ΗΥ215: 2^{η} Σειρά Ασκήσεων

17 Μαρτίου 2008

Παράδοση: 28 Μαρτίου 2008

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Ο μετασχηματισμός Hilbert ενός σήματος ορίζεται ως:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

   Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Hilbert του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} A & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

2. Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος:

$$x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - \cos(3\pi t)$$

   Ολες οι τιμές της φάσης θα πρέπει να είναι στο διάστημα $[-\pi\,,\pi]$ (το σύνολο είναι κλειστό για να μπορούμε να έχουμε την περιττή συμμετρία, όπου χρειάζεται, και για την τιμή π της φάσης).

3. Εστω το σήμα:

$$x(t) = 5\cos(\omega_1 t + \pi/3) - 2\sin(\omega_2 t + \pi/4)$$

   (α′) Επιλέξτε τις ω_1 και ω_2 έτσι ώστε:

$$x(t) = A\cos(11\pi t + \phi)$$

   Ποια είναι η τιμή του πλάτους A και της φάσης ϕ;

   (β′) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι συχνότητες ω_1 και ω_2 με $0 < \omega_1 < \omega_2$ έτσι ώστε:

$$x(t + 0.2) = x(t)$$

4. Βρείτε την περίοδο των σημάτων

   (α′) $x(t) = A\cos(5\pi t + \pi/3)$

   (β′) $x(t) = A\cos(5\pi t + \pi/3) + B\sin(18\pi t - \pi/3)$

(γ′) $x(t) = A\cos(5t + \pi/3)$

5. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε Matlab ώστε να μπορούμε να ελέγχουμε αν οι απαντήσεις μας στις ασκήσεις είναι σωστές. Σημαντική σημείωση: εσείς ΠΡΕΠΕΙ να λύσετε τις ασκήσεις ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ. Εδώ απλώς μαθαίνουμε πως να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας με το Matlab.

   • Ολοκλήρωση.

     Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t)\, dt$$

     και να ελέγξουμε αν η λύση που έχουμε βρεί είναι η σωστή.

     Υπενθύμιση: Ολοκλήρωση κατά Riemann:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \delta \to 0 \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\delta_i$$

     Τι λέει το παραπάνω; Σε βήματα είναι:

     (α′) Χωρίζουμε το διάστημα $[a\ b]$ σε N μέρη μήκους δ_i το καθένα, και έστω δ να είναι το μεγαλύτερο από αυτά.

     (β′) Επιλέγουμε ένα σημείο x_i σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα.

     (γ′) Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$ στα σημεία x_i.

     (δ′) Τώρα έχουμε N τιμές της $f(x)$ και N μήκοι (αριθμούς δηλαδή) δ_i

     (ε′) Πολλαπλασιάζουμε αριθμό προς αριθμό τις N τιμές της $f(x)$ με τα N δ_i και προσθέτουμε το αποτέλεσμα.

     Η παραπάνω σχέση λέει ότι για να είναι το ολοκλήρωμα ίσο με αυτό τό άθροισμα που βρήκαμε θα πρέπει να χωρίσουμε με τέτοιο τρόπο το διάστημα $[a\ b]$ ώστε ακόμα και το μεγαλύτερο διάστημα από τα δ_i, δηλαδή το δ, να είναι πολύ μικρό. Ισότητα έχουμε όταν $\lim \delta \to 0$.

     Ας θεωρήσουμε εμείς ότι $\delta_i = \delta$ για κάθε i δηλ. χωρίζουμε ομοιόμορφα το διάστημα $[a\ b]$ και ας επιλέξουμε το x_i να είναι η αρχή του κάθε μέρους. Αρκεί να προσέξουμε να πάρουμε δ πολύ μικρό έτσι ώστε να προσεγγίζουμε όσο γίνεται την τιμή του ολοκλήρωματος.

     Επιλέγω να χωρίσω το διάστημα $[0\ 2\pi]$ σε 6001 σημεία:

```
delta = 2*pi/6000; t = 0:delta:2*pi;
```

Επομένως $\delta = 0.00104719755120$

```
oloklhrwma = delta * sum(  sin(t).^10 )
>> oloklhrwma =


    1.5463
```

- Σειρά Fourier

  Στο μάθημα έχουμε δείξει ότι η ανάπτυξη σε σειρά Fourier του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T_0/2 \\ -1 & T_0/2 \le t < T_0 \end{cases}$$

είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[(2k+1)\omega_0 t\right] \\ &= \frac{4}{\pi}(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\,\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\,\omega_0 t) + \cdots) \end{aligned}$$

Το παρακάτω πρόγραμμα σε Matlab υπολογίζει μια προσέγγιση του σήματος $x(t)$ χρησιμοποποιώντ τη σειρά Fourier με 10 όρους. Αναλύστε το πρόγραμμα γραμμή προς γραμμή. Για απορίες στείλτε email στη λίστα. Στην προσπάθειά σας να καταλάβετε, συμβουλή μου είναι να δουλεύετε παραδείγματα με μικρά διανύσματα (π.χ. 4 διαστάσεων και όχι των 100000).

```
To =2;          % posh einai h periodo (se sec)? epilegw mia pou na mou aresei.
d = To/600;     % posa shmeia ana periodo thelw na exw?
D = 3;          % poses periodous thelw na dw?


N = 10;         % posous orous sth seira Fourier tha xrhsimopoihsw?
Ao = 0;         % o prwtos oros einai mhden
k = 0:N-1;
Ak = 4/pi * 1./(2*k+1);  % oi 10 oroi Fourier


t = 0:d:D*To; % xronos t
w0 = 2*pi/To; % kuklikh suxnothta
```

```
x = Ao + Ak*sin( ((2*k'+1)*w0) * t); plot(t,x); xlabel('Time in
sec'); ylabel('Amplitude'); title('Xmmmm... doulevei!!!');
```