ΗΥ215: 1^{η} Σειρά Ασκήσεων

17 Μαρτίου 2008

Παράδοση: 28 Μαρτίου 2008

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$|z-1| = Re\{z\} + 1$$

   όπου z ένας μιγαδικός αριθμός. Να σχεδιαστεί η λύση της εξίσωσης.

2. Δείξτε ότι

$$(z_1\, z_2)^{\star} = z_1^{\star}\, z_2^{\star}$$

   όπου z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί και $\star$ δηλώνει συζυγεία.

   Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα δείξτε ότι:

$$(e^{z})^{\star} = e^{z^{\star}}$$

3. Για μια πραγματική συνάρτηση ισχύει:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$$

   Ισχύει το ίδιο για μια μιγαδική συνάρτηση:

$$e^{-z} = \frac{1}{e^{z}}$$

   όπου z μιγαδικός;

4. Χρησιμοποιώντας το γινόμενο, $(z_1\, z_2^4)$ όπου $z_1 = 1 + j$ και $z_2 = 5 - j$, δείξτε ότι:

$$\frac{\pi}{4} = 4tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

5. Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος:

$$x(t) = 2\cos{(\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} + \sin{(\omega_0 t)}$$

6. Εστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^4 - 1$$

για τιμές της μεταβλητής x από -3 έως $+3$ χρησιμοποιώντας Matlab. Επειδή υπάρχουν άπειρες τιμές μέσα σε αυτό το εύρος τιμών, θα πρέπει να επιλέξουμε μερικές από αυτές. Εστω ότι η πρώτη είναι η $x_1 = -3$ και μετά με βήμα 0.1 επιλέγουμε τη δεύτερη, δηλ. $x_2 = -2.9$ κ.λ.π. μέχρι να φτάσουμε στην τελική τιμή $x = 3$. Χρησιμοποιώντας την εντολή plot μπορούμε να σχεδιάσουμε την συνάρτηση $f(x)$ ως προς τις τιμές (που επιλέξαμε) της μεταβλητής x. Στο Matlab οι εντολές που πρέπει να πληκτρολογήσουμε είναι:

```
x=-3:0.1:3;
f = x.^2-1;
plot(x,f);
```

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε και συναρτήσεις μιγαδικές. Π.χ.

$$f(z) = z^4 - 1$$

Μονάχα τώρα θα πρέπει να επιλέξουμε να σχεδιάσουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος. Δεν μπορούμε να δούμε και τα δύο ταυτόχρονα. Στην περίπτωσή μας θα ήταν καλό να συγκρίνουμε το πραγματικό μέρος της μιγαδικής εξίσωσης με αυτό που σχεδιάσαμε παραπάνω για τη συνάρτηση $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τις εντολές

```
help
(e.g., help
mesh)
meshgrid
mesh
real
view
plot
```

προσπαθήστε να απεικονήσετε στον 3-διάστατο χώρο το πραγματικό μέρος της $f(z)$ χρησιμοποιώντας την εντολή mesh. Θεωρήστε ένα εύρος τιμών για τον φανταστικό άξονα παρόμοιο με αυτό του πραγματικού άξονα:

```
-3j:0.1j:3j
```

Σχολιάστε τα σχήματα που έχετε απεικονίσει για την $f(x)$ και $f(z)$.