

HY-215 Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για
Μηχανικούς
Σημειώσεις Μαθήματος

Παναγιώτης Τσακαλίδης

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξάμηνο: 13 εβδομάδες x 2 διαλέξεις/εβδομάδα \rightarrow 26 διαλέξεις

1. ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ (Κεφ. 1, 3 μαθήματα)

- Κατηγορίες Σημάτων
- - " - συστημάτων
- Περιγραφή ΓΧΑ συστημάτων στο πεδίο των χρόνων
- Κρουστική αποκρίση & ιδιότητες συνέλιξης.

2. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ & ΣΕΙΡΑ FOURIER (Κεφ. 2, 7 μαθήματα)

- Ορισμός & ιδιότητες ΜΦ
- Εφαρμογή ΜΦ στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων
- Ιδιότητες > σειρών Fourier

3. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE (Κεφ. 3, 6 μαθήματα)

- Ορισμός, ύπαρξη, ιδιότητες > ΜΛ
- ΜΛ στοιχειωδών συναρτήσεων
- Αντίστροφος ΜΛ, σχέση ΜΦ-ΜΛ
- Χρήση ΜΛ στην επίλυση ΓΔΕ & στην ανάλυση ΓΧΑΣ

4. ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (Κεφ. 5, 5 μαθήματα)

- Μετασχηματισμός Ζ
- Χρήση ΜΖ στην ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου

5. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ (Κεφ. 4, 5 μαθήματα)

- Έννοια της κατάστασης
- Λύση δυναμικών εξισώσεων
- Μητρικά καταστατικά & μεταβάσεις & ιδιοσυχνότητες συστημάτων.

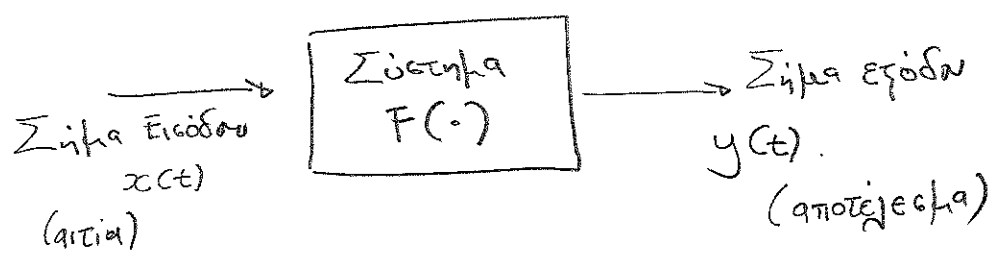
1. ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Ορισμός Σήματος: Μια συνάρτηση μιας ή περισσότερων μεταβλητών $f(x, y, z, t)$, (π.χ. χώρου, χρόνου), η οποία μεταφέρει πληροφορία για τη μεταβολή ενός φυσικού φαινομένου.

Παραδείγματα: ραδιοφωνικό σήμα, τηλεπικοινωνιακό σήμα, εικόνες παντός από το δορυφόρο ΙΚΟΝΟΣ, καρδιακό σήμα, η διακύμανση της τιμής για μετοχής ή του χρηματιστηριακού δείκτη, κτλ.

Ορισμός Συστήματος: Η οντότητα που επεξεργάζεται ένα ή περισσότερα σήματα για την επίτευξη συγκεκριμένου στόχου και με αποτέλεσμα τη δημιουργία καινούριων σημάτων.

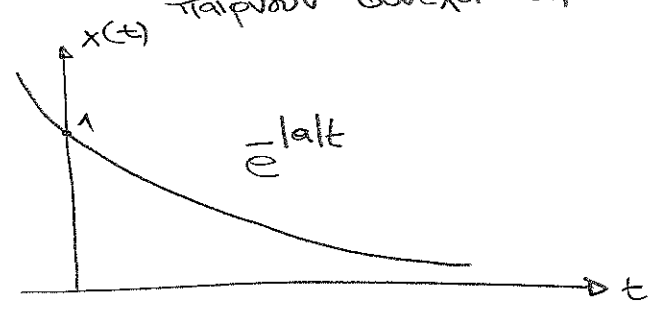
Π.χ.: Σύστημα ακρόασης ανακλώρισης φωνής, τηλεπικοινωνιακό σύστημα, ραδιοφωνο, ανθρώπινος εγχείρας...



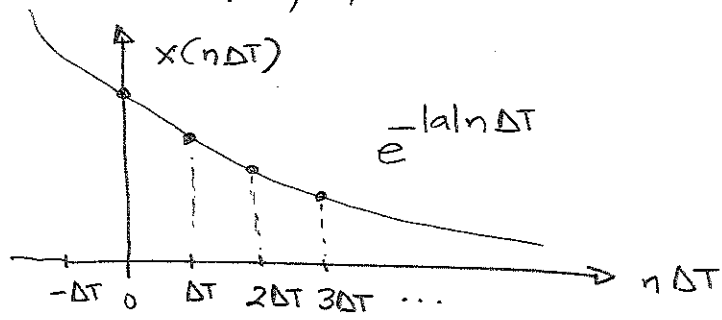
1.2 Ταξινόμηση Σημάτων

1.2.1 Αναλογικά vs. Ψηφιακά Σήματα:

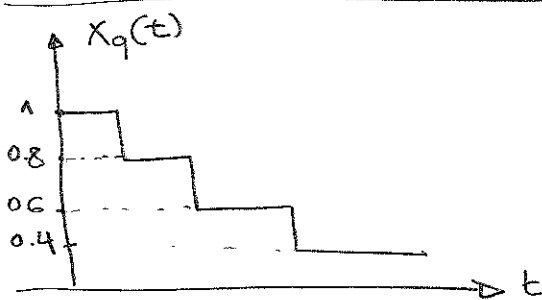
(α) Αναλογικό σήμα: Η εξαρτημένη και η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνουν συνεχείς τιμές.



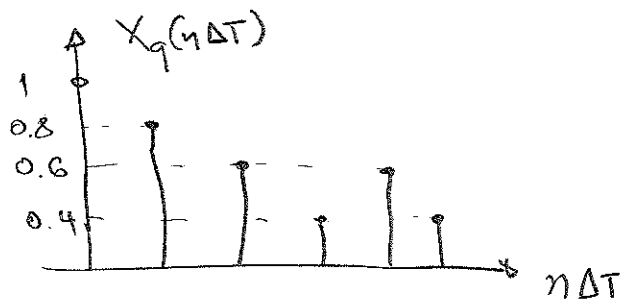
(β) Σήμα διακριτού χρόνου: Η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει
 συνεχείς τιμές και η ανεξάρτητη παίρνει διακριτές: $n\Delta T$;
 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



(γ) Σήμα συνεχούς χρόνου διακριτού πλάτους: εξ. μετ. \rightarrow διακριτές τιμές
 ανεξ. μετ. \rightarrow συνεχείς τιμές



(δ) Ψηφιακό σήμα: Και οι δύο μεταβλητές παίρνουν διακριτές τιμές



1.2.2 Πραγματικό vs. Μικαδικό Σήμα

(α) Πραγματικό: $t \in \mathbb{R}$ και $x(t) \in \mathbb{R}$

(β) Μικαδικό: $t \in \mathbb{R}$ και $x(t) \in \mathbb{C}$

$$x(t) = \text{Re}\{x(t)\} + j \text{Im}\{x(t)\} \text{ όταν}$$

$$= x_R(t) + j x_I(t)$$

$$\text{Re}\{x(t)\}, \text{Im}\{x(t)\} \in \mathbb{R}$$

$$j \triangleq \sqrt{-1}$$

1.2.3 Συμμετρικά Σήματα

(α) Άρτια συμμετρία: $x(t) = x(-t) \quad \forall t \rightarrow x_e(t)$

(β) Περιττή: $x(-t) = -x(t) \quad \forall t \rightarrow x_o(t)$

Ιδιότητες (1) Ένα γενικό σήμα μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$\text{με } x_e(t) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t))$$

$$\text{και } x_o(t) = \frac{1}{2} (x(t) - x(-t))$$

(2) Για άρτια σήματα: $\int_{-t_0}^{t_0} x_e(t) dt = 2 \int_0^{t_0} x_e(t) dt$

ενώ για περιττά: $\int_{-t_0}^{t_0} x_o(t) dt = 0$ και $x_o(0) = 0$.

(3) Ένα ψευδινό σήμα ονομάζεται συζυγές συμμετρικό αν ικανοποιεί: $x(-t) = x^*(t)$

Ιδιότητα: Για ένα συζυγές ψευδινό σήμα

$$x_R(t) = x_R^*(t)$$

$$x_I(-t) = -x_I^*(t)$$

1.2.4 Περιοδικά Σήματα:

$$x(t) = x(t + kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Βασική περίοδος: T (sec)

Βασική συχνότητα: $f = \frac{1}{T}$ (Hz) κύκλοι ανά sec

Γωνιακή συχνότητα: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (rads)

$$(i) \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} x(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (ii) \int_T^{T+t_0} x(t) dt = \int_0^{t_0} x(t) dt$$

1.2.5 Ντετερμινιστικά vs. Τυχαία Σήματα

- Γνωρίζουμε την τιμή του ανα πάσα χρονική στιγμή, δηλαδή τη συνάρτησή του στο χρόνο.
- Τυχαία: Ένα σήμα για το οποίο υπάρχει αβεβαιότητα πριν την εμφάνισή του. πχ. θόρυβος.

1.2.6 Σήμα Ενέργειας vs Σήμα Ισχύος

• Στιγμιαία Ισχύς: $p(t) \triangleq x^2(t)$ [Ισχύς που καταναλώνεται από μία αντίσταση R: $p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R i^2(t)$]

• Ολική ενέργεια: $E \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$

• Μέση Ισχύς: $P \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$
 - Για σήμα με περίοδο T, $P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$

• Τετραγωνική Μέση Ισχύς: $rms \triangleq \sqrt{P}$

• Για διακριτά σήματα (στο χρόνο)
 $E \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2(n)$; $P \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N x^2(n)$

□ $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας: iff $0 < E < \infty$
 □ $x(t)$ είναι σήμα ισχύος: iff $0 < P < \infty$

- * Ένα σήμα ενέργειας έχει πεπεσμένη μέση ισχύ
- * Ένα σήμα ισχύος έχει απείριστη ενέργεια.
- * Περιοδικά ή τυχαία σήματα αντιμετωπίζονται κυρίως σαν σήματα ισχύος
- * Ντετερμινιστικά ή απεριοδικά σήματα σαν σήματα ενέργειας.

1.3. Βασικές Πράξεις πάνω σε Σήματα

1.3.1 Πράξεις πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή.

(α) Κλιμάκωση Μέτρα: $y(t) = c \cdot x(t)$ (π.χ. ηλεκτρονικός ενισχυτής)

(β) Πρόσθεση: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ (audio mixer συνδυάζει φωνή ή ηχογράμ)

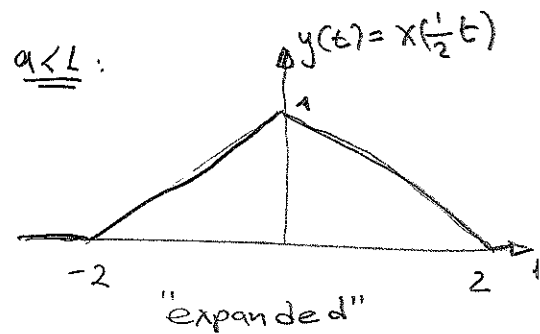
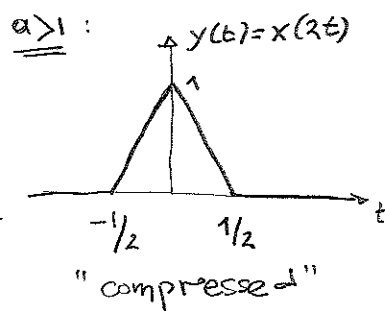
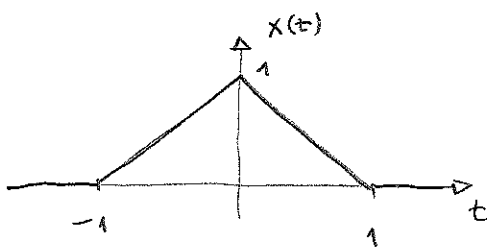
(γ) Πολλαπλασιασμός: $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$ (AM radio signal)

(δ) Παραγώγιση: $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ (Πηνελόπη: $u(t) = L \frac{d i(t)}{dt}$)

(ε) Ολοκλήρωση: $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (Πηνελόπη: $u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$)

1.3.2 Πράξεις πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή

(α) Κλιμάκωση χρόνου: $y(t) = x(at)$

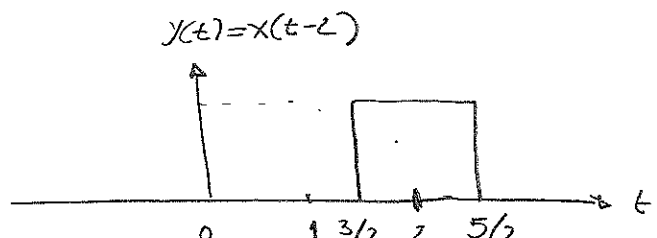
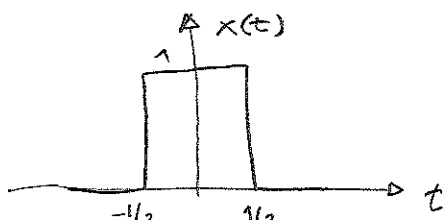


(β) Κατοπτρισμός: $y(t) = x(-t)$

Για άρτια, $y(t) = x(t)$. Για περιττά, $y(t) = -x(t)$.

(γ) Μετατόπιση: $y(t) = x(t - t_0)$

$t_0 > 0 \Rightarrow x(t)$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά t_0
 $t_0 < 0 \Rightarrow$ αριστερά



II Κανόνες σειράς εφαρμογής μετατόπισης & κλιμάκωσης

$$y(t) = x(at - b)$$

• Παρατήρηση: $y(0) = x(-b)$

$$y(b/a) = x(0)$$

• Ποια είναι η σωστή σειρά εφαρμογής?

* Η κλιμάκωση αντικαθιστά t με at

* Η μετατόπιση $-1-$ t με $t-b$

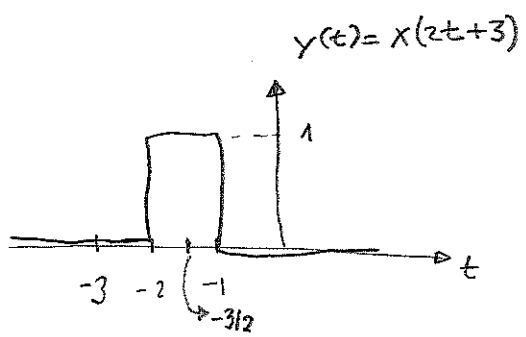
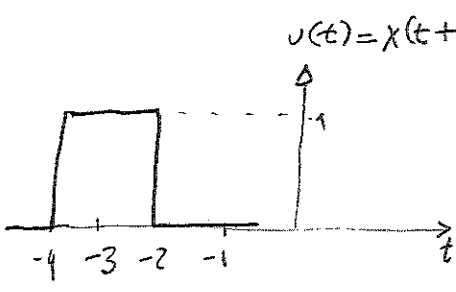
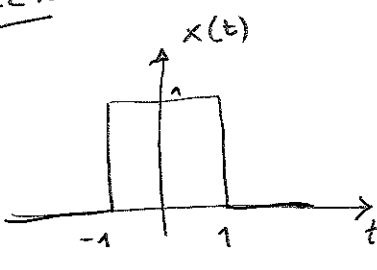
Επιμένως: Πρώτα μετατοπίζουμε την $x(t)$:

$$u(t) = x(t-b)$$

και μετά κλιμακώνουμε την $u(t)$:

$$y(t) = u(at) = x(at-b)$$

Σε στο:

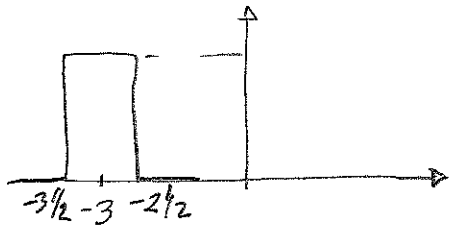
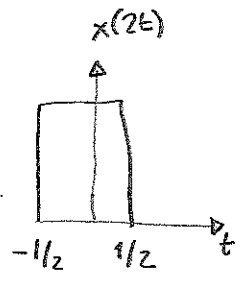
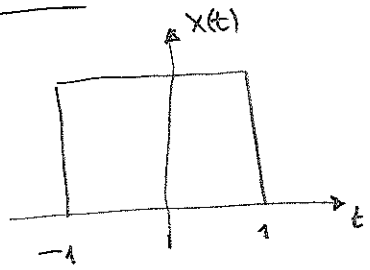


Παράδειγμα: $x(t)$: ηχογράφηση με καθετόφωνο

• $y(at-b)$; $a > 1$, $b > 0$ \rightarrow η ηχογράφηση παίζεται με πιο γρήγορο ρυθμό και με καθυστέρηση κατά b secs.

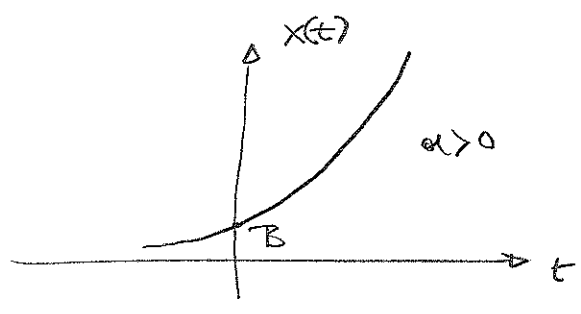
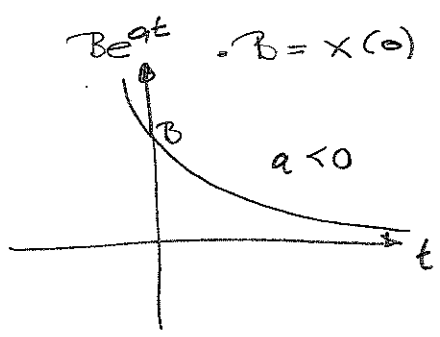
• $y(at-b)$; $a < 1$ \rightarrow η ηχογράφηση παίζεται με πιο αργό ρυθμό

Παροσ:

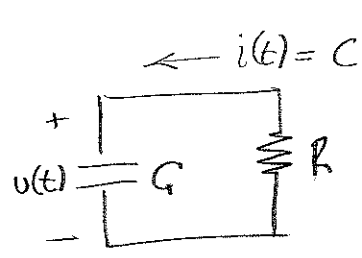


1.4 Βασικά Σήματα

1.4.1 Εκθετικό σήμα : $x(t) = B e^{at}$; $B, a \in \mathbb{R}$



1.4.2 Μικαδικό εκθετικό σήμα : $x(t) = B e^{at}$; $B, a \in \mathbb{C}$



$$RC \frac{d}{dt} v(t) + v(t) = 0$$

$$\rightarrow v(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

1.4.3 Συνημιτονοειδή σήματα $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

- A: Πλάτος
- ω : ωχνόζητα
- ϕ : φάση.

