ΗΥ215: Λύσεις 1ης σειράς ασκήσεων

1. (α΄) Έστω $z_1 = (\sqrt{3} - j3)^{10}$ και $z = \sqrt{3} - j3$, τότε

   $|z| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{12}$

   $\theta = tan^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right) = tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ ή $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ διότι έχουμε θετικό πραγματικό μέρος μιγαδικού και αρνητικό μέρος μιγαδικού, άρα βρισκόμαστε στο 4ο τεταρτημόριο.

   $z = |z|e^{j\theta} = \sqrt{12}e^{-j\frac{\pi}{3}}$
   $z_1 = z^{10}$ από τύπο Euler $\Rightarrow z_1 = \left(\sqrt{12}\right)^{10} e^{-j10\frac{\pi}{3}}$ (πολική μορφή) $\Rightarrow$
   $z_1 = 12^5 cos(10\pi/3) - jsin(10\pi/3)$ (καρτεσιανή)

   (β΄) $z_2 = (\sqrt(3) - j3)^{\frac{1}{3}}$

   Από το (α) έχουμε $z = \sqrt{12}e^{-j\pi/3} = \sqrt{3} - j3$

   $$\begin{aligned} z_2 &= z^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt(12)e^{-j\pi/3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}^{1/3} e^{-j\frac{\pi}{3}\frac{1}{3}} \Rightarrow \\ z_2 &= 12^{1/6}e^{-j\pi/9} = 12^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{9} - j\sin\frac{\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

   (γ΄) $Re\{je^{j\frac{\pi}{3}}\}$

   $$\begin{aligned} x &= Re\{je^{j\frac{\pi}{3}}\} = Re\{j\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)\} = Re\{\left(j\cos\frac{\pi}{3} + j^2\sin\frac{\pi}{3}\right)\} \Rightarrow \\ x &= Re\{\left(j\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)\} = -\sin\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

   Καρτεσιανή μορφή: $z = -\sin\frac{\pi}{3} + j0 = -\sin\frac{\pi}{3}$

   Πολική μορφή: $z = -\sin\frac{\pi}{3} = (-1)\sin\frac{\pi}{3} = e^{j\pi}sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}e^{j\pi}$

2. Αναζητούμε τις γωνίες θ ϑ για τις οποίες ισχύει

$$Re\{(1+j)e^{j\theta} = 1\}$$

$$\begin{aligned} z &= Re\{(1+j)e^{j\theta} = Re\{(1+j)(\cos\theta + j\sin\theta)\} \\ &= Re\{\cos\theta + j\sin\theta + j\cos\theta + j^2\sin\theta\} = Re\{\cos\theta + j\sin\theta + j\cos\theta - \sin\theta\} \Rightarrow \\ z &= \cos\theta - \sin\theta = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0, \sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos\theta = 1, \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3. Υπολογισμός και σχεδιασμός των στιγμιαίων συχνοτήτων του σήματος:

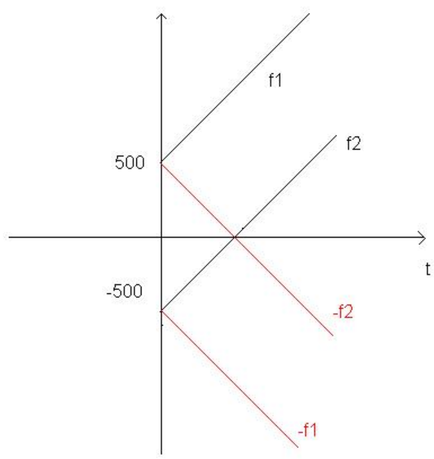
$$\begin{aligned} x(t) &= Re\{\sin(1000\pi t)e^{j200\pi t^2}\} = Re\{\sin(1000\pi t)\Big[\cos 200\pi t^2 + j\sin 200\pi t^2\Big]\} \\ &= \sin(1000\pi t)\cos 200\pi t^2 = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - 1000\pi t\Big)\cos(200\pi t^2) \\ &= \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2} - 1000\pi t - 200\pi t^2\Big) + \frac{1}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{2} - 1000\pi t + 200\pi t^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\cos\Big(1000\pi t + 200\pi t^2 - \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{2}\cos\Big(200\pi t^2 - 1000\pi t + \frac{\pi}{2}\Big) \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1(t) = 1000\pi t + 200\pi t^2 - \frac{\pi}{2} \\ \theta_2(t) = 200\pi t^2 - 1000\pi t + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

και

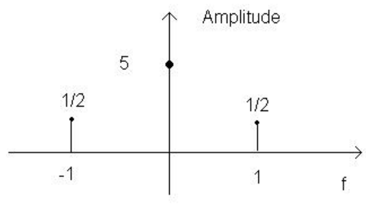
$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_1(t)}{dt} = 500 + 200t \\ f_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_2(t)}{dt} = 200t - 500 \end{cases}$$



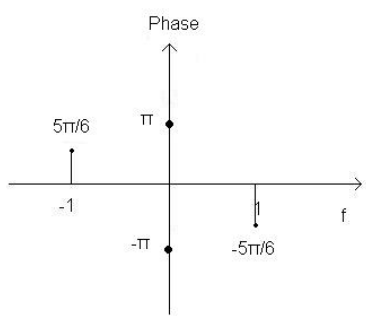
Σχήμα 1: στιγμιαίες συχνότητες $x(t)$

4. (α') Σχεδιάζουμε πρώτα το φάσμα πλάτους και φάσης του αρχικού αδιαμόρφωτου σήματος

