ΗΥ215: 3^{η} Σειρά Ασκήσεων

17 Μαρτίου 2008

Παράδοση: 1 Απριλίου 2008

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο T, σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -\frac{2}{T}t + 2 & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

και επιβεβαιώστε με το Matlab τη λύση σας. Παραδώστε και κώδικα σε Matlab καθώς και σχήματα με διαφορετικό πλήθος συντελεστών της σειράς Fourier.

2. Εστω το σήμα:

$$x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t)$$

Βρείτε την περίοδο, T, του σήματος και υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^T x^2(t)dt$$

3. Δύο μιγαδικά πλάτη, X_1 και X_2, κινούνται στο μιγαδικό επίπεδο σε κύκλο με ακτίνα r και κυκλικές συχνότητες ω_1 και $\omega_2 = 2\omega_1$, αντίστοιχα. Οι αρχικές θέσεις των μιγαδικών πλατών είναι $\phi_1 = \pi/4$ και $\phi_2 = \pi/8$, αντίστοιχα. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος που παράγουν με την κίνησή τους τα μιγαδικά πλάτη καθώς και την έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου. Πόσο ποσοστό της ενέργειας του σήματος σε μια περίοδό του έχει κατανεμηθεί στη συχνότητα ω_1 και πόσο ποσοστό στη συχνότητα ω_2;

4. Ενα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και για τις συχνότητες $100\,Hz$, $200\,Hz$, $300\,Hz$, και $400\,Hz$ έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:

$$X_1 = e^{j\pi/3} \quad X_2 = 2e^{j\pi/4} \quad X_3 = 3e^{j\pi/16} \quad X_4 = 2e^{j\pi/3}$$

Ενα δεύτερο πραγματικό περιοδικό σήμα $y(t)$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και για τις συχνότητες $50\,Hz$, $100\,Hz$, $150\,Hz$, και $200\,Hz$ έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:

$$Y_1 = 3e^{j\pi} \quad Y_2 = 2e^{j\pi/3} \quad Y_3 = e^{j\pi/16} \quad Y_4 = e^{j\pi/4}$$

Αλλες συχνότητες δεν περιέχονται στα σήματα $x(t)$ και $y(t)$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x^2(t)dt$$
$$\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} y^2(t)dt$$
$$\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} x(t)\,y(t)dt$$

οπου T_1 και T_2 είναι αντίστοιχα οι περίοδοι των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$.

5. Θεωρούμε το περιοδικό σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq t_c \\ 0 & t_c \leq |t| \leq T_0/2 \end{cases}$$

όπου T_0 είναι η περίοδος του σήματος και $t_c < T_0/2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε $t_c = T_0/3$ ενώ στη δεύτερη θεωρούμε $t_c = T_0/5$.

(α′) Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις σχεδιάστε το σήμα $x(t)$ για $-2T_0 \leq t \leq 2T_0$.

(β′) Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις αναπτύξτε το $x(t)$ σε σειρά Fourier.

(γ′) Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης για $-10\ 2\pi f_0 \leq f \leq 10\ 2\pi f_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$.

(δ′) Ορίζουμε ως εύρος ζώνης χρόνου, Δt, το χρονικό διάστημα που περιέχει την περισσότερη ενέργεια του σήματος σε μια περίοδο. Για την άσκηση αυτή είναι φανερό ότι $\Delta t = 2t_c$.
Ομοια ορίζουμε εύρος ζώνης συχνοτήτων, Δf, την απόσταση σε Hz των δύο πρώτων μηδενισμών του φάσματος πλάτους εκατέρωθεν της $f = 0$.
Υπολογίστε σε κάθε μια από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις το εύρος ζώνης χρόνου και συχνότητας. Δείξτε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι:

$$\Delta t\ \Delta f = c$$

όπου c μια σταθερά. Η παραπάνω σχέση είναι ανάλογη με την αρχή της αβεβαιότητας στην Κβαντομηχανική. Υπολογίστε τη σταθερά c και σχολιάστε την παραπάνω σχέση.

6. Μια κατηγορία σημάτων όπου η συχνότητα αλλάζει με το χρόνο είναι τα chirp σήματα:

$$x(t) = A\cos\left(\psi(t)\right)$$

όπου η φάση $\psi(t)$ είναι μια απλή συνάρτηση δευτέρου βαθμού ως προς το t. Μια πιο πολύπλοκη φάση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην διαμόρφωση κατά συχνότητα (Frequency Modulation, FM):

$$\psi(t) = 2\pi f_c t + I(t)\cos(2\pi f_m t + \phi_m) + \phi_c$$

όπου χρησιμοποιώντας ένα μεταβλητό πλάτος ως προς το χρόνο, έχουμε το σήμα

$$x(t) = A(t)\cos(\psi(t))$$

Η διαμόρφωση σε συχνότητα έχει πολλές εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες και στη σύνθεση ηλεκτρονικής μουσικής με synthesizers.

(α′) Υπολογίστε τη στιγμιαία συχνότητα του $x(t)$ όταν

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

όπου I_0 μια σταθερά.

(β′) Θεωρώντας επίσης

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau}$$

με $A_0 = 1$, και με τις υπόλοιπες τιμές να είναι $I_0 = 10$, $f_c = 110$ Hz, $f_m = 220$ Hz $\phi_m = \phi_c = -\pi/2$ και $\tau = 2$ sec. μπορείτε να συνθέσετε ένα πολύ φυσικό ήχο καμπάνας. Γράψτε ένα κώδικα σε Matlab που να συνθέτει το σήμα $x(t)$ με τα στοιχεία που σας δίνονται, χρησιμοποιώντας ως συχνότητα δειγματοληψίας $fs = 11025$ Hz και συνολικής διάρκειας $T = 6$ sec. Στη σελίδα του μαθήματος σας δίνεται το σήμα που θα πρέπει να συνθέσετε ως kampana1.wav. Συγκρίνετε το σήμα που εσείς συνθέσατε με αυτό που είναι στη σελίδα.

Προσπαθήστε να παράγεται και ένα δεύτερο ήχο καμπάνας με διαφορετικούς παραμέτρους, π.χ. $I_0 = 3$, $f_c = 250$ Hz, $f_m = 350$ Hz, $\tau = 1$ και όλοι οι άλλοι παράμετροι παραμένουν ίδιοι.

Σε κάθε περίπτωση σχεδιάστε με τη βοήθεια του Matlab τη στιγμιαία συχνότητα του σήματος ως προς το χρόνο.