ΗΥ215 – Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

22/03/2009
2η Σειρά Ασκήσεων

2η Σειρά Ασκήσεων (λύσεις)

1) Έστω το πραγματικό και περιοδικό, με περίοδο T_0, σήμα $x(t)$, που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t},$$

όπου $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Πώς θα αναπτύσσονται τα $x(-t)$ και $x(t-t_0)$;

Λύση: Για το $x(-t)$:

1ος τρόπος: Είναι $x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (-t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi(-k) f_0 t}$.

Θέτω $u=-k$, άρα θα είναι $x(-t) = \sum_{u=+\infty}^{-\infty} X_{-u} e^{j2\pi u f_0 t} =$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} X_{-u} e^{j2\pi u f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{-k} e^{j2\pi k f_0 t} = x(-t).$$

2ος τρόπος: Έστω $y(t) = x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t}$, με

$$\left. \begin{array}{l} Y_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt. \\ \text{Θέτω } u=-t \Rightarrow du=-dt,\ u_1=0,\ u_2=-T_0 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{T_0}\left(-\int_0^{-T_0} x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du\right) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u) e^{-j2\pi(-k) f_0 u} du = X_{-k}.$$ Άρα $x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{-k} e^{j2\pi k f_0 t}$.

Παρατήρηση: Επειδή $x(t) \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$.

Για το $x(t-t_0)$:

1ος τρόπος: Είναι $x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 (t-t_0)} =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t_0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(X_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 t_0} \right) e^{j2\pi k f_0 t}.$$

2ος τρόπος: Έστω $y(t) = x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t}$, με

$$\left.\begin{array}{l} Y_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t-t_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\ \text{Θέτω } u = t - t_0 \Rightarrow du = dt,\ u_1 = T_0 - t_0,\ u_2 = -t_0 \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-t_0}^{T_0 - t_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 (u + t_0)} du = \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-t_0}^{T_0 - t_0} x(u) e^{-j2\pi k f_0 u}}_{X_k} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t_0} =$$

$$= X_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 t_0}.$$

Άρα $x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(X_k \cdot e^{-j2\pi k f_0 t_0} \right) \cdot e^{j2\pi k f_0 t}$.

2) Δείξτε ότι το άρτιο, $x_e(t)$, και περιττό, $x_o(t)$, μέρος του περιοδικού και πραγματικού σήματος, με περίοδο T_0, $x(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k| \cos(\measuredangle X_k)\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$x_o(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k| \sin(\measuredangle X_k)\, e^{j(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2})},$$

όπου $\measuredangle X_k$ σημαίνει η φάση της συνιστώσας X_k.

Λύση: Είναι $x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} = \frac{\sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_k X_{-k} e^{j2\pi k f_0 t}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (X_k + X_{-k}) e^{j2\pi k f_0 t} = (X_{-k} = X_k^*,$ πραγματικό σήμα$)$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (X_k + X_k^*) e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}\{X_k\} e^{j2\pi k f_0 t} =$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\{|X_k| e^{j\measuredangle X_k}\} e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k| \cos(\measuredangle X_k) e^{j2\pi k f_0 t}.$

Επίσης, $x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2} = \frac{\sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t} - \sum_k X_{-k} e^{j2\pi k f_0 t}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (X_k - X_{-k}) e^{j2\pi k f_0 t} = (X_{-k} = X_k^*,$ πραγματικό σήμα$)$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (X_k - X_k^*) e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2j\,\mathrm{Im}\{X_k\} e^{j2\pi k f_0 t} =$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}\{|X_k| e^{j\measuredangle X_k}\} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k| \sin(\measuredangle X_k) e^{j(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2})}.$

3) Έχουμε δείξει ότι το περιοδικό σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < T_0/2 \\ -A, & T_0/2 \le t < T_0 \end{cases}$$

αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$X_k = \begin{cases} \frac{2A}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases}.$$

Δείξτε ότι το σήμα $x(t-t_0) = x(t - T_0/4)$ γράφεται ως:

$$x\left(t - \frac{T_0}{4}\right) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos(2\pi(2k+1) f_0 t).$$

<u>Λύση</u>: Έχουμε δείξει ότι: $x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}\right) e^{j2\pi k f_0 t}$.

