ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία ΗΥ 215 Πρόοδος 509

Ονοματεπώνυμο

Θέμα 1: Συνέλιξη.

α) Να υπολογίσετε τη συνέλιξη μεταξύ των σημάτων:

$$x(t) = \epsilon(t) - 2\epsilon(t-2) + \epsilon(t-5)$$

$$y(t) = e^{-2t}\,\epsilon(t)$$

β) Σχεδιάστε το αποτέλεσμα της συνέλιξης των σημάτων:

$$x(t) = tri(t)$$

$$y(t) = \delta_{T_0}(t) \quad \text{όπου } T_0 = 2 \text{ και } T_0 = 1$$

Θέμα 2: Έστω τα περιοδικά σήματα:

$$x(t) = \cos(4\pi t)$$

$$y(t) = \sin(4\pi t)$$

Να βρείτε το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier του σήματος $x(t)\cdot y(t)$ με 2 τρόπους:

α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες $x(t)\,y(t) \leftrightarrow$

β) Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία

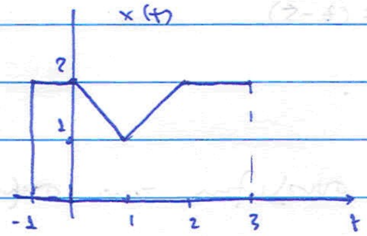
(το β) δεν είναι αναγκαστικό).

Θέμα 3°: α) Σχεδιάστε το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \delta_{T_0}(t) - 2\delta_{T_0}(t-1) \quad \text{για } T_0 = 2$$

β) Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα $x(t)$

Θέμα 4°: Έστω το σήμα του σχήματος.



$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Υπολογίστε τις ποσότητες:

α) $X(0)$, β) $\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,df$, γ) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df$

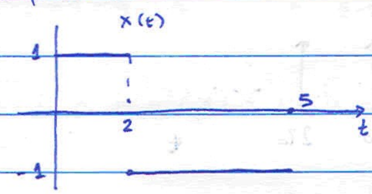
δ) το σήμα που έχει μετασχ. Fourier $Re\{X(f)\}$

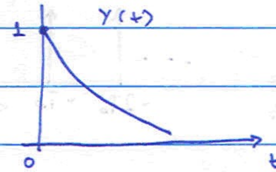
Θέμα 1:

a) $x(t) = \epsilon(t) - 2\epsilon(t-2) + \epsilon(t-5)$

$y(t) = e^{-2t}\epsilon(t)$

Σχηματικά:

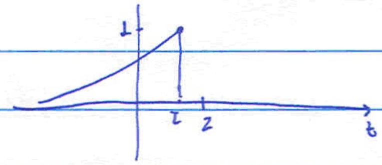




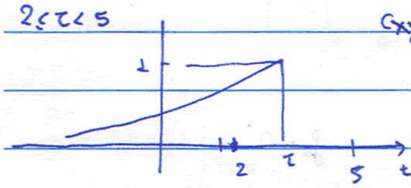
$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(\tau - t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2(\tau-t)}\, \epsilon(\tau - t)\, dt = e^{-2\tau}\int_0^{\infty} x(t)\, e^{2t}\, dt$$

$\tau < 0$: $C_{xy}(\tau) = 0$

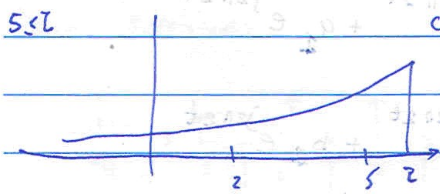
$0 \le \tau < 2$ $\quad C_{xy}(\tau) = e^{-2\tau}\int_0^{\tau} e^{2t}\, dt = e^{-2\tau}\, \frac{1}{2} e^{2t}\Big|_0^{\tau} = \frac{e^{-2\tau}}{2}\left(e^{2\tau} - 1\right)$