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 + \sin(2\pi t - \frac{\pi}{3}) = 5e^{j2\pi 0t} + \sin(2\pi 1t - \frac{\pi}{3}) = 5e^{j2\pi 0t} + \cos(2\pi 1t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) \\ &= 5e^{j2\pi 0t} + \cos(2\pi 1t - \frac{5\pi}{6}) = 5e^{j2\pi 0t} + \frac{1}{2}e^{j(2\pi t - \frac{5\pi}{6})} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi t - \frac{5\pi}{6})} \end{aligned}$$



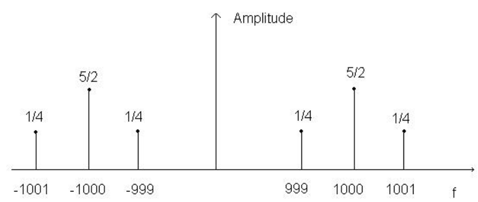
Σχήμα 2: φάσμα πλάτους



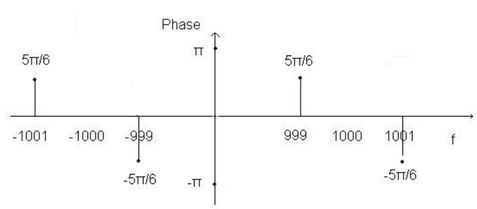
Σχήμα 3: φάσμα φάσης

Το σήμα αυτό για να σταλθεί πρέπει να διαμορφωθεί κατά πλάτος με φέρουσα συχνότητα $1000Hz$. Επομένως

$$\begin{aligned}
y(t) &= \Big(5+\sin(2\pi t-\frac{\pi}{3})\Big)\cos(2\pi 1000t) = \Big(5+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})\Big)\cos(2\pi 1000t)\\
&= 5\cos(2\pi 1000t)+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})\cos(2\pi 1000t)\\
&= 5\cos(2\pi 1000t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6}-2\pi 1000t)+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6}+2\pi 1000t)\\
&= 5\cos(2\pi 1000t)+\frac{1}{2}\cos(-2\pi 999t-\frac{5\pi}{6})+\cos(2\pi 1001t-\frac{5\pi}{6})
\end{aligned}$$



Σχήμα 4: φάσμα πλάτους σήματος που αποστέλλεται



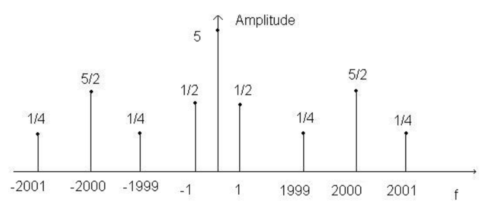
Σχήμα 5: φάσμα φάσης σήματος που αποστέλλεται

(β′) Στον δέκτη το διαμορφωμένο σήμα για να αποδιαμορφωθεί πρέπει να πολλαπλασιαστεί με ένα φέρον σήμα ίδιας συχνότητας, δηλαδή

$$y^{'}(t) = y(t)\cos(2\pi 1000t)$$

Το $y^{'}(t)$ για να μας δώσει το αρχικό σήμα πρέπει να ενισχυθεί. Επομένως

$$\begin{aligned}
y^{'}(t) &= 2y(t)\cos(2\pi 1000t) = y(t)2\cos(2\pi 1000t) = \\
&= \Big(5+\sin(2\pi t-\frac{\pi}{3})\Big)\cos(2\pi 1000t)2\cos(2\pi 1000t) \\
&= \Big(5+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})\Big)2\cos^2(2\pi 1000t) \\
&= \Big(5+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})\Big)\Big(\cos\Big[2(2\pi 1000t)\Big]+1\Big) \\
&= \Big(5+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})\Big)\Big(\cos\Big[(2\pi 2000t)\Big]+1\Big) \\
&= 5+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})+5\cos(2\pi 2000t)+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})\cos(2\pi 2000t) \\
&= 5+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})+5\cos(2\pi 2000t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6}-2\pi 2000t) \\
&+ \frac{1}{2}\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6}+2\pi 2000t) \\
&= 5+\cos(2\pi t-\frac{5\pi}{6})+5\cos(2\pi 2000t)+\frac{1}{2}\cos(-2\pi 1999t-\frac{5\pi}{6}) \\
&+ \frac{1}{2}\cos(2\pi 2001t-\frac{5\pi}{6})
\end{aligned}$$



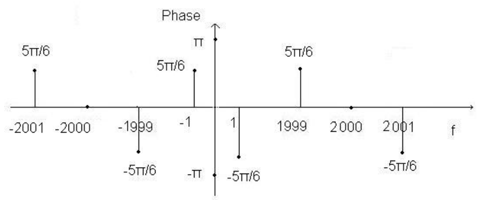
Σχήμα 6: φάσμα πλάτους αποδιαμορφωμένου σήματος (Άσκηση 4β)

5. Δείξτε ότι

$$< x(t), y(t) > = < y(t), x(t) >^*$$

Λύση:

$$< y(t), x(t) > = \int_a^b y(t)x^*(t)dt = \Big(\int_a^b x(t)y^*(t)dt\Big)^* = < x(t), y(t) >^*$$



Σχήμα 7: φάσμα φάσης αποδιαμορφωμένου σήματος (Άσκηση 4β)

6.

$$x(t) = je^{j2\pi 5 f_0 t}, y(t) = -je^{j2\pi 3 f_0 t}$$

$$\begin{aligned} < x(t), y(t) > &= \int_0^{kT_0} je^{j2\pi 5 f_0 t}(-je^{j2\pi 3 f_0 t})^* dt = \int_0^{kT_0} je^{j2\pi 5 f_0 t} je^{j2\pi 3 f_0 t} dt \\ &= j^2 \int_0^{kT_0} e^{j2\pi 2 f_0 t} = e^{j\pi} \int_0^{kT_0} e^{j2\pi 2 f_0 t} = 0 \end{aligned}$$

Άρα είναι κάθετα μεταξύ τους.