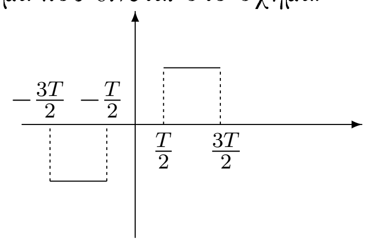
Λύσεις 4ης σειράς ασκήσεων

HU-370

7 Ioun-ou 2007

1. Έστω το σήμα που δίνεται στο σχήμα.



Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Φουριερ του σήματος και να δειχθεί ότι είναι:

$$X(f) = -2jAT\sin(\pi f2T)\sin c(fT)$$

Λύση:

$$\begin{aligned}
X(F) &= -A\int_{-3T/2}^{-T/2} e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t + A\int_{T/2}^{3T/2} e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t \\
&= \frac{A}{j2\pi f}(e^{j\pi fT} - e^{j\pi f3T}) - \frac{A}{j2\pi f}(e^{-j\pi f3T} - e^{-j\pi fT}) \\
&= \frac{A}{j2\pi f}(2\cos(\pi fT) - 2\cos(\pi f3T)) \\
&= \frac{A}{j2\pi f}(-2)\sin(\pi f2T)\sin(-\pi fT) \\
&= -2jAT\sin(\pi f2T)\sin c(fT)
\end{aligned}$$

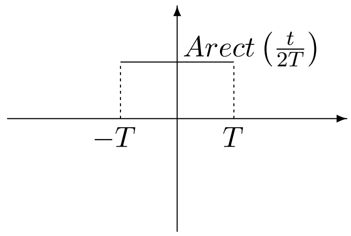
2. (α) Δείξτε ότι το σήμα στην προηγούμενη άσκηση μπορεί να προκύψει απο τη πράξη

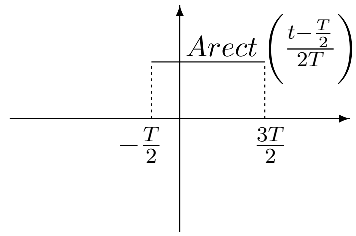
$$Arect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{2T}\right) - Arect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{2T}\right)$$

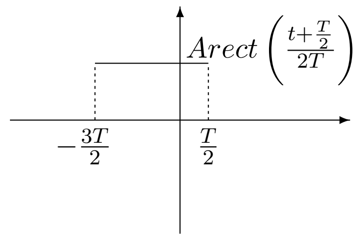
(β) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετασχηματισμού Φουριερ επιβεβαιώστε το προηγούμενο αποτέλεσμα.

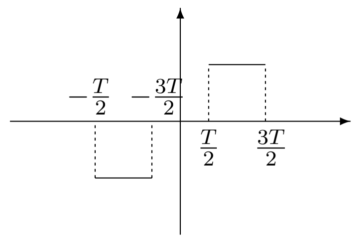
Λύση:

(α) Έχουμε









(β)

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{j2\pi f t_0} X(f)$$

Άρα.

$$\left.\begin{aligned} &y(t) = x(t-T/2) - x(t+T/2) \\ &x(t) \xrightarrow{F} 2AT\sin c(f2T) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} Y(f) &= 2AT\sin c(f2T)(e^{j2\pi f T/2} - e^{-j2\pi f T/2}) \\ &= 2AT\frac{\sin(\pi f 2T)}{\pi f 2T} 2j\sin(\pi f T) \\ &= 2jAT\sin(\pi f 2T)\sin c(fT) \end{aligned}$$

3. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Φουριερ υπολογίστε τον μετασχηματισμό Φουριερ του σήματος

$$x(t) = A\left(1 - \frac{t}{T}\right) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Λύση:

$$\begin{aligned} X(f) &= A\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right)e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{-j2\pi f}e^{-j2\pi f t}\Big|_0^T - \frac{A}{T}\left(\frac{1}{-j2\pi f}\left[te^{-j2\pi f t}\Big|_0^T - \int_0^T e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t\right]\right) \\ &= \frac{A}{j2\pi f}\left(1-e^{-j2\pi f T}\right) + \frac{A}{T\left(j2\pi f\right)}\left[Te^{-j2\pi f t} - \frac{1}{-j2\pi f}(e^{-j2\pi f T}-1))\right] \\ &= \frac{A}{j2\pi f} - \frac{A}{T(2\pi f)^2}e^{-j\pi f T}(e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \\ &= \frac{A}{j2\pi f} + \frac{A}{T(2\pi f)^2}e^{-j\pi f T}2j\sin(\pi f T) \end{aligned}$$

4. Θεωρήστε το σήμα $y(t) = x(-t) + x(t)$ όπου $x(t)$ είναι το σήμα στην προηγούμενη άσκηση.
Δείξτε ότι:

$$Y(f) = AT \sin c^2(fT)$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετασχηματισμού Φουριερ.

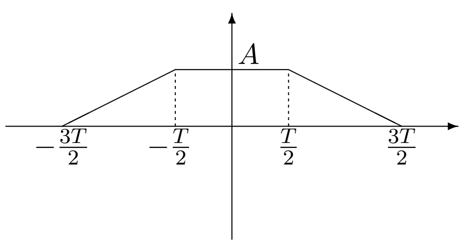
Λύση: Αν

$$x(t) \to X(f) \Rightarrow x(-t) \to X^*(f)$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) + X^*(f) \\ &= -\frac{A}{T(2\pi f)^2} \sin(\pi f T) 2j 2j \sin(\pi f T) \\ &= 4\frac{A}{T} \frac{\sin^2(\pi f T)}{4\pi^2 f^2} \\ &= AT \sin c^2(fT) \end{aligned}$$

5. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες του μετασχηματισμού Φουριερ και αποτελέσματα από τις προηγούμενες ασκήσεις υπολογίστε τον μετασχηματισμό Φουριερ του σήματος.



Λύση:

$$\begin{aligned} X(f) &= AT \sin c(fT) + \frac{A}{j2\pi f} e^{-j\pi f T} + \frac{A}{T(2\pi f)^2} e^{-j2\pi f T} 2j \sin(\pi f T) - \\ &- \frac{A}{j2\pi f} e^{j\pi f T} - \frac{A}{T(2\pi f)^2} e^{j2\pi f T} 2j \sin(\pi f T) \\ &= AT \sin c(fT) - AT \sin c(fT) - \frac{A}{T(2\pi f)^2} 2j \sin(\pi f T)(e^{j2\pi f T} - e^{-j2\pi f T}) \\ &= \frac{4A}{T(2\pi f)^2} \sin(\pi f T) \sin(2\pi f T) \\ &= 2AT \sin c(fT) \sin c(2fT) \end{aligned}$$