Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - ΗΥ215

Λύσεις 2ης σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1.

$$
\begin{aligned}
\|x_1\|^2 &= \int_0^1 \sin^2(\pi t)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos(2\pi t))dt = \frac{1}{2}\\
\|x_2\|^2 &= \int_0^1 \sin^2(\frac{\pi}{2}t)dt = \frac{1}{2}\\
< x_1, x_2 > &= \int_0^1 \sin(\pi t)\sin(\frac{\pi}{2}t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t)dt - \int_0^1 \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{2}t)dt = \frac{4}{3\pi}
\end{aligned}
$$

Άρα $\cos\phi = \frac{8}{3\pi}$.

Άσκηση 2.
Ορθοκανονική βάση: $e_k(t)$

$$
\begin{aligned}
h_0(t) &= \psi_0(t)\\
e_0(t) &= \frac{h_0(t)}{\sqrt{< h_0(t), h_0(t) >}} = \frac{1}{\sqrt{< 1, 1 >}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
h_1(t) &= \psi_1(t) - < \psi_1(t), e_0(t) > e_0(t) = t - < t, \frac{1}{\sqrt{2}} > . \frac{1}{\sqrt{2}} = t\\
e_1(t) &= \frac{h_1(t)}{\sqrt{< h_1(t), h_1(t) >}} = \frac{t}{\sqrt{< t, t >}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t\\
h_2(t) &= \psi_2(t) - < \psi_2(t), e_0(t) > .e_0(t) - < \psi_2(t), e_1(t) > .e_1(t) =\\
&= t^2 - < t^2, \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} - < t^2, \sqrt{\frac{3}{2}}t > \sqrt{\frac{3}{2}}t =\\
&= t^2 - \frac{1}{3}\\
e_2(t) &= \frac{h_2(t)}{\sqrt{< h_2(t), h_2(t) >}} = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})\\
h_3(t) &= \psi_3(t) - < \psi_3(t), e_0(t) > .e_0(t) - < \psi_3(t), e_1(t) > .e_1(t) - < \psi_3(t), e_2(t) > .e_2(t) =\\
&= \ldots = t^3 - \frac{3}{5}t\\
e_3(t) &= \frac{h_3(t)}{\sqrt{< h_3(t), h_3(t) >}} = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3.

$$\theta(t) = 2\pi\mu t^2 + 2\pi f t + \psi$$

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1500-100}{5}t + 100 \Rightarrow \\ \theta(t) &= 2\pi\int_0^t \frac{1400}{5}u.du + 2\pi.100t + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ \theta(t) &= 2\pi\frac{1400}{5}\frac{u^2}{2}\Big|_0^t + 2\pi.100t + \frac{\pi}{3} \\ &= 2\pi.140t^2 + 2\pi.100t + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$x(t) = 3\cos\big(\theta(t)\big)$$

Άσκηση 4.

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_1} e^{-\alpha.t}e^{-jk\omega_0.t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha+jk\omega_0)}e^{-(jk\omega_0+\alpha)t}\Big|_0^{T_1} = \\ &= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha+jk\omega_0)}\big(e^{-(jk\omega_0+\alpha)T_1} - 1\big) = \\ &= \frac{1-e^{-(jk\omega_0+\alpha)T_1}}{jk2\pi + \alpha T_0} \end{aligned}$$

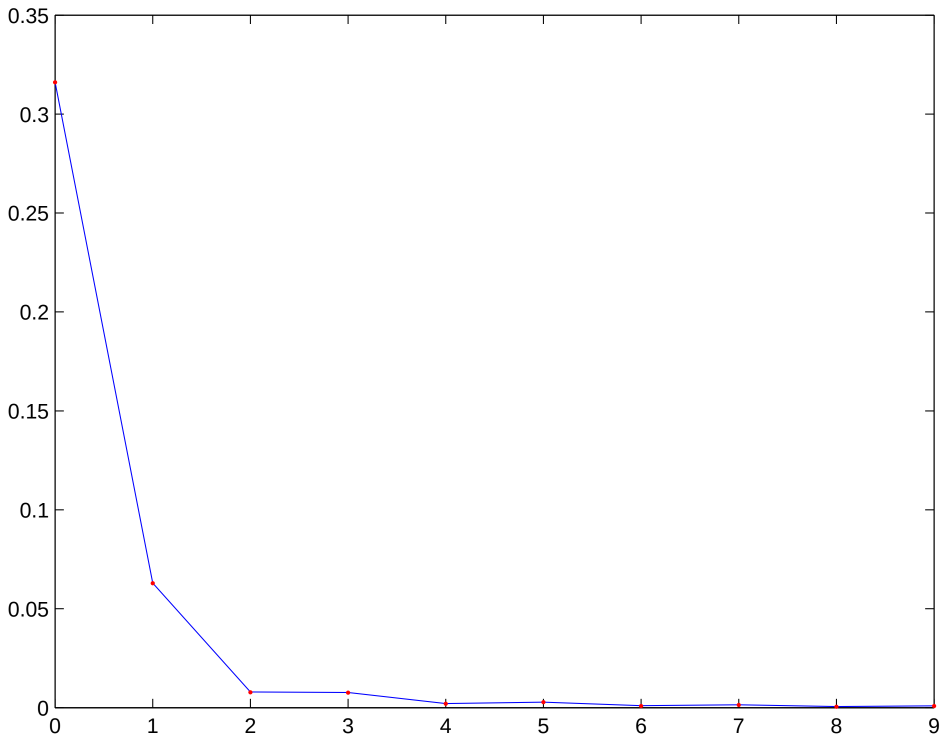
Άσκηση 5.

$T_0 = 4;$
$\alpha = 0.5;$
$w_0 = 2\pi/T_0;$
$\delta = T_0/6000;$
$T_1 = T_0/2;$
$t = 0 : \delta : T_1;$
$N = 10$

for $k = 0 : N-1$
    $olokleroma(k+1) = (\delta/T_0) * sum(\exp(-(\alpha + j * w_0 * k). * t))$
end

for $k = 0 : N - 1$
$\quad lysi(k+1) = (1 - \exp(-(j * k * w_0 + \alpha) * T_1))/(j * k * 2 * \pi + \alpha * T_0)$
end

$suntelestes = 0 : N - 1;$
figure
plot(suntelestes,real(oloklhrwma))
hold on
plot(suntelestes,real(lysi),'r.')



Σχήμα 1: Οι κόκκινες τελείες αντιστοιχούν στις τιμές των 10 πρώτων συντελεστών του αναπτύγματος σε σειρά Fourier όπως υπολογίστηκαν αναλυτικά στην άσκηση 4. Η μπλε γραμμή δείχνει την αντίστοιχη λύση όταν το ολοκλήρωμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη Matlab. Οι δύο λύσεις πράγματι συμφωνούν μεταξύ τους.