ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ

Α.Μ. Εξάμηνο Περίοδος

Εξεταζόμενο Μάθημα

Ημερομηνία HY215 - HW3 509

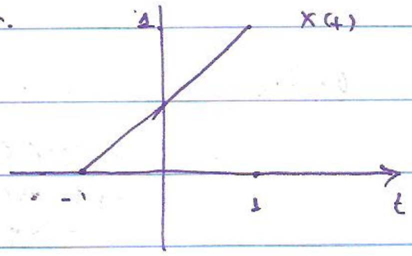
Ονοματεπώνυμο

Άσκηση 1. Έστω το σήμα ενέργειας:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{2} & |t| \le 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier του σήματος

Λύση.



$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \begin{cases} \frac{1}{2} - \delta(t-1) & |t| \le 1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Άρα $F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{1}{2} 2\,\mathrm{sinc}(2f) - e^{-j2\pi f} = j2\pi f\, X(f) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(f) = \frac{\mathrm{sinc}(2f)}{j2\pi f} - \frac{e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}$$

Άσκηση 2: Αποδείξτε ότι

$$F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$$

όπου $x(t) \xrightarrow{F} X(f)$

Λύση: $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * \epsilon(t)$

Άρα $F\left\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right\} = X(f)\cdot E(f)$

$$\left.\begin{array}{l} \epsilon(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)+\frac{1}{2} \\ F\{\operatorname{sgn}(t)\}=\frac{1}{j\pi f} \end{array}\right\} \Rightarrow E(f)=\frac{1}{2j\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$$

Άρα $\int_0^t x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{F} \frac{X(f)}{2j\pi f}+\frac{1}{2}X(0)\delta(f)$

Άσκηση 3: Θεωρείστε το σήμα:

$$x(t)=\begin{cases} t+\frac{1}{2} & |t|\le 1/2 \\ 1 & t>1/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

γ) Θα μπορούσε να υπολογιστεί με παραγώγιση (χρησ. του τύπου: $F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}=j2\pi f X(f)$)?

Να υπολογίσετε τον μετ. Fourier του σήματος με:

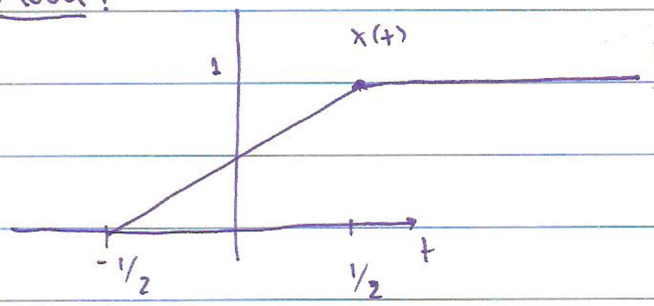
α) κάνοντας χρήση ιδιοτήτων μετ. Fourier όπως ολοκλήρωση

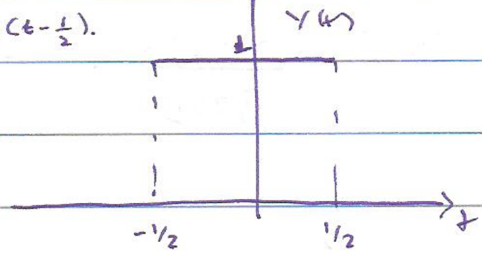
β) θεωρώντας ως δύο σήματα.

$x_1(t)=\begin{cases} t+1/2 & |t|\le 1/2 \\ 0 & \end{cases}$

$x_2(t)=\epsilon(t-\frac{1}{2})$.

Λύση:

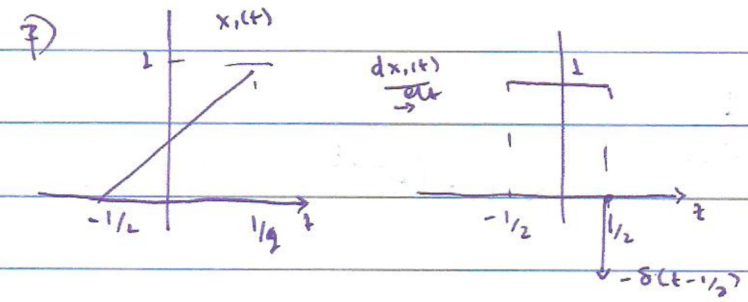




Συμπεραίνουμε ότι $\int_0^t y(\tau)\,d\tau = x(t) \Rightarrow X(f)=\frac{Y(f)}{2j\pi f}+\frac{1}{2}Y(0)\delta(f)$

$Y(f) = \text{sinc}(f)$ Άρα $X(f) = \dfrac{\text{sinc}(f)}{j2\pi f} + \dfrac{1}{2}\delta(f)$

7)



$$F\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}\right\} = \text{sinc}(f) - e^{-j2\pi f \, 1/2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow X_1(f) = \frac{\text{sinc}(f)}{j2\pi f} - \frac{e^{-j\pi f}}{j2\pi f} \\ &x_2(t) = \epsilon(t - \tfrac{1}{2}) \Rightarrow X_2(f) = \frac{e^{-j\pi f}}{j2\pi f} + \frac{1}{2} e^{-j\pi f}\delta(f) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = \frac{\text{sinc}(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

γ) Όχι. Γιατί $\lim_{t\to\infty} x(t) \neq 0$

Άσκηση 4: Έστω ότι $z(t) = x(t) * y(t)$ και $g(t) = x(at) * y(at)$

Δείξτε ότι $g(t) = \frac{1}{a} z(at)$, $a > 0$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} &G(f) = \frac{1}{a^2} X(f/a) \cdot Y(f/a) \\ &Z(f) = X(f) \cdot Y(f) \\ &\text{από την 2η μορφή του } g(t) \rightarrow G(f) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} Z\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ισχύει.}$$

Άσκηση 5: Να βρεθεί ο αντίστροφος μετ. Fourier.

$$X(f) = \frac{\beta - a}{(a+j2\pi f)(\beta + j2\pi f)} \qquad a, \beta > 0$$

Λύση

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} - \frac{1}{\beta + j2\pi f} \Rightarrow x(t) = \left(e^{-at} - e^{-\beta t}\right) \epsilon(t).$$

$$\frac{1}{a+j2\pi f} \xrightarrow{F^{-1}} e^{-at}\epsilon(t)$$