• Είναι περιοδικό σήμα με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$

□ Σχέση μεταξύ συνημιτονοειδών η μιγαδικού εκθετικού σήματος:

Εστω $B = A e^{j\phi}$. Τότε:

$$B e^{j\omega t} = A e^{j\phi} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \phi)}$$

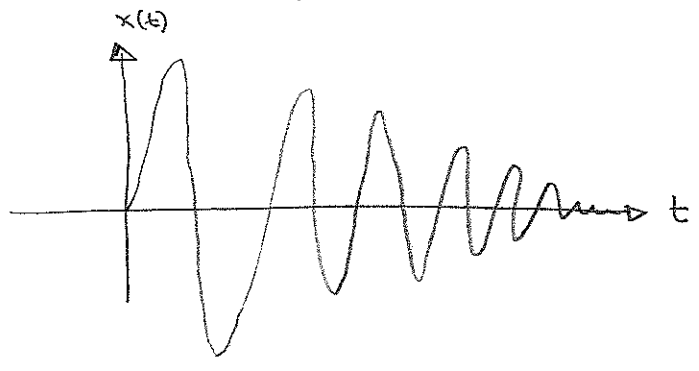
$$= A \cos(\omega t + \phi) + j A \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{Ταυτότητα Euler})$$

$$\Rightarrow A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \{ B e^{j\omega t} \}$$

1.4.4

Εκθετικά φθίνον ημιτονοειδές σήμα

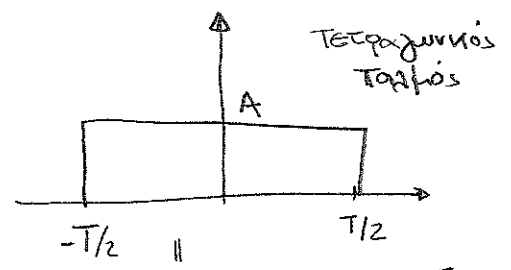
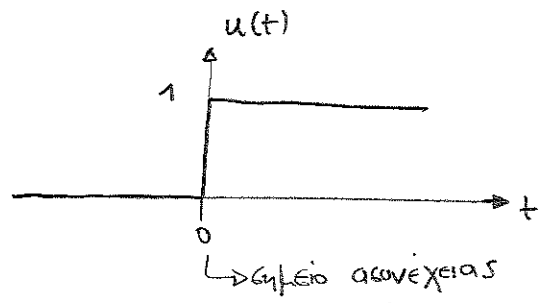
x(t) = Ae^{-at} sin(ωt + φ) ; a > 0



1.4.5

Βηματική συνάρτηση:

u(t) = { 1, t ≥ 0; 0, t < 0



∫_{-∞}^{+∞} u(t)x(t)dt = Nu[x(t)] = ∫_0^{+∞} x(t)dt

Au(t + T/2) - Au(t - T/2)

1.4.6

Συνάρτηση δέλτα (Κρουστική)

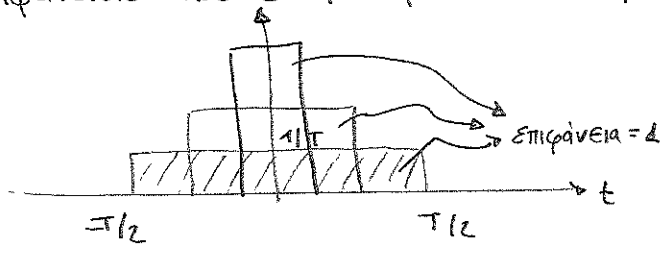
{ δ(t) = 0 ∀ t ≠ 0; ∫_{-∞}^{+∞} δ(t)dt = 1

• Παίρνει μηδενικές τιμές παντού εκτός από την αρχή των αξόνων και η συνολική επιφάνεια κάτω της δ(t) είναι μονάδα.

• Χρησιμοποιεί ως προσέγγιση ενός φυσικού βήματος εξαιρετικά μικρής διάρκειας και μεγάλου μέτρου. Η απόκριση ενός συστήματος σε τέτοια είσοδο έχει πολλή πληροφορία για το χαρακτήρα του συστήματος.

Ιδιότητες:

(α) Είναι το όριο μιας σειράς τετραγωνικών παλμών μοναδιαίας επιφάνειας καθώς η διάρκεια τους φεύγει στο μηδέν:



(P) Γενικευμένες συναρτήσεις ή κατανομές

• Μια κατανομή $f(t)$ αντιστοιχεί σε μια συνεχή συνάρτηση $\varphi(t)$ για τιμή $N_f[\varphi(t)]$. Π.χ.

↓
συνάρτηση δοκιμής.

$$N_f[\varphi(t)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

• $\delta(t)$ είναι μια κατανομή που αντιστοιχεί στην $x(t)$ συνάρτηση $x(0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = N_\delta[x(t)] = x(0)$$

(γ) Μετατόπιση: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$ (γ) Δειγματοληψία
 $x(t) \neq 0$ μόνο για $t \in [t_1, t_2]$
Τότε $\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} 0, & t_0 \notin [t_1, t_2] \\ x(t_0), & t_0 \in [t_1, t_2] \end{cases}$

(δ) Κλιμάκωση: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

(ε) Άρτια: $\delta(t) = \delta(-t)$

(ς) Ποζ. τε. συνάρτηση: $x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t)$

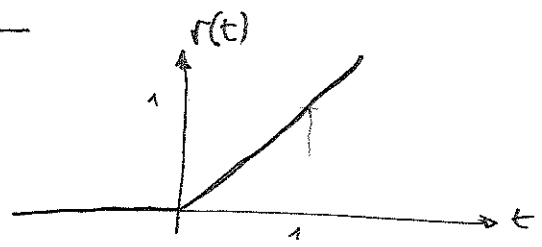
(ζ) Παράγωγος: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta^{(n)}(t-t_0) dt = (-1)^n x^{(n)}(t_0)$

$$\begin{aligned} \text{(η)} \quad \delta(t) &= \frac{d}{dt} u(t) : \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt \\ &= -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

1.4.7

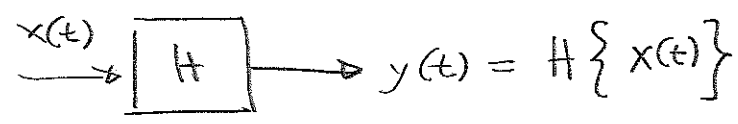
Συνάρτηση ραμπας

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



4.5 Ιδιότητες συστημάτων

Με μαθηματικούς όρους, ως σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ένα δίκτυο από τελεστές οι οποίοι μετασχηματίζουν ένα σήμα εισόδου σε ένα σήμα εξόδου:



Οι ιδιότητες ενός συστήματος περιγράφουν τα χαρακτηριστικά του τελεστή H:

(α) Ευστάθεια (stability)

Ένα σύστημα παρουσιάζει εκτάδεια φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου (ευστάθεια τύπου ΒΕΦΕ) (BIBO stable) αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδος του είναι φραγμένη:

$$|y(t)| \leq M_y < \infty \quad \forall t \quad \text{iff} \\ |x(t)| \leq M_x < \infty \quad \forall t.$$

(β) Μνήμη: (Memory)

Ένα σύστημα διαθέτει μνήμη αν η έξοδος του εξαρτάται από προηγούμενες τιμές της εισόδου.

Π.χ. 1/0 σχέση ενός πυκνωτή: $v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$: δυναμικό
Αντίστροφη: $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$ \rightarrow χωρίς μνήμη. : στατικό

(γ) Αιτιατότητα: (causality)

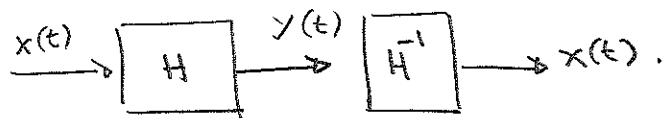
Ένα σύστημα είναι αιτιατό όταν η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την παρούσα και προηγούμενες τιμές του σήματος εισόδου.

Π.χ. $y(n) = \frac{1}{3} x(n) + \frac{1}{5} x(n-1) - \frac{1}{2} x(n-2)$: αιτιατό
 $y(n) = \frac{1}{3} x(n+1) + x(n) + \frac{2}{8} x(n-1)$: μη-αιτιατό

(δ) Αντιστρεψιμότητα (Invertibility)

Ένα σύστημα είναι αντιστρεψίμο αν η είσοδος του μπορεί να ανακτηθεί από την έξοδό του.

$$\bar{H}^{-1} \{y(t)\} = \bar{H}^{-1} \{H\{x(t)\}\} = \bar{H}^{-1} H \{x(t)\}$$



* Πολύ δύσκολο πρόβλημα! Σημαντικό σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα.

(ε) Χρονική Αμεταβλητότητα (Time Invariance)

Ένα σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό αν χρονικές μετατοπίσεις των σημάτων εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές μετατοπίσεις της εξόδου.

$$y(t) = H\{x(t)\} \iff y(t-t_0) = H\{x(t-t_0)\}$$

π.χ.
$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

$$i'(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau-t_0) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} v(\tau') d\tau' = i(t-t_0) \quad \checkmark$$

(στ) Γραμμικότητα (Linearity)

Ένα σύστημα είναι γραμμικό αν ικανοποιεί την αρχή της υπέρθεσης:

$$y_i(t) \triangleq H\{x_i(t)\}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)$$

$$y(t) \triangleq H\left\{\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^N \alpha_i H\{x_i(t)\} = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t)$$

Η αποκρίση στο γραμμικό συνδυασμό N εισόδων (ούτως ή αν) των αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους αποκρίσεων.

1.6 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑΣ)
στο πεδίο του χρόνου

- Θα χαρακτηρίσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με βάση τις έννοιες της κρουστικής απόκρισης (impulse response) και της συνέλιξης (convolution).

Κρουστική Απόκριση: ^{$h(t)$} Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος όταν αυτό διεγείρεται από το κρουστικό σήμα $\delta(t)$:

$$h(t) = H \{ \delta(t) \}$$

- Πειραματικά, η κρουστική απόκριση ενός συστήματος υπολογίζεται ως η έξοδος του σε μια διεγερση παλμού "μικρού" εύρους και "μεγάλου" πλάτους.

- Αν η είσοδος σ' ένα γραμμικό σύστημα εκφραστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός μετατοπισμένων κρουστικών παλμών, τότε η έξοδος δίνεται ως ο γραμμικός συνδυασμός των αποκρίσεων του συστήματος σε κάθε ένα από τους μετατοπισμένους παλμούς.

- Αν επιπλέον το σύστημα είναι και χρονικά αμετάβλητο η απόκριση του σε ένα μετατοπισμένο παλμό είναι ίση με τη μετατοπισμένη απόκριση του συστήματος σε ένα παλμό εισόδου τη χρονική στιγμή $t=0$.

Επιπλέον: η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως ο γραμμικός συνδυασμός χρονικά μετατοπισμένων κρουστικών αποκρίσεων. Αυτό είναι ένα άθροισμα συνέλιξης (για διακριτά) ομοκλήρωμα συνέλιξης (για αντισυνεχόμενα).

1.7 Ορισμός & Ιδιότητες Συνέλιξης

• Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός χρονικά μετατοπισμένων κρουστικών παλμών:

βροχή (rain) $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$ * \rightarrow show (14b)

• Κρουστική Απόκριση Συστήματος: $h(t) = H \{ \delta(t) \}$.

• ΧΑ σύστημα: $H \{ \delta(t-\tau) \} = h(t-\tau)$.

• Τότε $y(t) = H \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \right\}$

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) H \{ \delta(t-\tau) \} d\tau$ [H: γραμμικό]

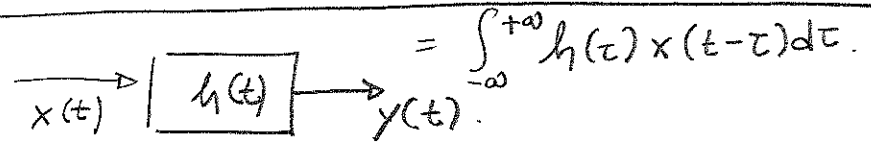
$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ [H: ΧΑ]

• Συνέλιξη δύο συναρτήσεων, $x_1(t)$ & $x_2(t)$:

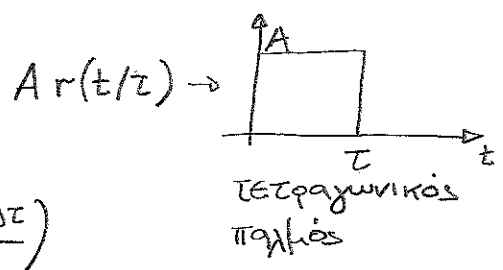
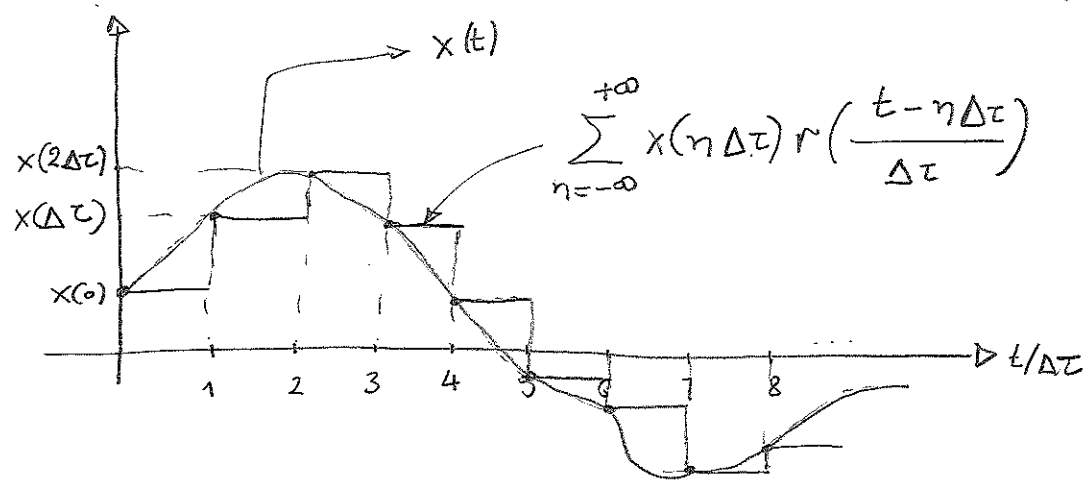
$x_1(t) * x_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$.

Επιπλέον, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ σε μια είσοδο $x(t)$ δίνεται ως:

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$.



Ολοκλήρωση συνέλιξης: ως όριο αθροίσματος



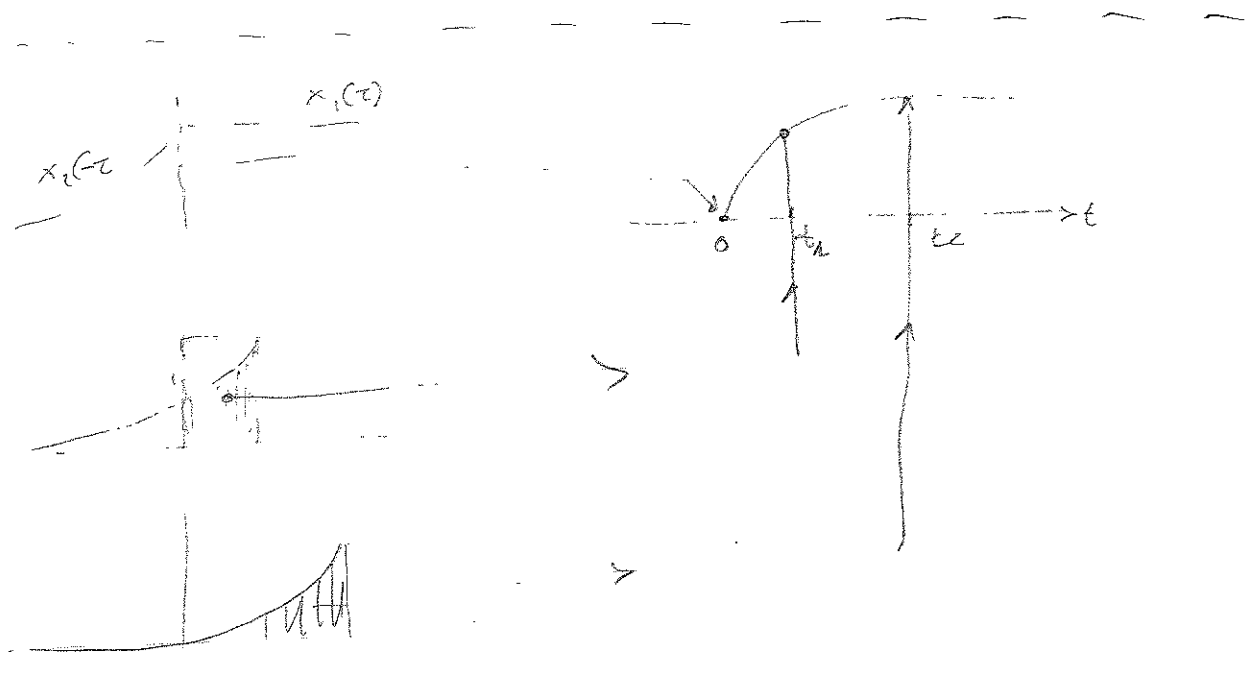
$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau) r\left(\frac{t-n\Delta\tau}{\Delta\tau}\right)$$

$$\approx \sum x(n\Delta\tau) \frac{1}{\Delta\tau} r\left(\frac{t-n\Delta\tau}{\Delta\tau}\right) \Delta\tau$$

Θέτουμε $\Delta\tau \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$ $n\Delta\tau \rightarrow \tau$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta\tau} r\left(\frac{t-\tau}{\Delta\tau}\right) \right] d\tau$$

$$\therefore x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$



Υπολογισμός της Συνέλιξης

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

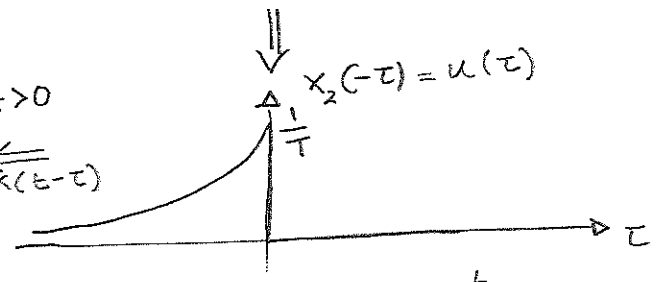
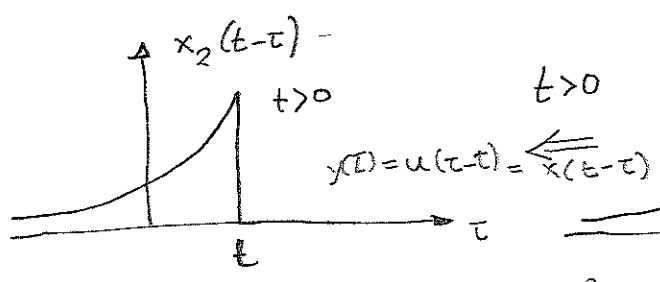
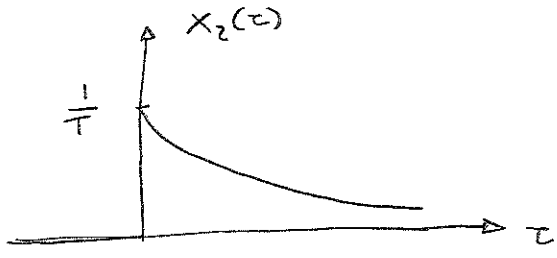
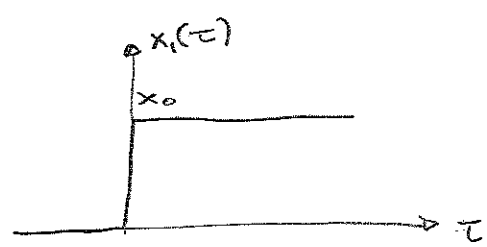
1. Σχηματίζουμε τη συνάρτηση $x_1(\tau)$
2. Σχηματίζουμε τη $x_2(-\tau)$ με περιστροφή της $x_2(\tau)$ γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.
3. Τοποθετούμε τις $x_1(\tau)$ & $x_2(-\tau)$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων
4. Για κάθε τιμή του t μετακινούμε την $x_2(-\tau)$ προς τα αριστερά αν $t < 0$ και προς τα δεξιά αν $t > 0$.
5. Πολλαπλασιάζουμε τις $x_1(\tau)$, $x_2(t-\tau)$ & ολοκληρώνουμε
6. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 4 & 5 $\forall t$.