$2 \le \tau < 5$ $\quad C_{xy}(\tau) = e^{-2\tau}\left[\int_0^2 e^{2t}\, dt - \int_2^{\tau} e^{2t}\, dt\right] = \frac{e^{-2\tau}}{2}\left(2e^4 - 1 - e^{2\tau}\right)$



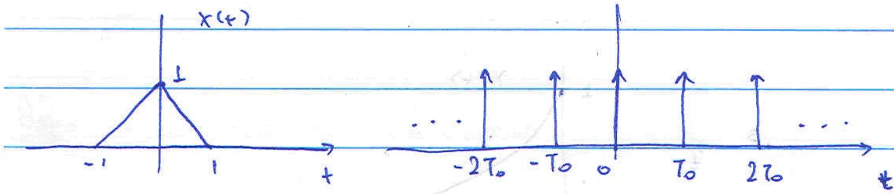
$5 \le \tau$ $\quad C_{xy}(\tau) = \frac{e^{-2\tau}}{2}\left[\left(e^4 - 1\right) - \left(e^{10} - e^4\right)\right] = \frac{e^{-2\tau}}{2}\left(2e^4 - 1 - e^{10}\right)$



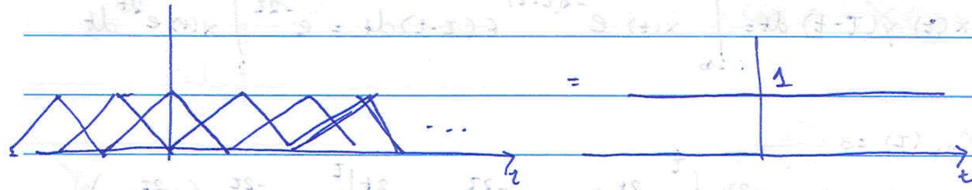
β) $x(t) = tri(t) = tri\left(\frac{t}{1}\right)$

$y(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_k \delta(t - kT_0)$

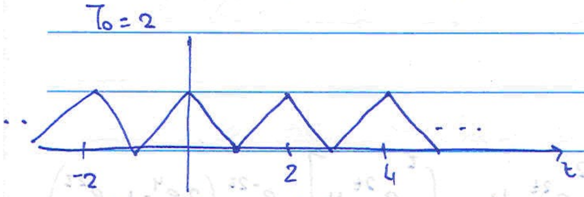
Σχηματικά.



$T_0 = 1$.



$T_0 = 2$



Θέμα 2: $x(t) = \cos(4\pi t)$ $\quad x(t)\cdot y(t)$ $\quad f_0 = 2$

$y(t) = \sin(4\pi t)$

α) $x(t) = \frac{1}{2} e^{j2\pi 2t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 2t} = a_{-1} e^{-j2\pi 2t} + a_1 e^{j2\pi 2t}$

$y(t) = \frac{1}{2j} e^{j2\pi 2t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 2t} = b_{-1} e^{-j2\pi 2t} + b_1 e^{j2\pi 2t}$

$x(t)\,y(t) \longrightarrow \sum_l a_l b_{k-l} = z_k$

$z_0 = a_{-1} b_{0+(-1)} + a_1 b_{0-1} = a_{-1} b_1 + a_1 b_{-1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2j}\right) = 0$

$z_1 = a_{-1} b_{1-(-1)} + a_1 b_{1-1} = \cancel{a_2 b_0}\ 0+0 = 0$

$z_2 = a_{-1} b_{2-(-1)} + a_1 b_{2-1} = \cancel{a_{-1} b_3}^{\,0} + a_1 b_1 = \frac{1}{4j}$

$z_{-2} = a_{-1} b_{-2-(-1)} + a_1 b_{-2-1} = a_{-1} b_{-1} + \cancel{a_1 b_{-3}}^{\,0} = -\frac{1}{4j}$

