ΗΥ215: 4^η Σειρά Ασκήσεων

04 Ιουνίου 2007

Παράδοση: 11 Ιουνίου 2007

Απορίες:yannis@csd.uoc.gr

1. Να υπολογίσετε τη συνέλιξη των παρακάτω σημάτων:

$$\begin{array}{lll} \epsilon(t) & \star & \epsilon(t) \\ e^{\alpha t}\epsilon(t) & \star & e^{\beta t}\epsilon(t), \quad \alpha \neq \beta \\ e^{\alpha t}\epsilon(t) & \star & e^{\alpha t}\epsilon(t) \\ t\ e^{\alpha t}\epsilon(t) & \star & e^{\alpha t}\epsilon(t) \end{array}$$

όπου $\star$ σημαίνει συνέλιξη.

2. (α′) Αποδείξτε την επιμεριστική ως προς την πρόσθεση καθώς και την προσεταιριστική ιδιότητα της συνέλιξης.

   (β′) Η συνέλιξη είναι η σχέση που συνδέει την είσοδο, $x(t)$ σε ένα Γραμμικό και Χρονικά αναλλοίωτο (ΓΧΑ) σύστημα, $h(t)$ με την έξοδο, $y(t)$ από το σύστημα:

$$y(t) = x(t) \star h(t)$$

   Έστω δύο ΓΧΑ υποσυστήματα που περιγράφονται αντίστοιχα από τις συναρτήσεις $h_1(t)$ και $h_2(t)$, τα οποία συνδέονται (α) σε σειρά και (β) παράλληλα. Δείξτε ότι στην περίπτωση (α) η έξοδος θα δίδεται από τη σχέση:

$$y(t) = x(t) \star (h_1(t) \star h_2(t))$$

   ενώ στην (β):

$$y(t) = x(t) \star (h_1(t) + h_2(t))$$

   (γ′) Όταν $h_1(t) = 2e^{-2t}\epsilon(t)$ και $h_2(t) = -e^{-t}\epsilon(t)$, υπολογίστε την έξοδο, $y(t)$ για είσοδο $x(t) = 10e^{-3t}\epsilon(t)$ για την περίπτωση (α) και (β). Και τα δύο συστήματα είναι ΓΧΑ.

3. Το σήμα $x(t)$ παρουσιάζεται στην είσοδο του ΓΧΑ συστήματος με $h(t) = \epsilon(t)$. Να υπολογιστεί ο μετ. Fourier της εξόδου.

4. Υπολογίστε τον αντίστροφο μετ. Fourier της συνάρτησης:

$$X(f) = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad a > 0$$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες της συνέλιξης.

5. Έστω ο μετ. Fourier ενός σήματος δίδεται από τη σχέση:

$$X(f) = sinc(fT)\delta_\alpha(f)$$

όπου

$$\delta_\alpha(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k\alpha)$$

Υπολογίστε την παράμετρο α ώστε ο αντίστροφος μετ. Fourier να είναι $x(t) = 1 \quad \forall t$