Παράδειγμα:

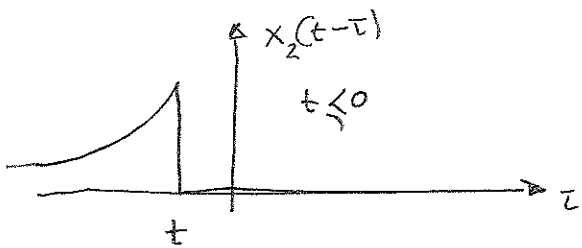
$$x_1(t) = x_0 \cdot u(t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \cdot u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$



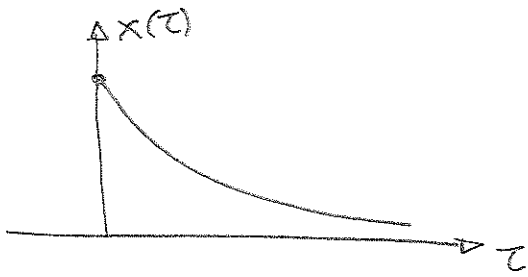
$$t > 0 : y(t) = \int_0^t x_0 \cdot \frac{1}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau = x_0 e^{-\frac{t}{T}} \left[e^{\frac{\tau}{T}} \right]_0^t = x_0 (1 - e^{-t/T})$$



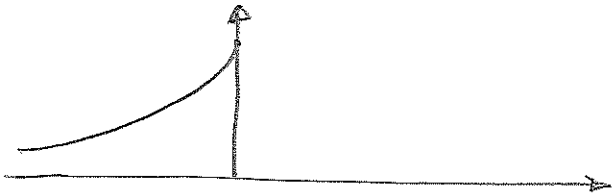
$$t \leq 0 : y(t) = \emptyset$$

Επομένως, $y(t) = x_0 (1 - e^{-t/T}) \cdot u(t)$

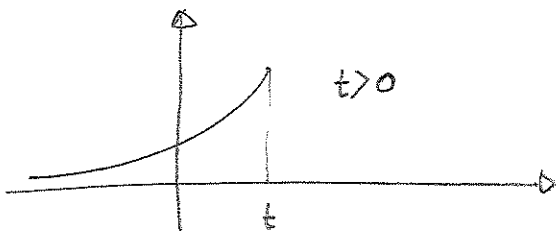
$$x(\tau) \rightarrow y(\tau) = x(t - \tau)$$



$$\Downarrow u(\tau) = x(-\tau)$$

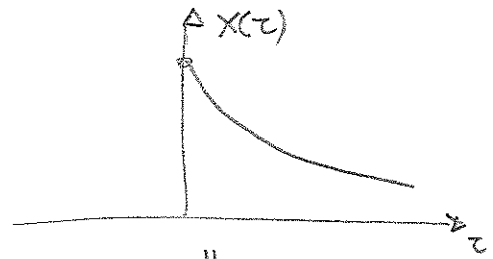


$$\Downarrow y(\tau) = u(\tau - t) = x(t - \tau)$$

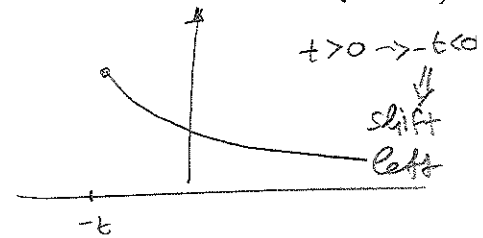


$$= x(a\tau - b) \text{ (50)}$$

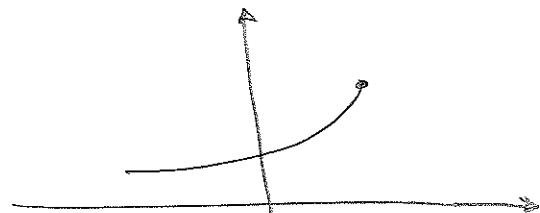
$$y(\tau) = x(-\tau + t)$$

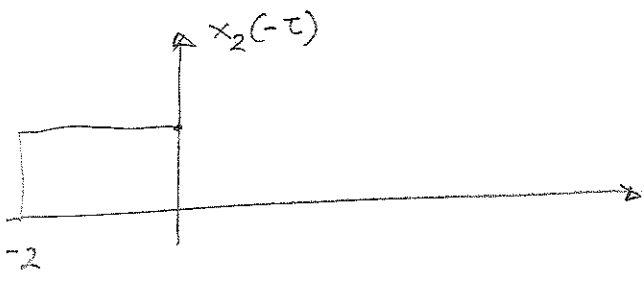
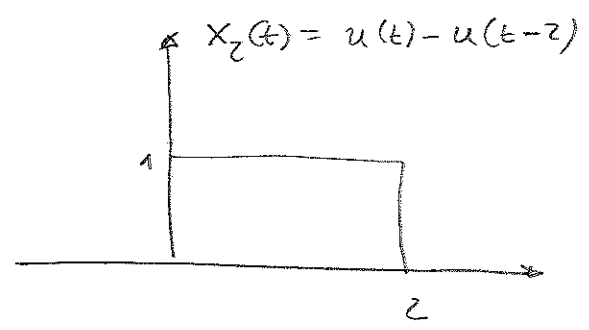
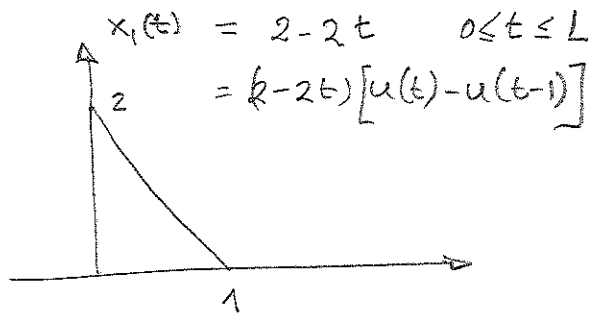


$$\Downarrow u(\tau) = x(\tau + t) = x(\tau - (-t))$$



$$\Downarrow y(\tau) = u(-\tau) = x(-\tau + t)$$





1. $t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$

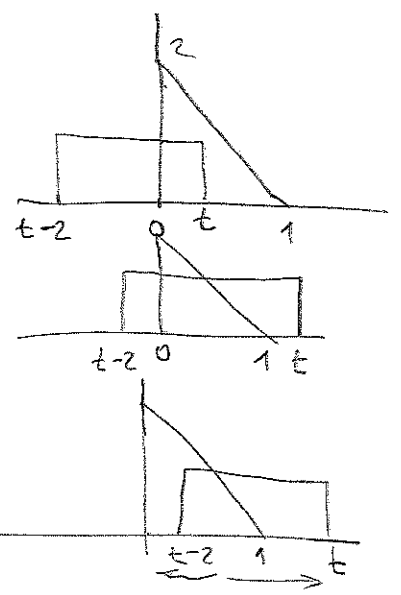
2. $t > 0$ • Αναφορικών τον t αυξάνεται η συνέλιξη ως όρου για $t=1$ παίρνει τη μέγιστη τιμή. Η συνέλιξη παραμένει σταθερή στην περιοχή $1 < t < 2$ και στη συνέχεια ελαττώνεται ή μηδενίζεται για $t=3$.

Πιο αναλυτικά

$0 \leq t \leq 1$: $y(t) = \int_0^t (2 - 2\tau) d\tau = 2t - t^2$

$1 \leq t \leq 2$: $y(t) = \int_0^1 (2 - 2\tau) d\tau = 1$

$2 \leq t \leq 3$: $\int_{t-2}^1 (2 - 2\tau) d\tau = 2\tau - \tau^2 \Big|_{t-2}^1$
 $= 2 \cdot 1 - 1^2 - (2(t-2) - (t-2)^2)$
 $= 1 - 2t + 4 + t^2 + 4 - 4t = 9 - 6t + t^2$



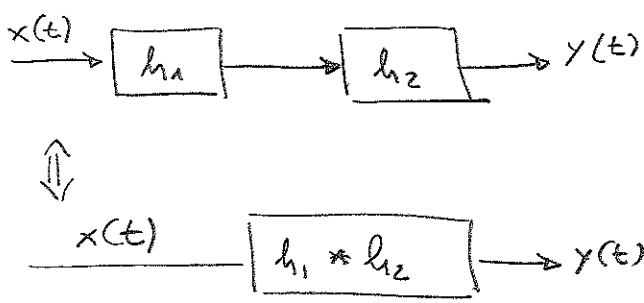
$t \geq 3 \Rightarrow y(t) = 0$

$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t - t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 9 - 6t + t^2 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$

□ Ιδιότητες συνέλιξης

(α) Προσεταιριστική ιδιότητα: (associative)

$$h_1(t) * [h_2(t) * x(t)] = [h_1(t) * h_2(t)] * x(t)$$



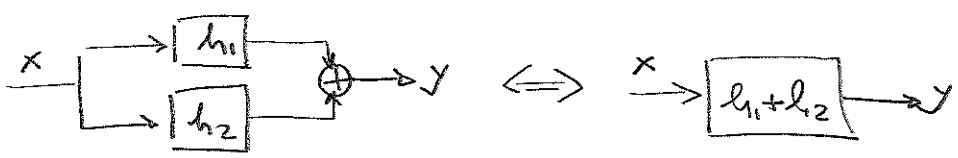
(β) Αντιμεταθετική ιδιότητα: (commutative)

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$



(γ) Επιμεριστική: (distributive)

$$[h_1(t) + h_2(t)] * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$$



(δ) Ταυτοτική

$$\begin{aligned}
 h(t) * \delta(t) &= h(t) \\
 h(t) * \delta(t - T) &= h(t - T) \\
 h(t - t_1) * \delta(t - t_2) &= \delta(t - t_1 - t_2)
 \end{aligned}$$

^{ΓΧΑ}
(ε) Συστήματα χωρίς κρήνη

$$\left. \begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\
 \text{και } y(t) &= c x(t)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{h(t) = c \delta(t)}}$$

(6) Αιτιατά ΓΧΑΣ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad t-\tau > t$$

Εξοδος δεν πρέπει να εξαρτάται από $x(t-\tau)$ με $\tau < 0 \Rightarrow$

$$\boxed{h(\tau) = 0 \quad \forall \tau < 0}$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau.$$

(7) Ευσταθή ΓΧΑΣ

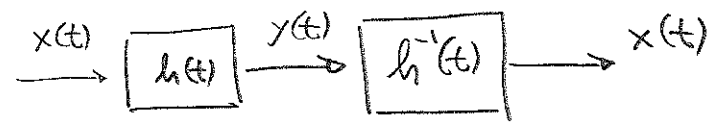
$$|y(t)| = |h(t) * x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau$$

Για φραγμένη είσοδο $x(t) : |x(t)| \leq M < \infty \quad \forall t$

$$\Rightarrow |y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

→ Συνεπώς η πρακτική απόκριση ενός ευσταθούς ΓΧΑΣ πρέπει να είναι κλιμακωτά φραγμένη.

(8) Αντιεστρέψιμα ΓΧΑΣ



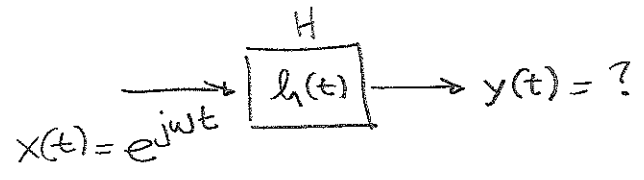
$$x(t) * h(t) * h^{-1}(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow \underline{h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)}$$

Π.χ. Σύστημα $h(t) = e^{at} u(t)$.

- Ευσταθές αν $a < 0$
- αιτιατό $\forall a$
- με μνήμη.

1.8 Απόκριση ΓΧΑΣ σε διεγέρσεις κληής συχνότητας.



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

γωνία ανεξάρτητη του χρόνου, t

Ορίζουμε $H(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$, απόκριση συχνότητας του συστήματος.

$$y(t) = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

- Το σήμα στην έξοδο είναι το ίδιο το μιγαδικό εκθετικό (της ίδιας συχνότητας) αλλά με διαφορετικό πλάτος ($|H(j\omega)|$) και φάση ($\arg\{H(j\omega)\}$).

*
Επομένως, αν μελετήσουμε τρόπους περιγραφής ενός σήματος ως υπέρθεσης σημάτων κληών συχνότητας ($e^{j\omega t}$), η έξοδος ενός ΓΧΑΣ θα είναι η υπέρθεση αυτών των ίδιων σημάτων με βάρη που ορίζονται από την απόκριση συχνότητας, $H(j\omega)$, του συστήματος.

* Θέτουμε $\psi(t) = e^{j\omega t}$. Τότε: $H\{\psi(t)\} = \lambda \cdot \psi(t) \sim \underline{\underline{Ae}} = \lambda \underline{\underline{e}}$
 $\lambda = H(j\omega)$

$\psi(t) = e^{j\omega t} \rightarrow$ ιδιοσυνκρίβεις (eigenfunction)
 $\lambda = H(j\omega) \rightarrow$ ιδιοτιμές (eigen values)

Ο προσανατολισμός των $\underline{\underline{e}}$ στον N-διάστατο χώρο παραμένει αμετάβλητος από το χωρικό μετασχηματισμό που ορίζεται από το $\underline{\underline{A}}$

• Αν εκφράσουμε $x(t) = \sum_{k=1}^M a_k e^{j\omega_k t}$ είσοδο σε ΓΧΑ σύστημα.
 τότε $y(t) = \sum_{k=1}^M a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$. Άρα, η πράξη της

γωνία της κεντρίζεται σε πολλαπλασιασμό !!

2. ANALYSE FURIER

Στόχος: Περιγραφή ενός σήματος με ένα γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών τριγωνομετρικών εκφράσεων της μορφής $e^{j\omega t}$.

Υπάρχουν τέσσερις περιγραφές Fourier ανάλογα με τις χρονικές ιδιότητες του σήματος:

Χρονική Ιδιότητα	Περιοδικό	Μη-Περιοδικό
Συνεχούς Χρόνου	Σειρά Fourier, ΣΦ (Fourier Series, FS)	Μετασχηματισμός Fourier, MF (Fourier Transform, FT)
Διακριτού Χρόνου	ΣΦ Διακριτού Χρόνου (Discrete-Time FS, DTFS)	MF Διακριτού Χρόνου (DTFT)

2.1 Ορθογωνιότητα Μιγαδικών Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων.

Το εσωτερικό γινόμενο (ΕΓ) δύο περιοδικών σήματων (T) δίνεται ως

$$I_{k,m} = \int_{\langle T \rangle} \phi_k(t) \phi_m^*(t) dt$$

όπου $\langle T \rangle$ δηλώνει ολοκλήρωση σε διάστημα εύρους T.

Θεωρείστε μιγαδικές τριγ. συναρτήσεις με συχνότητες που διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο της βασικής συχνότητας ω_0 . Τότε $\frac{2\pi}{T}$

$$I_{k,m} = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k=m \\ \frac{1}{j(k-m)\omega_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} \Big|_0^T, & k \neq m \end{cases}$$

Αλλά, $e^{j(k-m)\omega_0 T} = e^{j(k-m)2\pi} = 1$

$$\Rightarrow \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$$\leadsto \phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega_0 t} ; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

αποτελούν ένα σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης.

2.2 Περιοδικά Σήματα Συνεχούς-χρόνου: Ανάλυση σε σειρά Fourier.

Εστω $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T .

Θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ με τη σειρά

$$\hat{x}_M(t) = \sum_{k=-M}^M A(k) e^{jk\omega_0 t} , \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Προσέγγιση υπό ποια έννοια?? - Ελαχιστοποίηση της μέσης ισχύος του σφάλματος: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}_M(t)$.

$$MSE_M \triangleq \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t) - \hat{x}_M(t)|^2 dt : \text{Μέση Ισχύς του σφάλματος!}$$

$$\begin{aligned}
MSE_M &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \left| x(t) - \underbrace{\sum_{k=-M}^M A(k) e^{jk\omega_0 t}}_{e(t)} \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e(t) e^*(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-M}^M A(k)^* \left(\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right) \\
&\quad - \sum_{k=-M}^M A(k) \left(\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk\omega_0 t} dt \right) + \\
&\quad + \sum_{k, l=-M}^M A_k A_l^* \left(\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{-j(k-l)\omega_0 t} dt \right) \begin{matrix} \rightarrow 1 \text{ } k=l \\ \rightarrow 0 \text{ } k \neq l \end{matrix}
\end{aligned}$$

Θέτουμε $X(k) \triangleq \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

Τότε

$$\begin{aligned}
MSE_M &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-M}^M A(k)^* X(k) - \sum_{k=-M}^M A(k) X(k)^* + \sum_{k=-M}^M |A(k)|^2 \\
&\quad + \sum_{k=-M}^M |X(k)|^2 - \sum_{k=-M}^M |X(k)|^2 \\
MSE_M &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt + \sum_{k=-M}^M |A(k) - X(k)|^2 - \sum_{k=-M}^M |X(k)|^2
\end{aligned}$$

Το MSE_M ελαχιστοποιείται ως προς $A(k)$ όταν

$$A(k) = X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Τότε: $\min_{MSE_M} = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=-M}^M |X(k)|^2$.

Γενίκευση: Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$ ως το γραμμικό συνδυασμό N συναρτήσεων βάσης $\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)$ ορθοκανονικών:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_k(t) \phi_l^*(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \phi_k(t)$$

Το $MSE \triangleq \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt$ ελαχιστοποιείται

όταν
$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_k^*(t) dt$$

↳ προσοχή της $x(t)$ στη συνάρτηση βάσης $\phi_k(t)$.

Τότε $\min MSE = \frac{1}{t_2-t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \right]$.

• $MSE = 0$ if $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$

Τότε η βάση $\{\phi_k(t)\}_{k=0, \dots, N-1}$ λέγεται "πλήρης"

• Έστω τώρα ότι $M \rightarrow \infty \rightsquigarrow \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A(k) e^{jk\omega_0 t}$ (22)

Επίλυση:

$$A(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

• Κάτω από ποίες συνθήκες $\hat{x}(t)$ συγκρίνει στην $x(t)$???

• Πλήρως ανάλογα πέρα από τους σκοπούς μας. Μπορούμε να πούμε τα εξής:

1. Αν ισχύει ότι $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$, δηλ. για ούτως ή άλλως το MSE μεταξύ $x(t)$ & $\hat{x}(t)$ είναι μηδέν.

Αυτό δεν σημαίνει ότι $x(t)$ & $\hat{x}(t)$ είναι ίσες σε κάθε σημείο ($\forall t$) αλλά ότι η διαφορά τους έχει μηδενική ενέργεια.

2. $x(t) = \hat{x}(t)$ για όλα τα σημεία t εκτός από τα σημεία ασυνεχίας της $x(t)$ είναι ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:

- η $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, τετραπεδωμένων μεγέθους στο διαστήμα T
- η $x(t)$ είναι φραγμένης κλίμακας στο T (τετραπεδωμένο αριθμό μεγίστων, ελαχίστων)
- η $x(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη: $\int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$.

• Στα σημεία ασυνεχίας, t_0 ,

$$\hat{x}(t_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) \right]$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΣΕΙΡΑ FOURIER:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}; \omega_0} X(k)$$

Επίλυση Σύνθεσης \rightarrow

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

- : Ειδικτική σειρά Fourier
- : άθροισμα αρμονικών
- ω_0 : θεμελιώδης συχνότητα

Επίλυση Ανάλυσης \rightarrow

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

: συντελεστές Fourier

\rightarrow αναπαράσταση του σήματος στο πεδίο της συχνότητας: φάσμα

$|X(k)| \rightarrow$ πλάτος αρμονικών \rightarrow φάσμα πλάτους
 φάσμα \rightarrow φάσμα φάσης.
 (φάσμα συχνότητας γραμμικό & διπλευρό)

* Δύο αναποφραστάσεις του σήματος:

- 1) Στο πεδίο του χρόνου: $x(t)$ αναλογικό (συνεχούς χρόνου) ψ περιοδικό
- 2) Στο πεδίο της συχνότητας: $\{X(k)\}$ διακριτή, μη-περιοδική σειρά.

□ Ισχύς σήματος: Θεώρημα Parseval.

$$\begin{aligned}
 \text{Μέση ισχύς: } P &\triangleq \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) x^*(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \sum_k X^*(k) X(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2 \\
 \therefore P &\triangleq \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2
 \end{aligned}$$

Επιπλέον το ύψος κάθε γραμμής στο γράφημα αντιστοιχεί στην ισχύ της αντίστοιχης αρμονικής.

□ Συμμετρικές ιδιότητες

$$X^*(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk\omega_0 t} dt$$

Εστω $x(t)$ πραγματικό σήμα: $x^*(t) = x(t)$. Τότε

$$X^*(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k)\omega_0 t} dt = X(-k)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \operatorname{Re}\{X(k)\} &= \operatorname{Re}\{X(-k)\} \\
 \operatorname{Im}\{X(k)\} &= -\operatorname{Im}\{X(-k)\}
 \end{aligned}$$

και $|X(k)| = |X(-k)| \rightarrow$ γράφημα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση
 $\arg\{X(k)\} = -\arg\{X(-k)\} \rightarrow$ γράφημα φάσης είναι περιττό.

II Τριγωνομετρική Σειρά Fourier

Βάση: $\phi_{1k}(t) = \sqrt{2/T} \cos k\omega_0 t$

$\phi_{2k}(t) = \sqrt{2/T} \sin k\omega_0 t$

Σύνθεση: $x(t) = \frac{A(0)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [A(k) \cos k\omega_0 t + B(k) \sin k\omega_0 t]$

Ανάλυση: $A(k) = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \cos k\omega_0 t dt$

$B(k) = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \sin k\omega_0 t dt$

$A(0) = \frac{2}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt$

Συγκρίνοντας την εκθετική ή την τριγωνομετρική σειρά Fourier,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}, \quad X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$A(0) = X(0)$$

$$A(k) = X(k) + X(-k)$$

$$B(k) = j[X(k) - X(-k)]$$

$$X(k) = \frac{A(k) - jB(k)}{2}$$

Π Παράδειγμα 1ε : Ποια είναι η σειρά Fourier του $x(t) = 3 \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$?

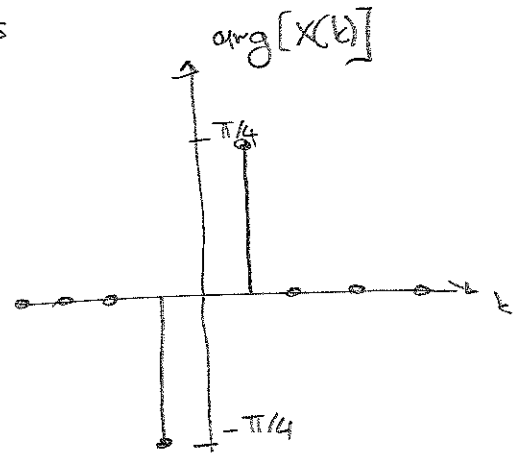
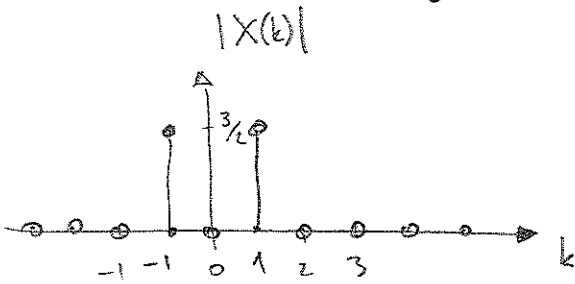
Η βασική περίοδος του $x(t)$ είναι : $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 4$.

Επομένως $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$: Διευκρινίζοντας συχνότητες

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk \frac{\pi}{2} t} \quad \text{όπου} \quad X(k) = \frac{1}{4} \int_0^4 x(t) e^{-jk \frac{\pi}{2} t} dt$$

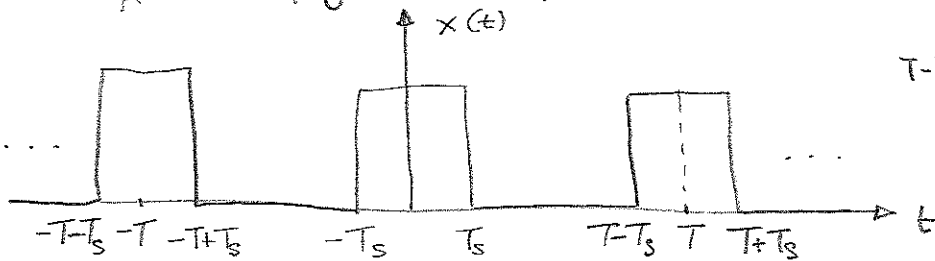
$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \frac{e^{j(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})}}{2} = \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j(\frac{\pi}{2})t} + \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{2}t}$$

$$\Rightarrow X(k) = \begin{cases} \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} & , k = -1 \\ \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} & , k = 1 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Π Παράδειγμα 2ε

FS του κύματος τετραγωνικών παλμών (πυροσειράς)



$$T - T_s > T_s \Rightarrow T_s < \frac{T}{2}$$

Περίοδος : T $\rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_s}^{T_s} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{-1}{Tjk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_s}^{T_s}$$

\uparrow
 $k \neq 0$

$$X(k) = \frac{2}{Tkw_0} \frac{e^{jk\omega_0 T_s} - e^{-jk\omega_0 T_s}}{2j} = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_s)}{Tkw_0}, k \neq 0$$

Για $k=0$, $X(0) = \frac{1}{T} \int_{-T_s}^{T_s} dt = \frac{2T_s}{T}$

Αλλά, με τον κανόνα του L'Hopital, $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{2 \sin(k\omega_0 T_s)}{Tkw_0} = \frac{2T_s}{T}$

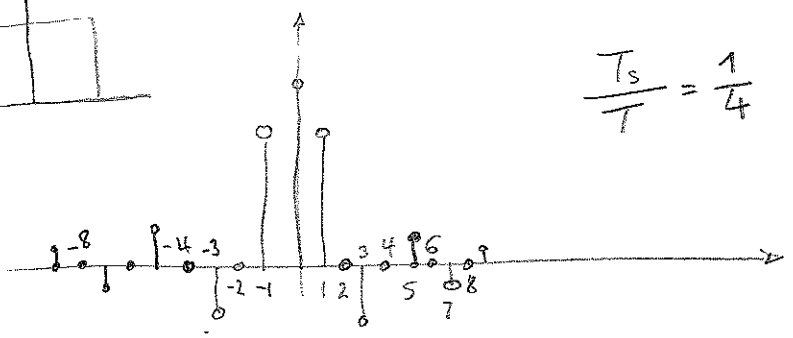
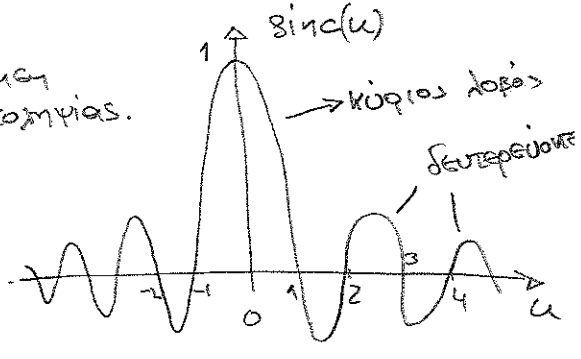
Επομένως,

$$X(k) = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_s)}{Tkw_0} = \frac{2 \sin(k \frac{2\pi T_s}{T})}{2k\pi}$$

$$= \frac{2T_s}{T} \frac{\sin(k \frac{2\pi T_s}{T})}{k \frac{2\pi T_s}{T}} = \frac{2T_s}{T} \text{sinc}\left(k \frac{2T_s}{T}\right)$$

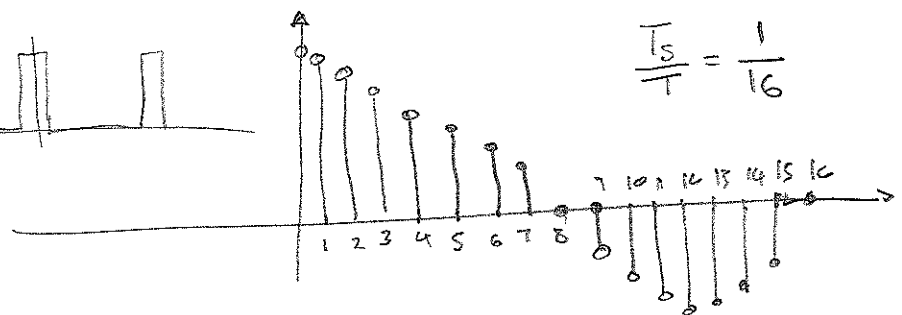
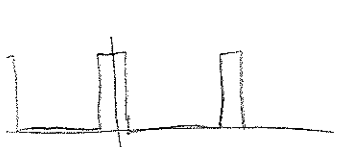
όπου $\text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$: συνάρτηση δειγματισμού.

- * $\max \text{sinc}(u) = 1$ για $u=0$.
- * $\text{sinc}(u) = 0 \Leftrightarrow \pi u = k\pi$, για $u = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$



$$\frac{T_s}{T} = \frac{1}{4}$$

Μυδενίζεται όταν:
 $k \frac{2T_s}{T} = k \frac{1}{2} = l \Rightarrow k = 2l$
 $= \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$



$$\frac{T_s}{T} = \frac{1}{16}$$

$k \frac{2T_s}{T} = k \frac{1}{8} = l \Rightarrow k = 8l$
 $= \pm 8, \pm 16, \dots$

- Όσο μειώνεται το $\frac{T_s}{T}$, το σήμα "συγκεντρώνεται" στο πεδίο των χρόνων αλλά η σειρά Fourier "απλώνει" στο πεδίο της συχνότητας. \rightarrow αρχή της αβεβαιότητας.
- Όσο η περίοδος T μεγαλώνει, τόσο η πυκνότητα των φασματικών γραμμών αυξάνεται.

□ Μουσικοί ήχοι: ύψος, ένταση, χροιά → 3 χαρακτηριστικά.

Υψος: αντιστοιχεί στη συχνότητα του κύματος.

- Γρήγορες δονήσεις της πηγής ήχου παράγουν διαπεραστική, υψηλή νότα
- Αργές " " " " " " βαθιά, χαμηλή νότα.

πχ.: Μεσαίο 'do' στο πιάνο → 264 Hz

- Αλλαγή στη συχνότητα της δονούμενης ηχητικής πηγής → διαφορετικοί μουσικοί φθόγγοι.
- Αλλαγή επιτυγχάνεται αλλάζοντας το μήκος της χορδής στα έγχορδα ή το μήκος της δονούμενης στήλης του αέρα στα πνευστά.

Ένταση: αντιστοιχεί στο ^{πλάτος} _{τετραγωνό του} του ηχητικού κύματος.

Είναι αντικειμενική ή φυσική ιδιότητα που μπορεί να μετρηθεί.

Από την άλλη, η ηχηρότητα ή ακουστικότητα είναι υποκειμενικό αίσθημα.

Στάθμη θορύβου μετρείται σε db. 0db → κατώφλι ακοής
85db → φθόγγοι στο σπίτι.

* Μπορούμε να διακρίνουμε με μεγάλη κριβεία το ύψος ενός ήχου αλλά όχι την ένταση.

Χροιά: Ο ήχος αποτελείται από ένα βασικό τόνο (ή φθόγγο) ^(βασική αρμονική) και από ένα εύλογο αδνεστερών τόνων με μεγαλύτερο ύψος (ανώτεροι αρμονικοί).

• Οι υψηλότερες συχνότητες των ανωτέρων αρμονικών δίνουν τη χαρακτηριστική χροιά. Είναι δε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής. Το πλάτος & η σχετική ηχηρότητα των αρμονικών παράγουν τη χροιά.

□ Μαγικές Κλίμακες

Από το 530 π.Χ. ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι οι φθόγγοι που παίζονται μαζί στα έγχορδα ακουγονται ευχάριστα όταν οι λόγος των συχνοτήτων τους είναι λόγοι μικρών ακέραιων αριθμών.

Νότα "do"	33	66	132	264	528	1056	2112	4224 Hz.
	↑ χαμνό							

Μαγική Κλίμακα : Μια ακολουθία φθόγγων με συχνότητες που σχετίζονται με τους λόγους μεταξύ τους.

Μείζων Διατονική Κλίμακα του do'

Notes	do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
Συχνότητα (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528
συνήθειο συχν.	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Διαστήματα	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	
↓ λόγος συχνοτήτων δύο φθόγγων		μικρός	μικρός	μετ.				

→ Σημεία συχν. από το do'

□ Ανάλυση Fourier

Πως τα αυτιά μας αναγνωρίζουν αφέως διαφορετικά όργανα που παίζουν, τους μαγικούς φθόγγους, και τη σχετική έντασή;

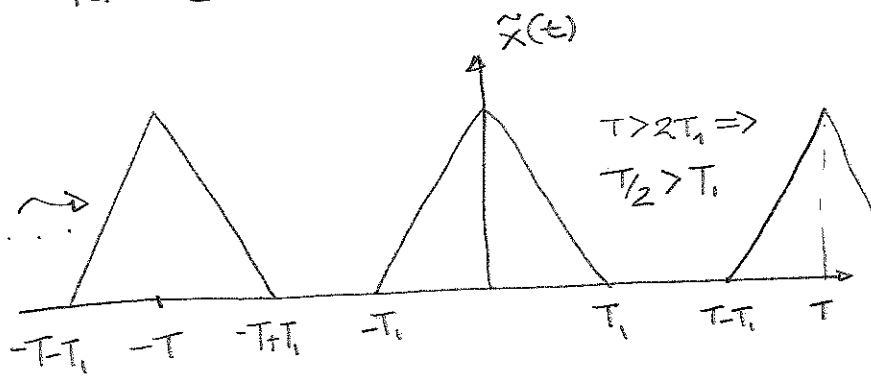
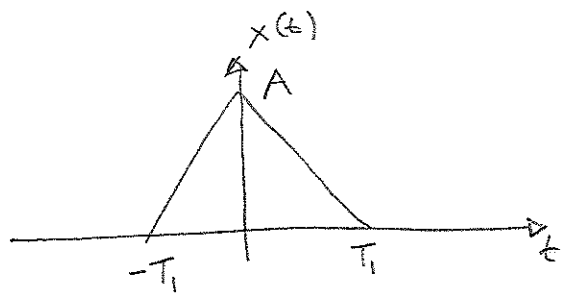
- Πραγματοποιούν ανάλυση Fourier!!!