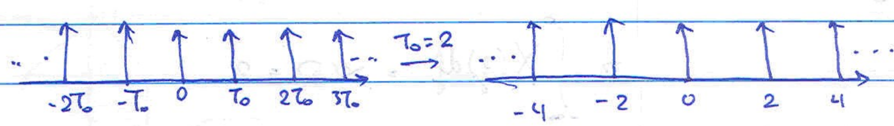
Άρα $x(t)\cdot y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2j} e^{j2\pi 4t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 4t}\right) = \frac{1}{2}\sin(2\pi 4t)$

$= \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$

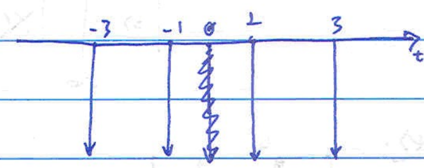
β) $\cos(4\pi t)\sin(4\pi t) = \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{2}\cancel{\sin(0\pi t)}^{\,0}$
$= \frac{1}{2}\sin(8\pi t)$

Θέμα 3ο: $x(t) = \delta_{T_0}(t) - 2\delta_{T_0}(t-1)$

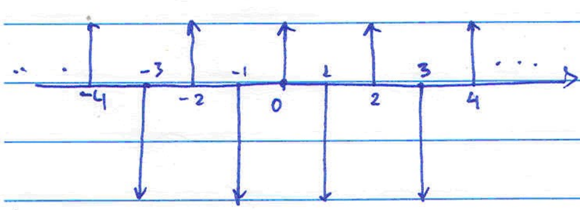
$\delta_{T_0}(t)$:



$-2\delta_{T_0}(t-1)\big|_{T_0=2}$ →



Άρα συνολικά:



$$x(t) = \delta_{T_0}(t) - 2\delta_{T_0}(t-1) = \frac{1}{T_0}\sum_k e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt} - \frac{2}{T_0}\sum_k e^{-j\frac{2\pi}{T_0}1k}\, e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

$$= \sum_k \left(\frac{1}{T_0} - \frac{2}{T_0} e^{-j\frac{2\pi}{T_0}k}\right) e^{-j\frac{2\pi}{T_0}kt}$$

<u>Για $T_0 = 2$</u> : $k = 0$ $\quad a_0 = -\frac{1}{T_0}$

$k \neq 0$ $\quad a_k = \frac{1}{T_0} - \frac{2}{T_0}\left(e^{-j\pi}\right)^k = \frac{1}{T_0} - \frac{2}{T_0}(-1)^k =$

$= \frac{1}{T_0}\left(1 - 2(-1)^k\right) =$

$= \frac{1}{2} - (-1)^k$

<u>Θέμα 4ο:</u>

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$

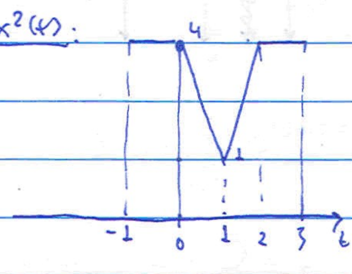
$\Rightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 8 - \frac{1}{2}2\cdot 1 = 7$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df = x(0) = 2$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt =$

$= 16 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 13.$

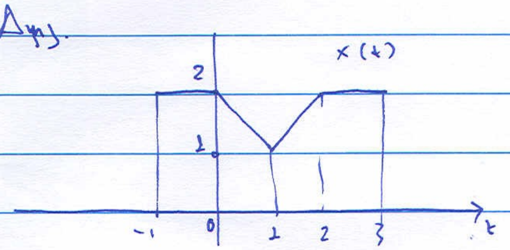
<u>$x^2(t)$:</u>

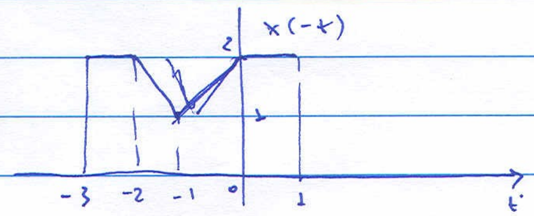


β) το σήμα που έχει ως μετ. Fourier το πρ. μέρος του $X(f)$ είναι το άρτιο μέρος του σήματος:

$$x_a(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

Δηλ.





+