ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία HY215 S09 HW5

Ονοματεπώνυμο

Άσκηση 1: Έστω δύο δεξιόπλευρα σήματα $x(t), y(t)$ τα οποία συνδέονται με τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)$$

Υπολογίστε το $Y(s)$ κ' $X(s)$.

Λύση:

$$sX(s) - \cancel{x(0^-)} = -2Y(s) + 1$$

$$sY(s) - \cancel{y(0^-)} = 2X(s) \Rightarrow sY(s) = 2X(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s^2}{2} Y(s) + 2Y(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$X(s) = \frac{s}{2s^2+8}.$$

Άσκηση 2: α) Δείξτε ότι για ένα σήμα άρτιο $x(t) = x(-t)$ ισχύει ότι $X(s) = X(-s)$ ή ότι αν το $X(s)$ έχει ρίζα $s_k = +\sigma_k + j2\pi f_k$ θα έχει υποχρ. και ρίζα στο $s_k = -\sigma_k - j2\pi f_k$

β) Δείξτε ότι για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ αν $X(s)$ έχει ρίζα στο s_k τότε θα έχει και στο s_k^*.

Λύση: α) $x(t) \to X(s)$

$$x(-t) \to \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{st}\, dt = X(-s)$$

Άρα $x(t) = x(-t) \Rightarrow X(s) = X(-s)$

άρα αν $X(s_k) = 0 \Rightarrow X(-s_k) = 0$.

β) $$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{-st}\, dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-s^* t}\, dt \right)^* = X^*(s^*)$$

αν $x(t) = x^*(t)$ real τότε

$$X(s) = X^*(s^*)$$

Άρα αν $X(s_k) = 0 \Rightarrow X(s_k^*) = 0$.

Άσκηση 3: Να υπολ. τον μετ. Laplace των σημάτων και περιοχές τα πεδ. σύγκλισης.

α) $x(t) = e^{-4t}\epsilon(t) + e^{-5t}\sin(5t)\,\epsilon(t)$

β) $x(t) = t\, e^{-2|t|}$

Λύση: α) $$x(t) = e^{-4t}\epsilon(t) + \frac{1}{2j} e^{(j5-5)t}\epsilon(t) - \frac{1}{2j} e^{(-j5-5)t}\epsilon(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{2j}\frac{1}{s+5-j5} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+5+j5}$$

$\sigma > -4$ $\qquad$ $\sigma > -5$ $\qquad$ $\sigma > -5$

άρα $\sigma > -4$

και

$$X(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{5}{(s+5)^2 + 5^2}$$

β) $x_1(t) = e^{-2|t|} = e^{2t}\epsilon(-t) + e^{-2t}\epsilon(t)$

Άρα $X_1(s) = \underset{\sigma<2}{\frac{1}{s-2}} + \underset{\sigma>-2}{\frac{1}{s+2}} = \frac{2s}{s^2-4}$, $-2<\sigma<2$

Άρα $x(t) = t\cdot x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds}\left[\frac{2s}{s^2-4}\right] = -\frac{2s^2+8}{(s^2-4)^2}$ $\quad -2<\sigma<2$

<u>Άσκηση 4</u>: Να υπολογίσετε τον αντίστρ. μετ. Laplace

α) $\frac{s+2}{s^2+7s+12}$ $\quad -4<\sigma<-3.$

β) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$ $\quad \sigma>-1$

<u>Λύση</u>: α) $X(s) = \frac{s+2}{(s+4)(s+3)} = \frac{A_1}{s+4} + \frac{A_2}{s+3} = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+3}$

άρα $x(t) = 2\cdot e^{-4t}\epsilon(t) + e^{-3t}\epsilon(-t)$

β) $X(s) = 1 - \frac{3s}{(s+1)^2}$

$t\,\epsilon(t) \to \frac{1}{s^2}$ $\quad \sigma>0$

$e^{-t}\cdot t\,\epsilon(t) \to \frac{1}{(s+1)^2}$ $\quad \sigma>-1$

(shift by -1)

$\frac{s}{(s+1)^2} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\cdot t\,\epsilon(t)\right) = e^{-t}\epsilon(t) - t e^{-t}\epsilon(t)$

Απ. $x(t) = \delta(t) - 3e^{-t}\epsilon(t) - 3te^{-t}\epsilon(t)$