2.3 Μη-περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου: Μετασχηματισμός Fourier (28)

Έστω ένα μη-περιοδικό σήμα που κωδικοποιείται για $|t| > T/2$.

Σχηματίσουμε το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με τρόπο ώστε:

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & , \quad -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & , \quad |t| > T/2 \end{cases}$$



Παρατηρούμε ότι καθώς $T \rightarrow \infty$ τα "είδη" του $x(t)$ μετακινούνται στο άπειρο $\&$ επομένως, $x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t)$.

Τώρα, η σειρά Fourier για το περιοδικό σήμα είναι:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t} \quad \text{όπου}$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Τώρα δίνεται $X(k) = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$ όπου $X(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

Συνεπώς $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

Αλλά $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$. Συνεπώς $\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$

Όσο αυξάνεται η περίοδος, T , $T \rightarrow \infty$, τότε $\omega_0 \rightarrow d\omega$. Επίσης ορίζουμε $k\omega_0 \triangleq \omega$. $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$

Τελικά $x(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (FT) \rightarrow \text{μη-περιοδικό, συνεχές}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (IFT) \rightarrow \text{μη-περιοδικό, συνεχές}$$

• Εκφράζουμε το μη-περιοδικό σήμα σαν μια υπέρθεση απείρων σιγμάτων αθρών συχνοτήτων της μορφής $e^{j\omega t}$.

• Κάποιες συνθήκες για την ύπαρξη του μετασχηματισμού: Συνθήκες Dirichlet
Καυτοποιούνται από τα σήματα ενέργειας αλλά όχι από τα σήματα ισχύος, δέξα, εντάξει, να

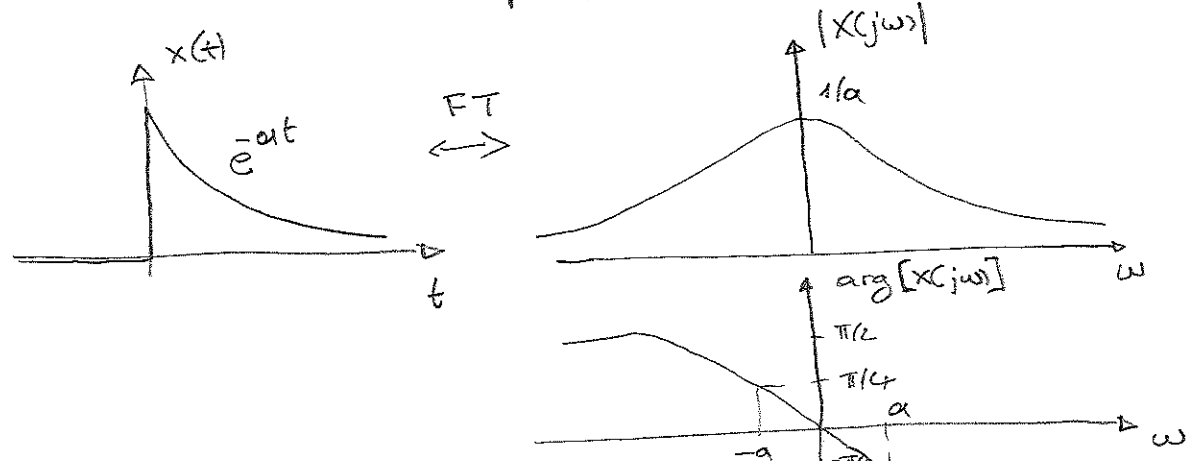
• Για ορισμένες (γενικευμένες) συνθήσεις που δεν πληρούν τις συνθήκες Dirichlet, ο ΜΦ υπάρχει και είναι σημαντικό εργαλείο επίλυσης προβλημάτων.

• Παράδειγμα 1: Πραγματικό εκθετικό σήμα: $x(t) = e^{-at} u(t); a > 0$.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$X(j\omega) = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow |X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \arg\{X(j\omega)\} = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



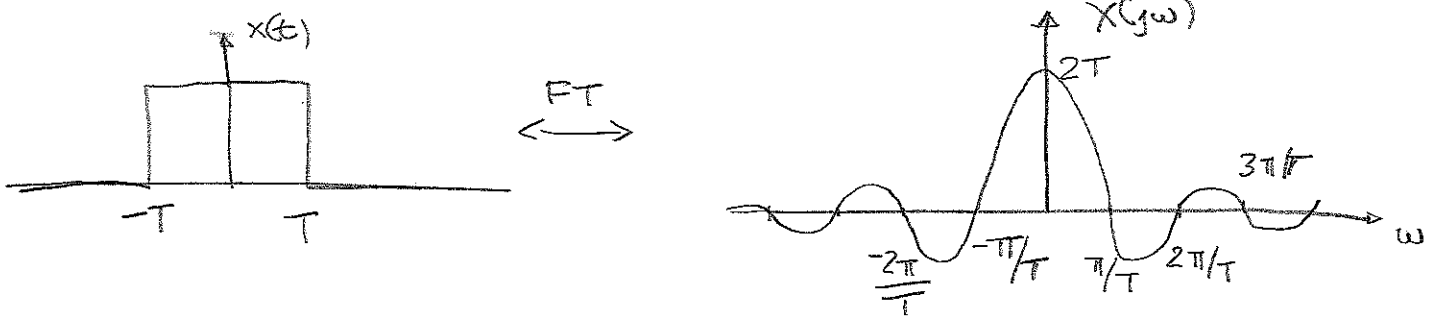
2ο : Τετραγωνικός παλμός: $x(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \left. -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right|_{-T}^T \quad (\omega \neq 0)$$
$$= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) \quad \omega \neq 0$$

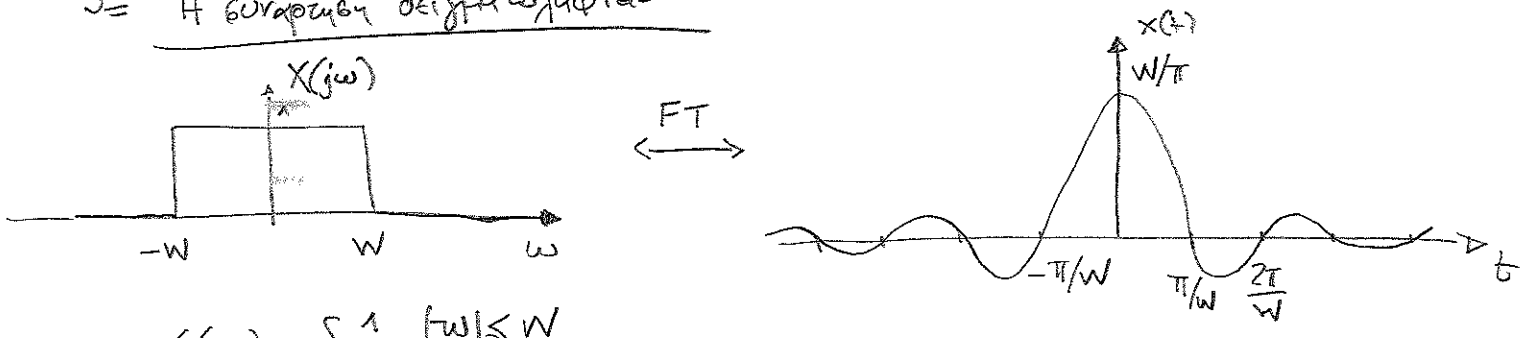
Για $\omega=0$, $X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 2T$

Αλλά $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = 2T = X(j0)$

Τότε, $X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$



3ο Η συρρομένη δειγματοληψία



$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \left. \frac{1}{2j\pi t} e^{j\omega t} \right|_{-W}^W = \frac{1}{\pi t} \sin(Wt) = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \quad t \neq 0$$

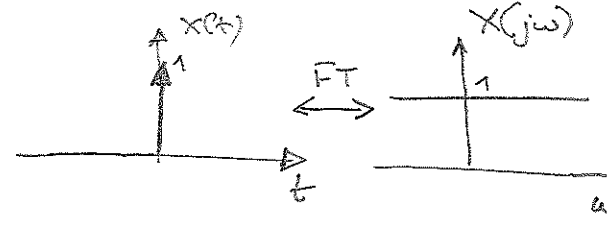
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t} \sin(Wt) = \frac{W}{\pi}$$

Παρατήρηση: Όταν το "είδος" των εστιασών μεγαλώνει στο ένα ημίση, τότε κεντρώνει στο άλλο !!!

4. Το κρουστικό σήμα, $\delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

Επομένως, $\boxed{\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1}$

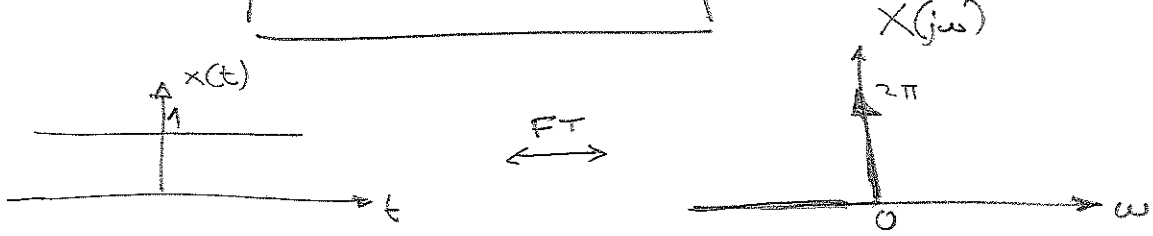


5. DC σήμα

Εστω $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$. Τότε

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

$\Rightarrow \boxed{1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)}$



2.4 Ιδιότητες των σιγμών ή των μετασχηματισμού Fourier

(1) Γραμμική Ιδιότητα

$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FT} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FS, \omega_0} Z(k) = aX(k) + bY(k)$$

(2) Ιδιότητες συζυγίας

(i) Πραγματικά σήματα: $x(t) = x^*(t)$.

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{+j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = X(-j\omega)$$

$$\Rightarrow |X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \quad \text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\}$$
$$\arg[X(j\omega)] = -\arg[X(-j\omega)] \quad \text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\}$$

(Remember : $X(j\omega) = \operatorname{Re}\{X(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\}$
 $= |X(j\omega)| e^{j \arg\{X(j\omega)\}}$

και $|X(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{X(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{X(j\omega)\}^2}$

$\arg\{X(j\omega)\} = \tan^{-1}(\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} / \operatorname{Re}\{X(j\omega)\})$

(ii) Φανταστικά σήματα: $x(t) = -x^*(t)$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$X^*(j\omega) = -X(j\omega)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = -\operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}$$

$$\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = \operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}$$

Οι σχέσεις για το μέτρο & το οριζή είναι ακριβώς όπως στο (i).

(iii) $x(t)$ πραγματικό και άρτιο σήμα: $x^*(t) = x(t)$ και $x(-t) = x(t)$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε, } X^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j\omega(-t)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(j\omega) \end{aligned}$$

$$\therefore X^*(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow \underline{X(j\omega) \text{ πραγματικό}}$$

(iv) $x(t)$ πραγματικό & περιττό σήμα: $x^*(t) = x(t)$ και $x(-t) = -x(t)$

$$\text{Ομοίως } \Rightarrow X^*(j\omega) = -X(j\omega) \Rightarrow \underline{X(j\omega) \text{ μιγαδικό}}$$

(3) Χρονική Μετατόπιση

Έστω: $z(t) = x(t-t_0)$

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (\tau = t-t_0)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$\therefore \begin{array}{l} x(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \\ x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS, \omega_0} e^{-j\omega_0 t_0} X(k) \end{array}$$

Παρατήρηση: $|Z(j\omega)| = |X(j\omega)|$
 $\arg\{Z(j\omega)\} = \arg\{X(j\omega)\} - \omega t_0$

* Επομένως η χρονική μετατόπιση αφήνει το φάσμα πλάτους αμετάβλητο και μετατοπίζει τη φάση κατά μία γραμμική συνάρτηση της συχνότητας. Η κλίση της γραμμικής φάσης είναι ίση με την μετατόπιση t_0 .

(4) Μετατόπιση Συχνότητας

Έστω $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$, και $Z(j\omega) = X(j(\omega-\gamma))$

Τότε $z(t) = ?$

- Από τον ορισμό, $z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j(\omega-\gamma)) e^{j\omega t} d\omega \quad (\eta = \omega-\gamma)$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\eta) e^{j(\eta+\gamma)t} d\eta = e^{j\gamma t} x(t)$

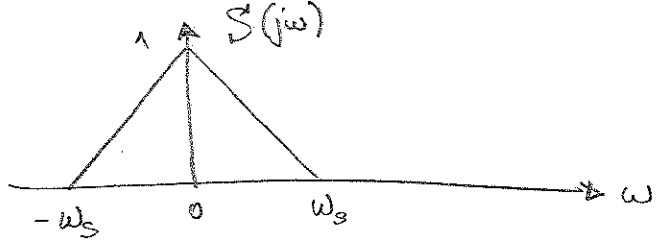
$$\therefore \begin{array}{l} e^{j\gamma t} x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega-\gamma)) \\ e^{jk_0 \omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{FS, \omega_0} X(k-k_0) \end{array}$$

* Επομένως μετατόπιση στη συχνότητα ^{κατά γ} αντιστοιχεί στο πεδίο του χρόνου με πολλαπλασιασμό με ένα κλαδικό εκθετικό του οποίου η συχνότητα είναι ίση με γ .

* Εφαρμογή (Τηλεπικοινωνίες): $X(t) = s(t) \cdot \cos \omega_f t$

\swarrow Διαφοροποιήσιμο σήμα
 \downarrow σήμα πληροφορίας (πχ φωνή, δεδομένα, μουσική...)
 \searrow φέρουσα.

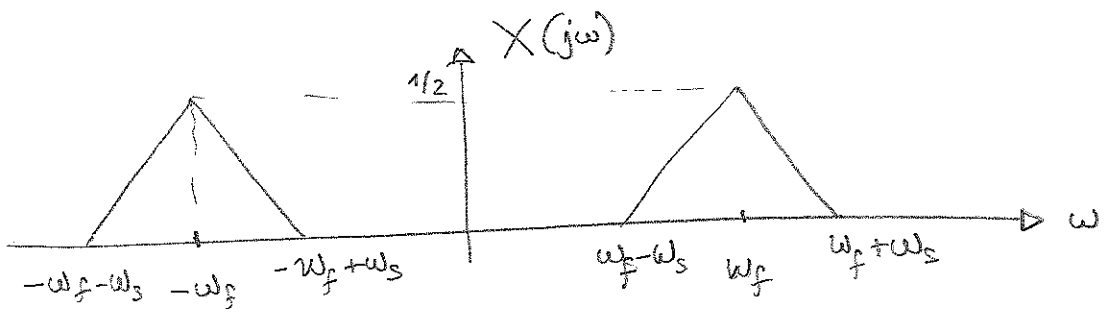
Έστω: $s(t) \xleftrightarrow{FT} S(j\omega)$ μηδενίζεται για $|\omega| > \omega_s$



Τιπο είναι το $X(j\omega)$?

$$x(t) = s(t) \cos \omega_f t = s(t) \frac{e^{j\omega_f t} + e^{-j\omega_f t}}{2}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_f)) + X(j(\omega + \omega_f))]$$



Έστω: $z(t) = x(at)$.

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt \quad (\tau = at)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

$$\therefore Z(j\omega) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X(j\frac{\omega}{a})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(at) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{|a|} X(j\omega/a) \\ x(at) \xleftrightarrow{\text{FS, } a\omega_0} X(k) \end{array}}$$

* Επομένως, η μεταβολή της διάρκειας στο χρόνο συνεπάγεται αν αντίστροφη μεταβολή της διάρκειας στη συχνότητα. (Αλλά για έκφραση της γενικής αρχής της φυσικής, της αρχής της αβεβαιότητας).

* Για περιοδικό $x(t)$ με $T \Rightarrow z(t)$ περιοδικό με περίοδο T/a .

Πράγματι, $z(t) = x(at) = x(at+T) = x(a(t+T/a)) = z(t+T/a)$ □

Επομένως η φυσική συχνότητα του $z(t)$ είναι $\frac{2\pi}{T/a} = a \frac{2\pi}{T} = a\omega_0$

Τότε $Z(k) = \frac{a}{T} \int_{\langle T/a \rangle} z(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{a}{T} \int_{\langle T/a \rangle} x(at) e^{-jk\omega_0 t} dt$
($\tau = at$)

$$= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = X(k)$$

Δηλαδή οι συντελεστές Fourier του $x(t)$ & $x(at)$ είναι ίδιοι. Μόνο η απόσταση τους αλλάζει (από ω_0 σε $a\omega_0$).

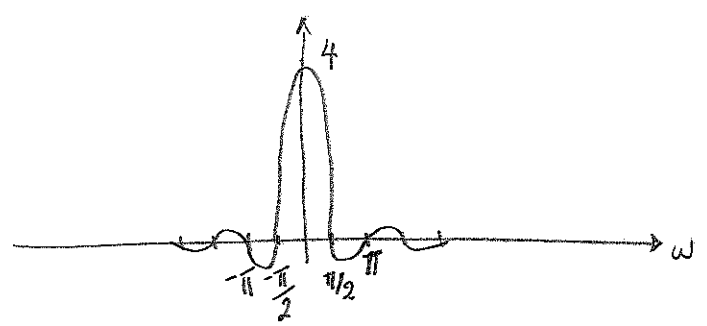
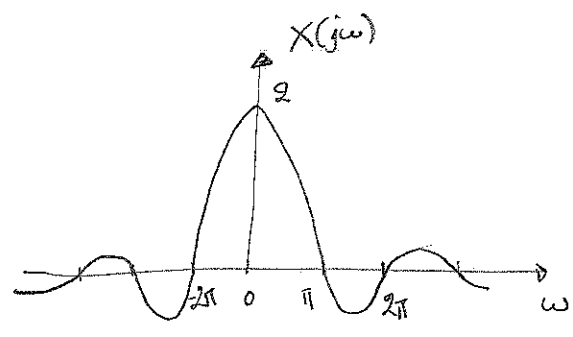
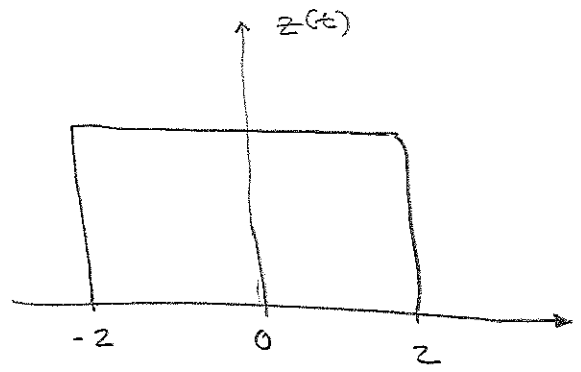
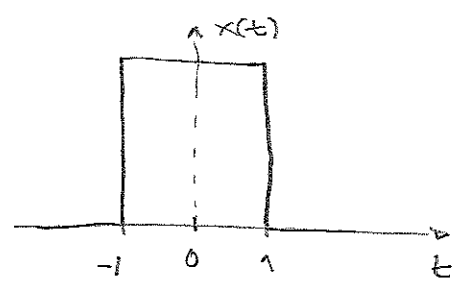
* Παράδειγμα: $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

$z(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases}$

Διπλασιάζω $z(t) = x(\frac{1}{2}t)$.

