangle X_k$ σημαίνει η φάση της συνιστώσας X_k.

3. Έχουμε δείξει ότι το περιοδικό σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < T_0/2 \\ -A & T_0/2 \leq t < T_0 \end{cases}$$

αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$X_k = \begin{cases} \frac{2A}{j\pi k} & k \text{ περιττά} \\ 0 & k \text{ άρτια} \end{cases}$$

Δείξτε ότι το σήμα $x(t - T_0/4)$ γράφεται ως:

$$x(t - T_0/4) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos(2\pi(2k+1) f_0 t)$$

4. Έστω ότι ένα πραγματικό σήμα έχει περίοδο $T_0 = 8s$ και οι μόνοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματός του σε σειρά για $k > 0$ Fourier είναι $X_1 = j$ και $X_5 = 2$.

Να γράφετε το σήμα χρησιμοποιώντας το μονόπλευρο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.

5. Δείξτε ότι για ένα πραγματικό περιοδικό και περιττό σήμα, το οποίο αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k, ισχύει:

$$X_k = -X_{-k}$$

6. Έστω ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο T_0 ($x(t+T_0) = x(t)$) αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = X_{-1}e^{-j2\pi f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi f_0 t}$$

Γνωρίζουμε ότι το σήμα που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier και έχει συντελεστές

$$Y_k = e^{-j\frac{\pi k}{2}} X_{-k}$$

είναι ένα περιττό σήμα, και ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{8}$$

Δώστε τις πιθανές μορφές του $x(t)$.