Άρα θα έχουμε: $x(t-\frac{T_0}{4}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{4}} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{-j\frac{\pi k}{2}} e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{2A}{j\pi k} e^{-j\frac{\pi k}{2}} e^{j2\pi k f_0 t} =$$

$$= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{k\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} =$$

$$= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} e^{-j\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right)} e^{j2\pi k f_0 t} = \quad (k \text{ περιττά} \Rightarrow k : 2k+1)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k+1)} e^{-j\left((2k+2)\frac{\pi}{2}\right)} e^{j2\pi(2k+1)f_0 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k+1)} e^{-j\left((k+1)\pi\right)} e^{j2\pi(2k+1)f_0 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2k+1)} (-1)^{k+1} e^{j2\pi(2k+1)f_0 t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2k+1)} (-1)^{k+1} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t)$$

$$= \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t).$$

4) Έστω ότι ένα πραγματικό σήμα έχει περίοδο $T_0 = 8$ sec. και οι μόνοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος σε Σ. Fourier, για $k > 0$, είναι $X_1 = j$ και $X_5 = 2$. Να γράψετε το σήμα χρησιμοποιώντας το μιγαδικό ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.

<u>Λύση</u>: Αφού το σήμα μας είναι πραγματικό, τότε θα ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$.
Άρα $X_{-1} = X_1^* = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ και $X_{-5} = X_5^* = 2^* = 2$. Άρα θα έχουμε:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_{-5} e^{-j2\pi 5 f_0 t} + X_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_5 e^{j2\pi 5 f_0 t} =$$

$$= 2e^{-j10\pi f_0 t} + 2e^{j10\pi f_0 t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi f_0 t} =$$

$$= 2 \cdot 2\cos(10\pi f_0 t) + e^{-j(\frac{\pi}{2} + 2\pi f_0 t)} + e^{j(\frac{\pi}{2} + 2\pi f_0 t)} =$$

$$= 4\cos(10\pi f_0 t) + 2\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}), \text{ με } f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{8} \text{ Hz.}$$

5) Δείξτε ότι για ένα πραγματικό περιοδικό και περιττό σήμα, το οποίο αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k, ισχύει:

$$X_k = -X_{-k}.$$

Λύση: Είναι $X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \left(x(t) = -x(-t) \right)$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} -x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$u = -t \Rightarrow du = -dt$

$u_1 = -T_0,\ u_2 = 0$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du =$$

$$= -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u) e^{-j2\pi(-k)f_0 u} du = -X_{-k} \Longleftrightarrow X_k = -X_{-k}.$$

6) Έστω ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο T_0, που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = X_{-1} e^{-j2\pi f_0 t} + X_0 + X_1 e^{j2\pi f_0 t}.$$

Γνωρίζουμε ότι το σήμα που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier και έχει συντελεστές

$$X_k = e^{-j\frac{\pi k}{2}} X_{-k}$$

είναι περιττό σήμα, και ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{8}$$

Δώστε τις πιθανές μορφές του $x(t)$.

Λύση: Από εκφώνηση, έχουμε ότι το σήμα με συντελεστές Y_k είναι περιττό, άρα από άσκηση 5, θα είναι:

$$Y_k = -Y_{-k} \Longrightarrow Y_{-1} = -Y_1 \Longrightarrow e^{j\frac{\pi}{2}} X_1 = -e^{-j\frac{\pi}{2}} X_{-1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow jX_1 - jX_{-1} = 0 \Longleftrightarrow j(X_1 - X_{-1}) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{X_1 = X_{-1}} \quad (1)$$

και επίσης $Y_0 = -Y_0 \Longleftrightarrow 2Y_0 = 0 \Longleftrightarrow Y_0 = 0 \Longleftrightarrow e^0 X_0 = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \boxed{X_0 = 0} \quad (2)$$

Από τη σχέση $\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt$ συνεπάγεται, λόγω Θ. Parseval,

ότι $\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_k |X_k|^2 = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow |X_{-1}|^2 + |X_0|^2 + |X_1|^2 = \frac{1}{8} \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longleftrightarrow}} 2|X_1|^2 = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |X_1|^2 = \frac{1}{16} \Longrightarrow |X_1| = \frac{1}{4} \Longrightarrow X_1 = \pm\frac{1}{4}.$$

Άρα θα είναι τελικά:

- $x(t) = \frac{1}{4} e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{1}{4} e^{j2\pi f_0 t}$

ή

- $x(t) = -\frac{1}{4} e^{-j2\pi f_0 t} - \frac{1}{4} e^{j2\pi f_0 t}$