Τότε $Z(j\omega) = 2 X(j2\omega)$. Άλλα $X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega)$

$\therefore Z(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(2\omega)$



* Αντιστροφή $a = -1 \Rightarrow x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-j\omega)$.

(6) Παραγωγή & ολοκλήρωση

(i) Παραγωγή στο πεδίο του χρόνου.

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$z(t) := \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega$

$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$

$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{F_{s,\omega_0}} jk\omega_0 X(k)$

Παρατήρηση: Η παραγωγή
 • κεντρίζει τη μέση τιμή του σήματος, επομένως $Z(0) =$
 • ενισχύει τις υψηλές συχνότητες του σήματος.

Επίσης: $\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega)$.

(ii) Παραγωγή στη συχνότητα.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{d}{d\omega} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jt x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\boxed{-jt x(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{d}{d\omega} X(j\omega)}$$

Επίσης: $t^n x(t) \xleftrightarrow{FT} (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(j\omega)$.

(iii) Ολοκλήρωση

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Σε θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού
Αν η $x(t)$ είναι συνεχής στο $[-\infty, b]$ τότε $y(t)$
 $\iff \frac{d}{dt} y(t) = x(t)$: είναι διαφορίσιμη $\forall t \in [-\infty, b]$
και

$$\implies Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) \quad \forall \omega \neq 0$$

Τι γίνεται για $\omega=0$?

Η παραγωγή μηδενίζει κάθε dc συνιστώσα του $y(t)$ συνεπώς θα έπρεπε $X(j0)=0$. Γενικώς θέλουμε να ολοκληρώσουμε σήματα με μη μηδενική μέση τιμή, i.e., $X(j0) \neq 0$. Η $Y(j0)$ μεταβάλλεται προσθέτοντας τον όρο $\pi X(j0) \delta(\omega)$ στην $Y(j\omega)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega)}$$

* Η ολοκλήρωση είναι μια διαδικασία που "αμαρτοποιεί" τα σήματα στο χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι στο πεδίο της συχνότητας, οι συνιστώσες υψηλής συχνότητας των σήματος πρέπει να έχουν μικρότερο βάρος, κάτι που φαίνεται και στην παραπάνω σχέση αφού υπάρχει ο όρος $\frac{1}{j\omega}$ που πολλαπλασιάζει το $X(j\omega)$.

Παράδειγμα: Βηματική συνάρτηση $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

• $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

• $\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$

Επομένως, $\left[u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$

(7) Ιδιότητες συνέλιξης & διαφοράωσης

Σημαντικές ιδιότητες για την ανάλυση ΓΧΑΣ. Είναι συνέπειες του γεγονότος ότι οι μιγαδικές εκθετικές είναι ιδιοσυναρτήσεις ΓΧΑΣ.

(i) Μη-περιοδική συνέλιξη

Έστω $y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

Είναι $x(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$

Επομένως, $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\omega d\tau$

$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

∴ $y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$

* Επομένως: Συνέλιξη: στο πεδίο του χρόνου ισοδυναφεί με πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας.

Εφαρμογή: Μελέτη ΓΧΑΣ !!

(ii) Διαφορών

Εστω $y(t) = x(t) z(t)$

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(jv) e^{jvt} dv$, $z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(j\eta) e^{j\eta t} d\eta$.

$y(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint X(jv) Z(j\eta) e^{j(\eta+v)t} d\eta dv$
($\eta = \omega - v$)
 $= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2\pi} \int X(jv) Z(j(\omega-v)) dv e^{j\omega t} d\omega$
 $X(j\omega) * Z(j\omega)$

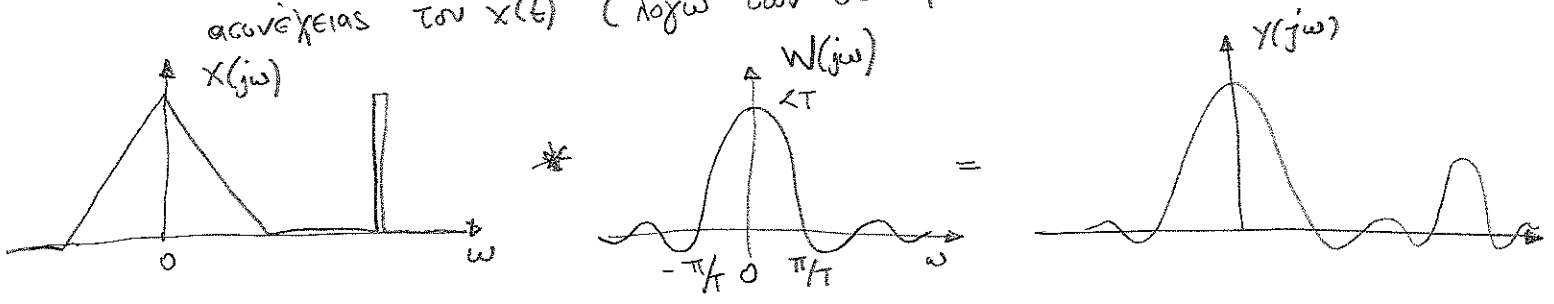
$\Rightarrow y(t) = x(t) z(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$

Εφαρμογή: Παραθύρωση βημάτων:

$y(t) = x(t) w(t)$ όπου $w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$

Τότε $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * W(j\omega)$
όπου $W(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T)$.

Το αποτέλεσμα του παραθύρωμα είναι: (1) να διαχέει τις λεπτομέρειες του βήματος $x(t)$ (λόγω του πλάτους $2\pi T$ του κύριου λοβού της $W(j\omega)$), και (2) να εισάγει ταλαντώσεις κοντά στα βήματα α συνέχειας του $x(t)$ (λόγω των δευτερευόντων λοβών του $W(j\omega)$).



(8) Σχέση Parseval

Η ενέργεια ενός αναλογικού περιοδικού σήματος είναι:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{X(j\omega)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad : \text{FT}$$

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2 \quad : \text{FS}$$

* Η ενέργεια (ισχύς) διατηρείται στην αναπαράσταση Fourier.

(9) Συμμετρική Ιδιότητα (Duality)

Έστω $x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$

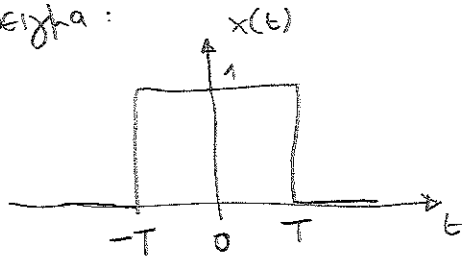
$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega \tau} d\omega \quad (\tau = -t)$$

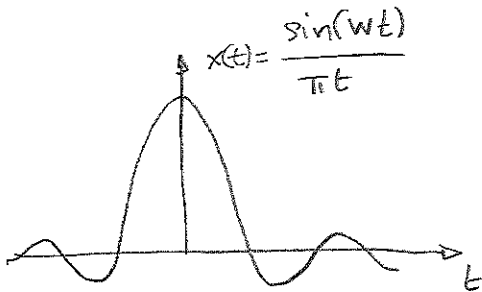
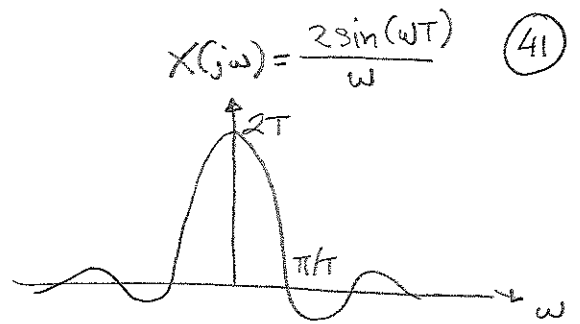
$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{X(jt) \xleftrightarrow{\text{FT}} 2\pi x(-\omega)}$$

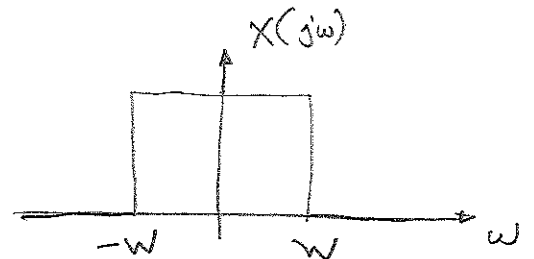
Παράδειγμα :



FT
↔



↔
t \quad \omega



(10) Γινόμενο χρόνου-εύρους ζώνης (Time-Bandwidth product).

Εύρος ζώνης \triangleq Το εύρος συχνοτήτων όπου βρίσκεται το (bandwidth). Κυρίως μέτρο της ενέργειας του σήματος.

• Χρονική διασπορά $T_d \triangleq \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \right]^{1/2}$

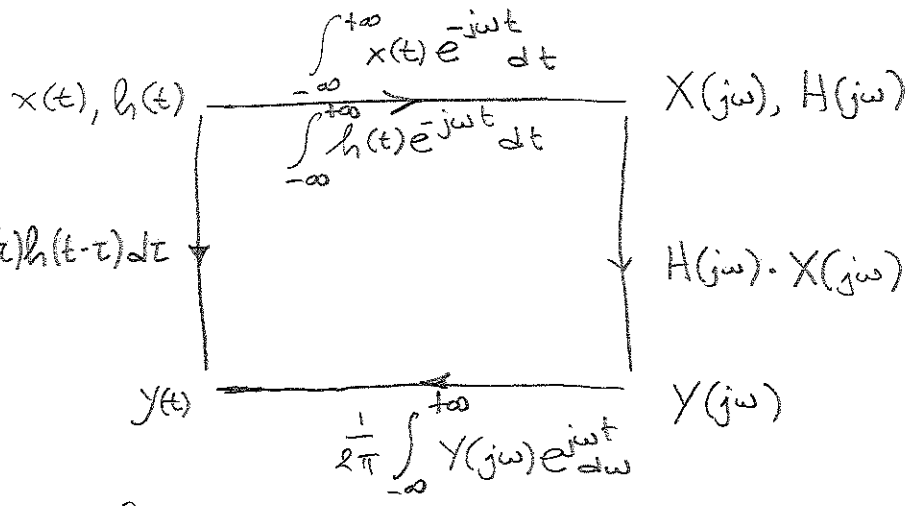
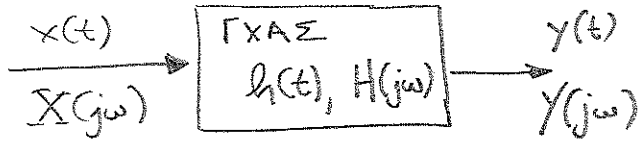
• Εύρος ζώνης $B_w \triangleq \left[\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2}$

$$\boxed{T_d B_w \geq \frac{1}{2}}$$

→ Δε μπορούμε συγχρόνως να μειώσουμε τη χρονική διασπορά και το εύρος ζώνης του σήματος.

2.5 Εφαρμογές της Ανάλυσης Fourier

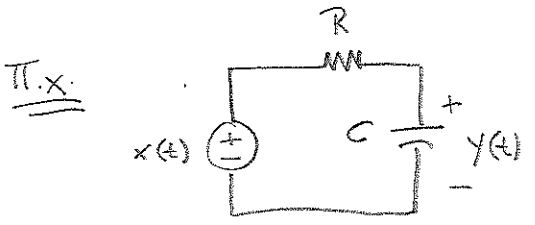
2.5.1 Απόκριση συχνότητας (Συνάρτηση μεταφοράς) ΓΧΑΣ



← Πεδίο χρόνου → Πεδίο συχνότητας →

$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$: απόκριση συχνότητας (Frequency response) συστήματος.

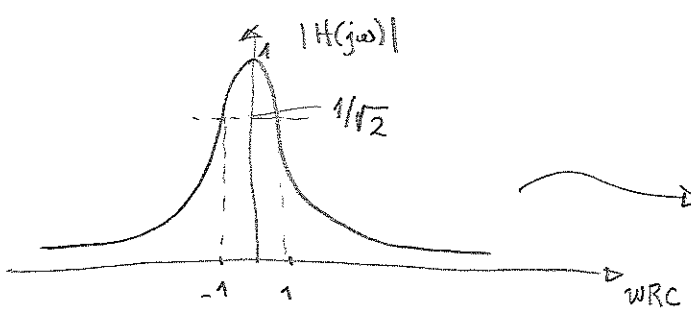
Το σύστημα αυτό ονομάζεται και "Φίλτρο" γιατί μπορεί να σχεδιαστεί έτσι ώστε να επιτρέπει να περνούν συγκεκριμένες ζώνες συχνότητας του σήματος εισόδου.



$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$

$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 (RC)^2}}$



καλύτερο φίλτρο (lowpass filter).

Παρατήρηση: Εξ ορισμού, η απόκριση συχνότητας περιγράφει την αλλαγή στο μέτρο και τη φάση που το σύστημα εφαρμόζει σε ένα μιγαδικό εκθετικό κλάμα συχνότητας. Το σήμα εισόδου υποτίθεται ότι υπάρχει $\forall -\infty < t < \infty$. Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση συχνότητας είναι η μόνιμη απόκριση (steady-state response) στο ημιτονοειδές σήμα, και δεν μπορεί να εκφράσει τη μεταβατική απόκριση (transient response) του συστήματος.

2.5.2 Λύση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΓΔΕ)

Η διαφορική εξίσωση αποτελεί άρα ένα μαθηματικό μοντέλο ενός συστήματος. Για ένα ΓΧΑΣ με είσοδο $x(t)$ & έξοδο $y(t)$, το μοντέλο αυτό εκφράζει τη σχέση εισόδου-εξόδου ως εξής:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad : \text{ (ΓΔΕ)}$$

- * Η γραμμικότητα του συστήματος εκφράζεται με το ότι όλοι οι παράγωγοι είναι υψωμένοι στην πρώτη δύναμη y & δεν υπάρχουν όροι με γινόμενα παραγώγων.
- * Η χρονική αμεταβλητότητα εκφράζεται με το γεγονός ότι οι συντελεστές $\{a_k, b_k\}$ είναι ανεξάρτητοι του χρόνου.
- * Αν θεωρήσουμε το σύστημα αυταυτό (φυσικά ηθελημένο) τότε πρέπει $y(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

* Για να λυθεί η διαφορική εξίσωση απαιτούνται:

- (1) Το χρονικό διάστημα όπου ζητούμε τη λύση.
- (2) Ένα πλήθος από N αρχικές συνθήκες: Η έξοδος $y(t)$ και οι $N-1$ πρώτες παράγωγοί της για $t=0$.

*
$$\begin{pmatrix} \text{ολική} \\ \text{λύση} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Εξαναγκασμένη} \\ \text{λύση} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Ελεύθερη} \\ \text{λύση} \end{pmatrix}$$

\downarrow εξαρτάται μόνο από την είσοδο (αρχικές συνθήκες = 0) \downarrow οφείλεται στις αρχικές συνθήκες.

- * Μεταβατική Απόκριση (Transient Response) \triangleq Το τμήμα της λύσης που τείνει στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$.
- * Μόνιμη Απόκριση (steady-state Resp.) \triangleq Το τμήμα που δεν τείνει στο μηδέν καθώς $t \rightarrow \infty$.

Στόχος: Η χρήση μετασχηματισμών για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

- Γιατί?
- Η διαφορική μετατρέπεται σε αλγεβρική (απλοποίηση).
 - Χρήση πινάκων μετασχηματισμών διευκολύνει τη λύση.
 - Οι αρχικές συνθήκες εισέρχονται στη λύση κατά το μετασχηματισμό. Η λύση που υπολογίζουμε είναι η ολική.
 - Δίνεται η δυνατότητα μελέτης του συστήματος σε ένα άλλο πεδίο, αυτό της συχνότητας.

□ Χρήση μετασχηματισμού Fourier

Η συνήθισμένη χρήση του FT για επίλυση της ΔΕ είναι για τον υπολογισμό της εξόδου στη μόνιμη κατάσταση για είσοδο συνημιτονοειδή διέγερση.

Παίρνουμε το FT και στα δύο μέρη της ΓΔΕ ή κάνουμε χρήση της ιδιότητας $\frac{d^n}{dt^n} x(t) \xleftrightarrow{FT} (j\omega)^n X(j\omega)$.

Τότε
$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$\therefore H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

Βλέπουμε ότι η απόκριση ενχυόμενης είναι λόγος δύο πολυνομίων ως προς $j\omega$.

Παράδειγμα:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) + x(t)$$

$$FT \Rightarrow (j\omega)^2 Y(j\omega) + 3(j\omega) Y(j\omega) + 2Y(j\omega) = 2(j\omega) X(j\omega) + X(j\omega)$$

$$\therefore H(j\omega) = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{-1}{j\omega + 1} + \frac{3}{j\omega + 2}$$

$$\Rightarrow h(t) = 3 e^{-2t} u(t) - e^{-t} u(t)$$

2.5.3 FT περιόδων σημάτων

Εστω $x(t)$ περιοδικό σήμα (T). Τότε η FS δίνεται ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Πρώτον, $FT \{ e^{jk\omega_0 t} \} = ?$

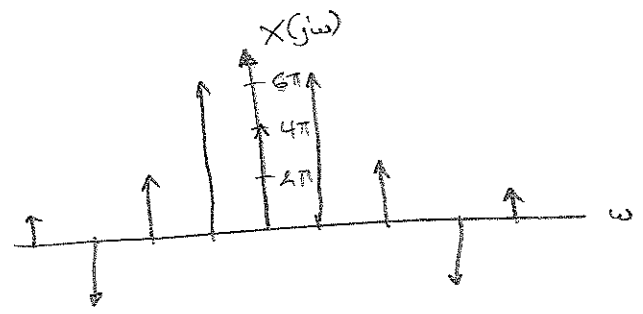
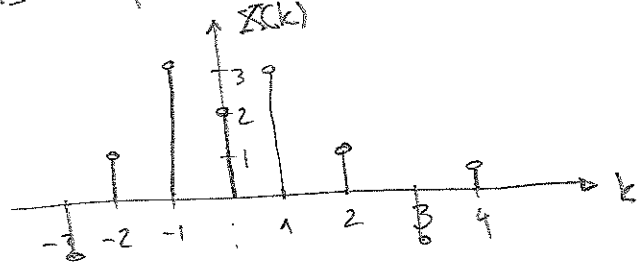
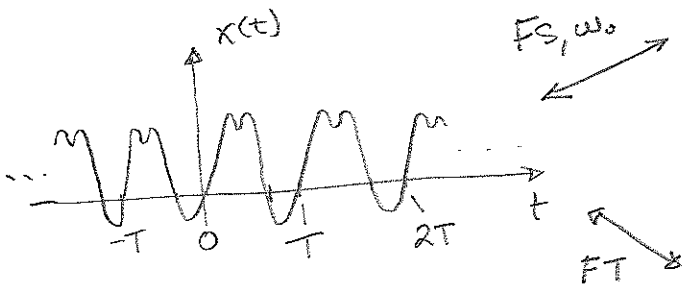
- $1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$
- $e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
- $y(t) = 1$
- $\gamma = k\omega_0$

$$e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

Συνεπώς

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) \delta(\omega - k\omega_0)$$

Η μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι μια σειρά κρουστικών παλμών που απέχουν μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση συχνότητας ω_0 . Ο κενός παλμός έχει πλάτος $2\pi X(k)$, όπου $X(k)$ είναι ο k-στος συντελεστής της σειράς Fourier του $x(t)$.

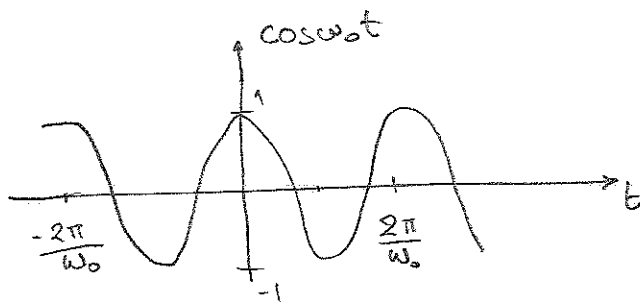


Παράδειγμα: $x(t) = \cos \omega_0 t$

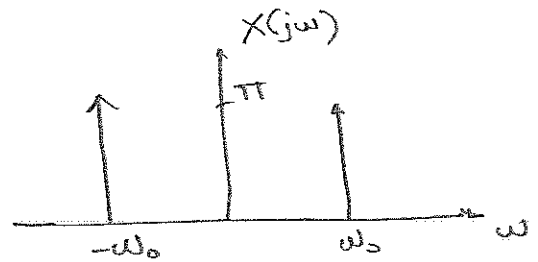
$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{FS, \omega_0} X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \\ 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \omega_0 t \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$



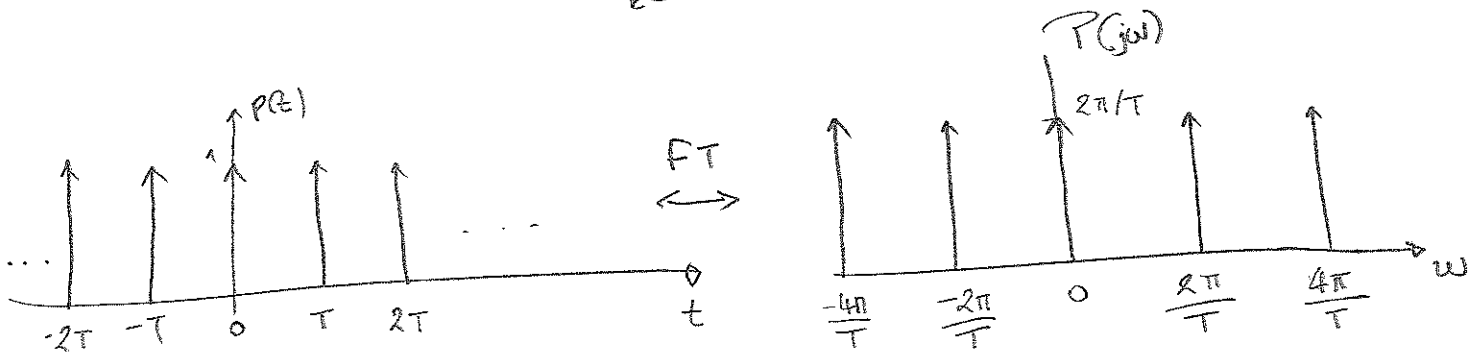
FT
↔



Παράδειγμα: Συχνός κρυσταλλικών πησσών: $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$

Οι συντελεστές Fourier είναι: $P(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$

$$\therefore P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$



2.5.4 Δειγματοληψία (Sampling)

Έστω $x(t)$ ένα αναλογικό σήμα (συνεχούς χρόνου). Ορίζουμε το σήμα διακριτού χρόνου ως εξής:

$$x(n) \triangleq x(nT_s) \quad , \quad T_s: \text{περίοδος δειγματοληψίας.}$$

Ας αναπαραστήσουμε το σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ ως ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_\delta(t)$ χρησιμοποιώντας μία σειρά κρατικών παλμών:

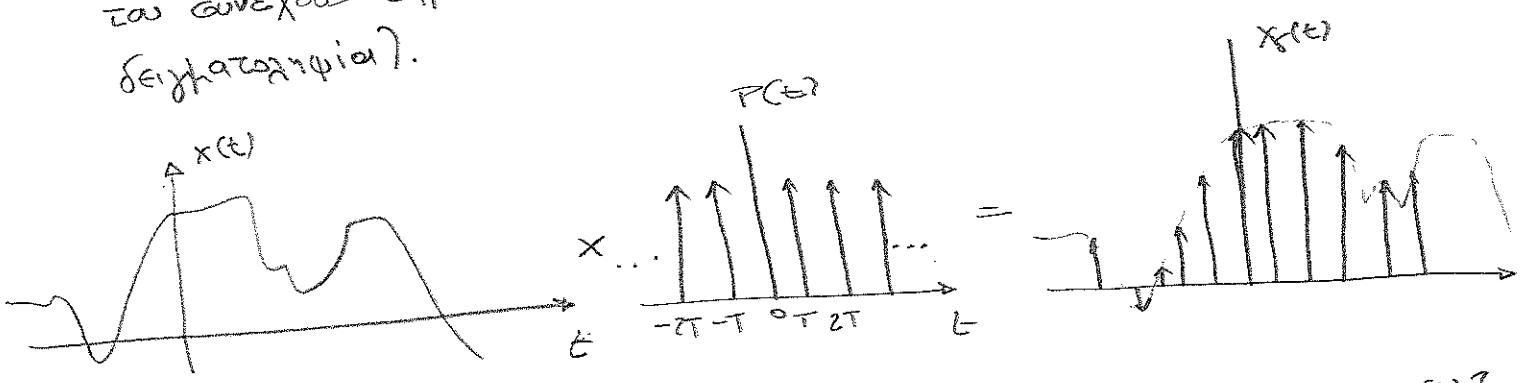
$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(t - nT_s)$$

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - nT_s)$$

$$\therefore x_\delta(t) = x(t) \cdot p(t) \quad \text{όπου} \quad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

Δηλαδή, εκφράσαμε το διακριτό σήμα $x_\delta(t)$ ως το γινόμενο του συνεχούς σήματος $x(t)$ με ένα σφηδίο ώσεων $p(t)$ (ιδανική δειγματοληψία).



Ερώτηση: Τι επίδραση έχει η δειγματοληψία πάνω στο $x(t)$?

Απάντηση: Μελέτησε τη σχέση μεταξύ $FT\{x_\delta(t)\}$ & $FT\{x(t)\}$

$$x_\delta(t) = x(t) \cdot p(t) \Rightarrow$$

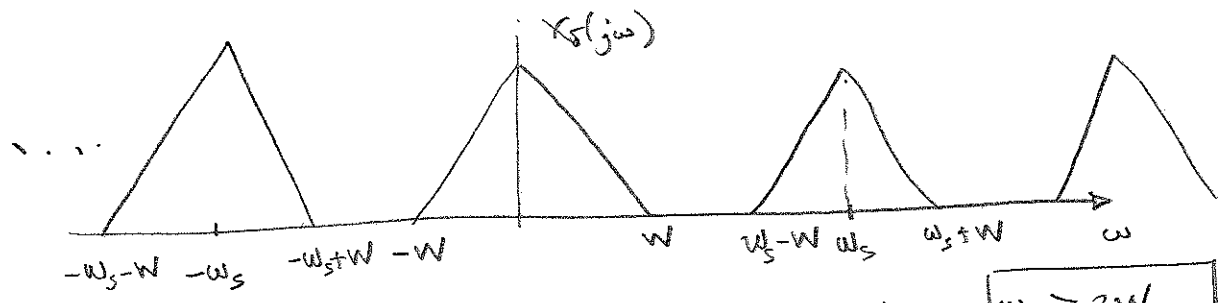
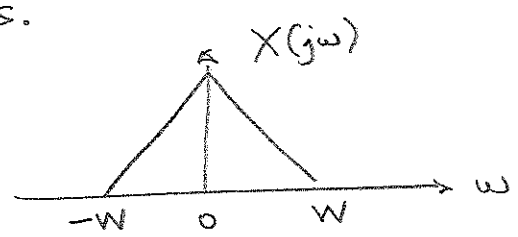
$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$\text{όπου } P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

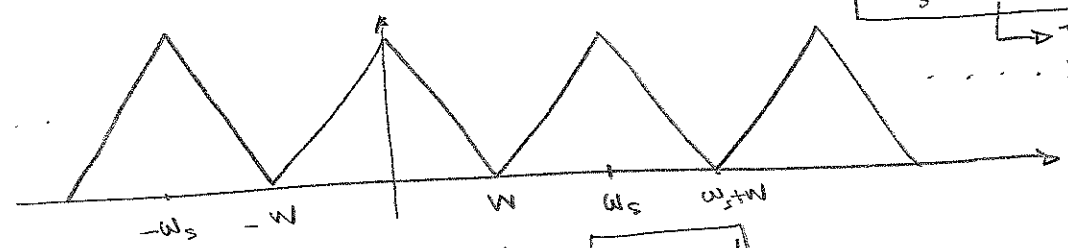
$\omega_s \triangleq \frac{2\pi}{T_s}$: συχνότητα δειγματοληψίας.

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Το φάσμα του $x_s(t)$ ισούται με το άθροισμα άπειρων ειδώλων του φάσματος του αρχικού σήματος $x(t)$ μετατοπισμένων κατά ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας ω_s . Αυτά τα διαδοχικά φάσματα θα επικαλύπτονται αν η ω_s δεν είναι αρκετά μεγάλη σε σχέση με τη μέγιστη συχνότητα του αρχικού σήματος.

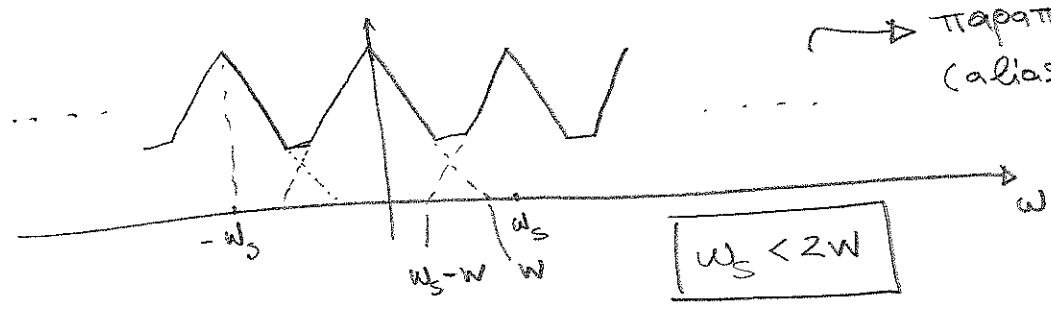


$$\omega_s - W > W \Rightarrow \begin{cases} \omega_s > 2W \\ T_s < \pi/W \end{cases}$$



$$\omega_s = 2W$$

Περιοδος δειγματοληψίας Nyquist



παραποίηση (aliasing).

$$\omega_s < 2W$$

Παράδειγμα:

$$x(t) = \cos(\pi t) \Rightarrow T_0 = 1$$

$$\omega_0 = \pi$$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \pi \delta(\omega + \pi) + \pi \delta(\omega - \pi)$$

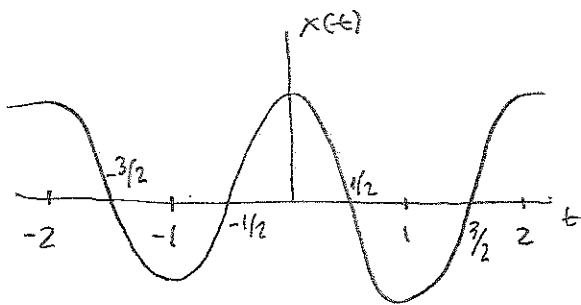
$$\therefore X_S(j\omega) = \frac{\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\delta(\omega + \pi - k\omega_s) + \delta(\omega - \pi - k\omega_s) \right]$$

(a) $T_S = \frac{1}{4}$ (b) $T_S = 1$ (c) $T_S = \frac{3}{2}$

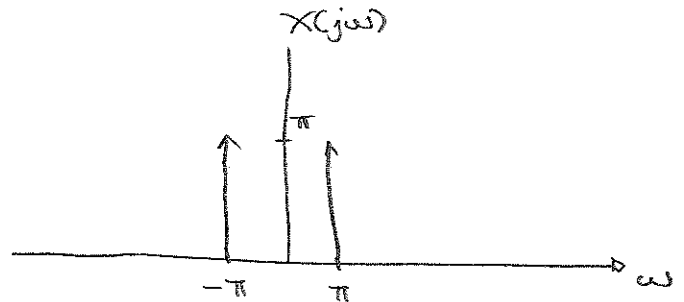
$\omega_s = 8\pi = 8\omega_0$

$\omega_s = 2\pi = 2\omega_0$

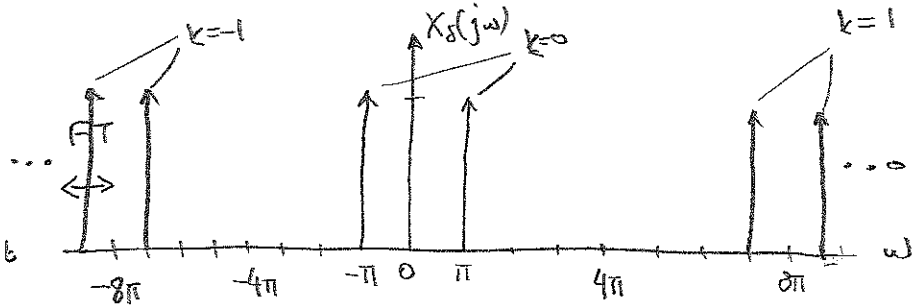
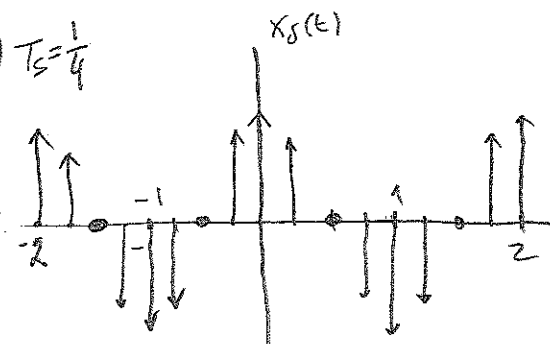
$\omega_s = 4\pi/3 = \frac{4}{3}\omega_0$



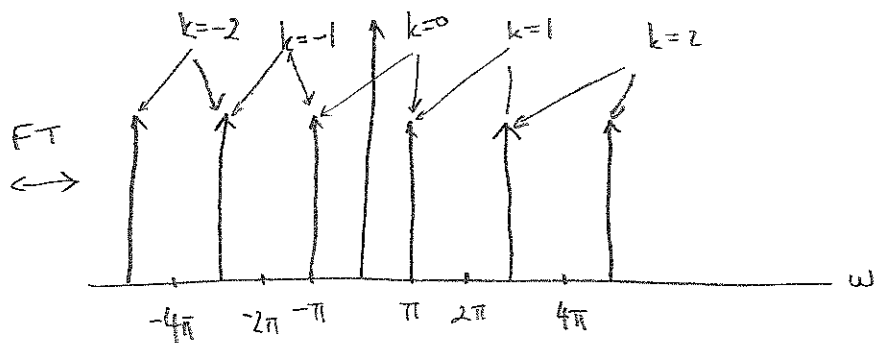
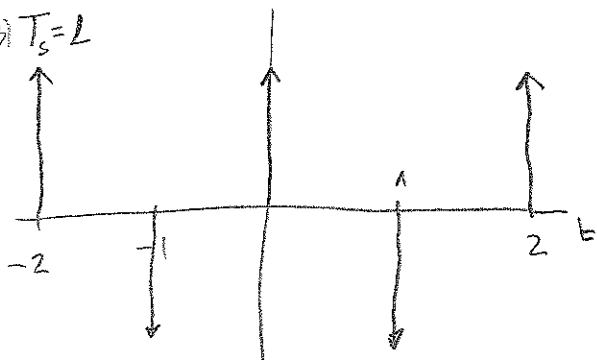
FT
↔



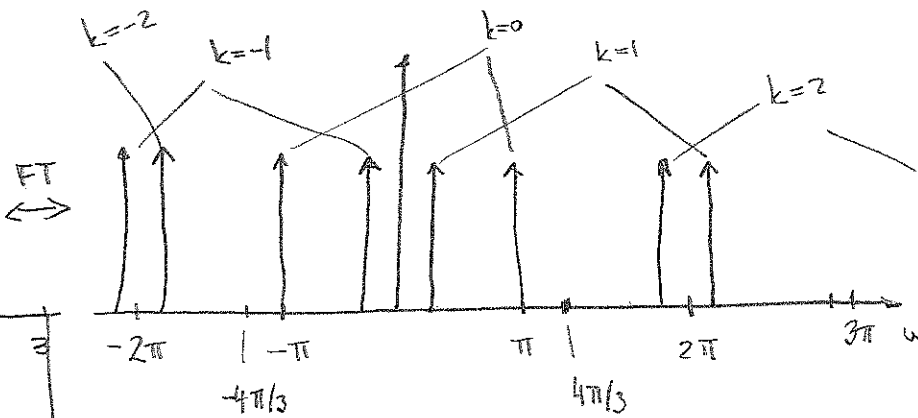
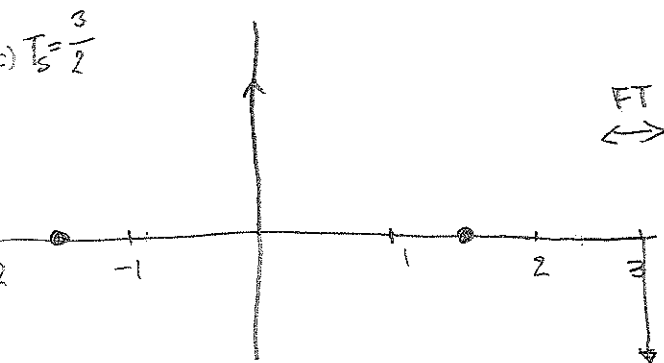
a) $T_S = \frac{1}{4}$



b) $T_S = 1$



c) $T_S = \frac{3}{2}$



Θεώρημα Δειγματοληψίας

Αν ο FT ενός σήματος $x(t)$ είναι μηδέν για $|\omega| > \omega_c$
 ($x(t)$ είναι γυνοπερατό σήμα: $X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_c$) τότε
 αυτό μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα από τα δείγματα του
 $x(nT_s)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ εφ' όσον

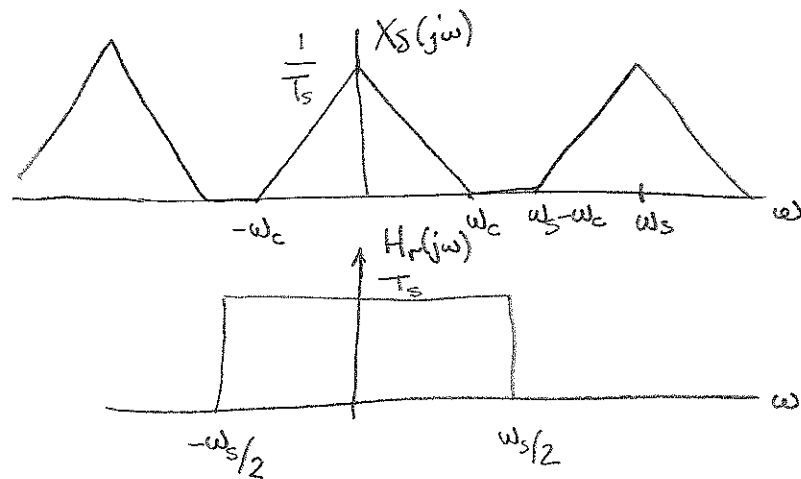
$$T_s \leq \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$$

$$\omega_s \geq 2\omega_c$$

Βασική Ανακατασκευή

$$X_S(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$

$X(j\omega)$ γυνοπερατό: $X(j\omega) = 0, \quad \forall |\omega| > \omega_c, \quad \omega_s \geq 2\omega_c$



$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

$$\therefore X(j\omega) = X_S(j\omega) \cdot H_r(j\omega)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_S(t) * h_r(t)$$

όπου $h_r(t) = \frac{T_s \sin(\frac{\omega_s}{2} t)}{\pi t} \leftrightarrow H_r(j\omega)$

και $x_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(t - nT_s)$

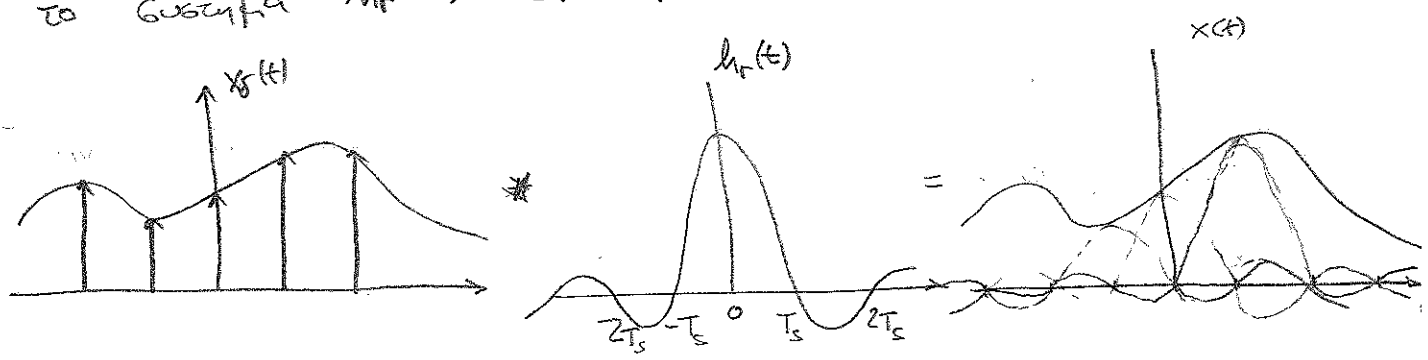
$$\therefore x(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) h_r(t - nT_s)$$

$$\therefore x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \operatorname{sinc} \left[\frac{\omega_s}{2\pi} (t - nT_s) \right]$$

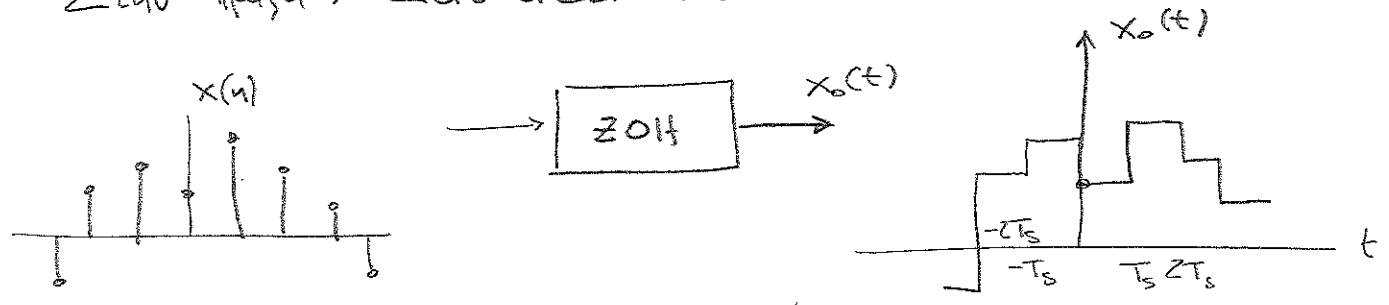
* Αρα το $x(t)$ δίνεται σαν ένα άπειρο άθροισμα συναρτήσεων sinc μετασχηγμένων κατά την περίοδο δειγματοληψίας T_s . Τα βάρη του άθροισματος δίνονται από τις τιμές $x(n)$ του διακριτού σήματος.

* Ιδανική αντιστάθμιση (Ideal bandlimited interpolation)

* Στην πράξη, η επίλυση αυτή δεν μπορεί να υλοποιηθεί γιατί το σύστημα $h_r(t)$ είναι μη-απειράτου.



Στην πράξη: Zero-order Hold:



$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) h_0(t - nT_s)$$

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x_0(t) = h_0(t) * x_s(t)$$

$$\Rightarrow X_0(j\omega) = H_0(j\omega) \cdot X_s(j\omega)$$

$$\text{οπότε } H_0(j\omega) = 2 e^{-j\omega T_s/2} \frac{\text{sin}(\omega T_s/2)}{\omega}$$

3 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ: Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Γενικεύουμε την αναπαράσταση (Fourier) σημάτων μέσω μυγαδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ($e^{j\omega t}$), σε μια αναπαράσταση μέσω μυγαδικών εκθετικών της μορφής e^{st} , όπου $s = \sigma + j\omega$ ονομάζεται μυγαδική συχνότητα. Η αναπαράσταση αυτή επιτυγχάνεται μέσω του Μετασχηματισμού Laplace (LT).

Ο LT είναι το κύριο εργαλείο μηχανικών για τη μελέτη της συμπεριφοράς ΓΧΑ συστημάτων με αρχικές συνθήκες, για την ανάλυση της μεταβλητικής του απόκρισης και της ευστάθειας τους.

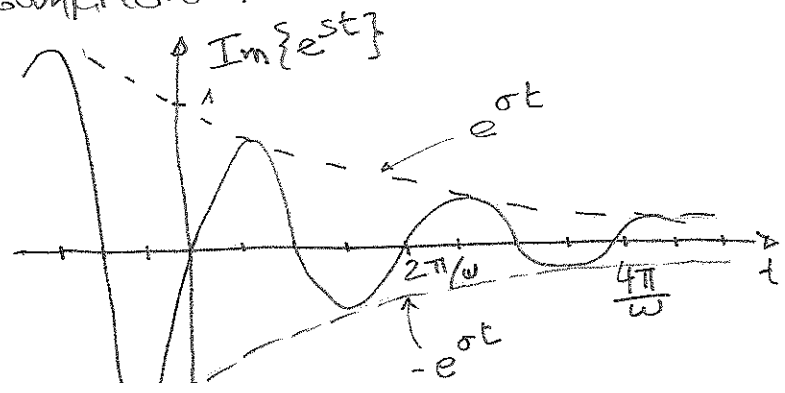
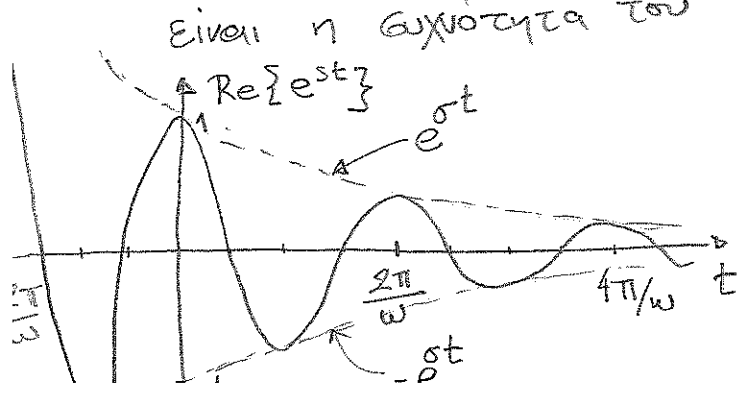
3.1 Ο Μετασχηματισμός Laplace (LT)

Το μυγαδικό εκθετικό σήμα e^{st} , $s = \sigma + j\omega$ ορίζεται ως:

$$e^{st} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

Το πραγματικό μέρος $e^{\sigma t} \cos \omega t$ με $\sigma < 0$ είναι ένα εκθετικά φθίνον σινηλίτιο. Το πραγματικό μέρος, σ , μυγαδικής συχνότητας, $s = \sigma + j\omega$, ονομάζεται πραγματικός εκθετικός απόβροχος, ενώ το φανταστικό μέρος, ω ,

είναι η συχνότητα του σινηλίτιου.



Έστω τώρα ότι $x(t) = e^{st}$ είναι είσοδος σ' ένα ΓΧΑΣ, με χρονική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = H\{e^{st}\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)

του συστήματος:

$$H(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad \text{①}$$

Επομένως $y(t) = H\{e^{st}\} = H(s) \cdot e^{st}$

⇒ αναγνωρίζουμε των e^{st} ως μια ιδιοσυνάρτηση του συστήματος και των $H(s)$ ως μια ιδιοτιμή του!

• Πολική μορφή των $H(s) = |H(s)| e^{j\phi(s)}$; $|H(s)|$: μέτρο $\phi(s)$: φάση

Τότε

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(s)| e^{j\phi(s)} e^{st}, \quad s = \sigma + j\omega \\ &= |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} e^{j\omega t + \phi(\sigma + j\omega)} \\ &= |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi(\sigma + j\omega)) + \\ &\quad j |H(\sigma + j\omega)| e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi(\sigma + j\omega)) \end{aligned}$$

**

Παρατηρούμε ότι το σύστημα αλλάζει το μέτρο της εισόδου κατά $|H(\sigma + j\omega)|$ και μετατοπίζει τη φάση των ημιτονοειδών συνιστωσών κατά $\phi(\sigma + j\omega)$. Το σύστημα ΔΕΝ αλλάζει τον ρυθμό απόσβεσης σ ΟΥΤΕ τη συχνότητα ω .

□ Η παραπάνω σχέση μας ωθεί στην αναπαράσταση γενικών σημάτων ως γραμμικών συνδυασμών μιγαδικών εκθετικών, e^{st}

Έχουμε

$$H(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

⇒ $H(\sigma + j\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $h(t) e^{-\sigma t}$! Επομένως,

$$h(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

Τώρα θέτουμε $s = \sigma + j\omega$ και $d\omega = \frac{ds}{j}$, οπότε:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} H(s) e^{st} ds \quad \text{②}$$

Οι ① & ② εκφράζουν το ζεύγος μετασχηματισμού Laplace:

ΔΙΑΦΕΡΟΣ ΜΕΤ. LAPLACE

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad : \text{LT}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds \quad : \text{Inverse LT (ILT)}$$

* Παρατήρηση: Ο LT της $x(t)$ είναι ο FT της $x(t)e^{-\sigma t}$. (56)

Επιπλέον ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του LT είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

• Πεδίο σύγκλισης (Region of Convergence, ROC): Το πεδίο τιμών σ για τις οποίες ο ML συγκλίνει.

• Ορισμός: Μια συνάρτηση $x(t)$ είναι εκθετικής τάξης α καθώς $t \rightarrow \infty$, αν υπάρχουν δύο σταθερές $M > 0$ & $\alpha \in \mathbb{R}$ και μια τιμή t_0 ώστε $|e^{-\alpha t} x(t)| < M \quad \forall t \geq t_0$.

Πχ. • Η $x(t) = e^{ct} \cos \omega t$ είναι εκθετικής τάξης c γιατί $|e^{-ct} \cos \omega t| < e^{-ct} \quad \forall t > 0$

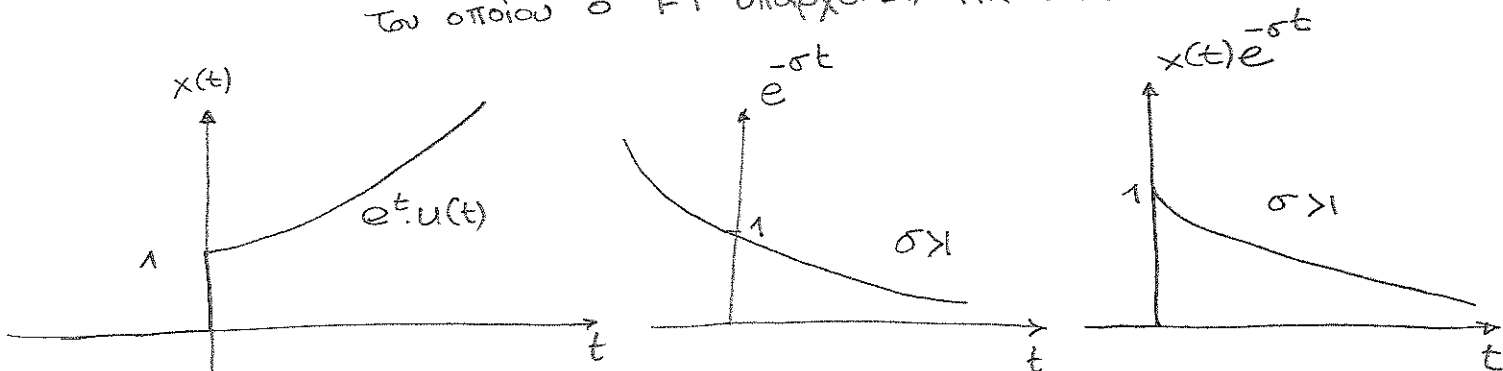
• Η $x(t) = e^{t^2}$ δεν είναι εκθ. τάξης γιατί

$$|e^{-\alpha t} e^{t^2}| = e^{t^2 - \alpha t} \text{ δεν φράσσεται από καμία } M > 0.$$

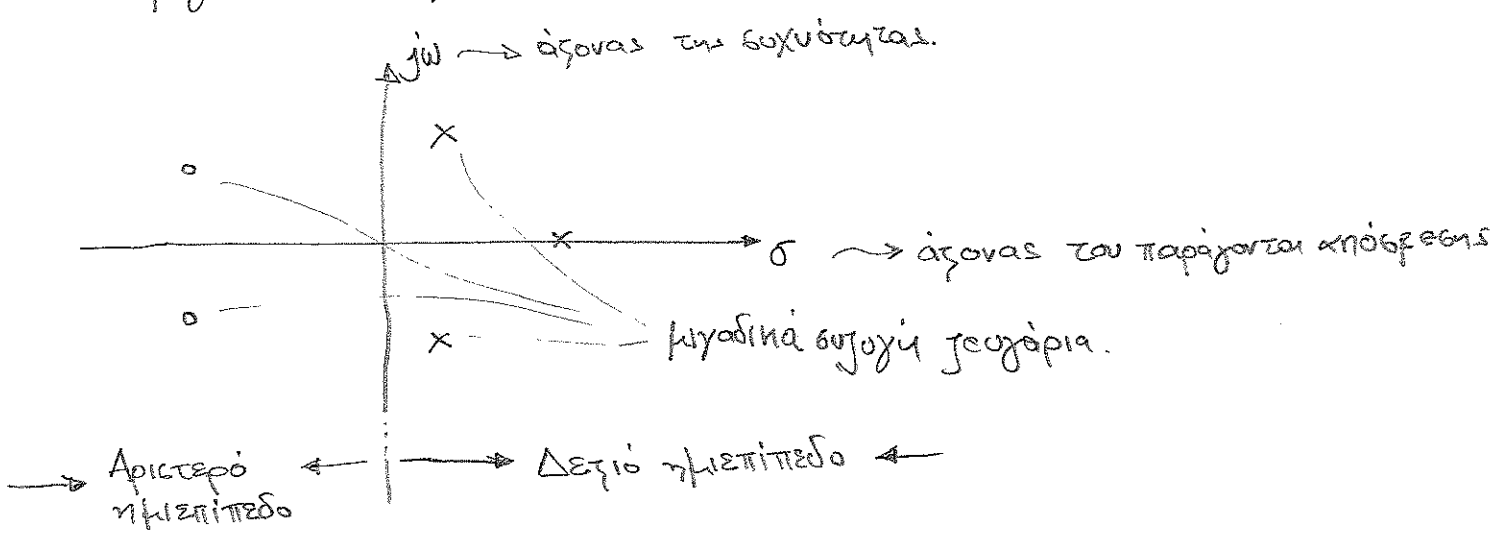
• Ο LT υπάρχει για σήματα τα οποία δεν έχουν FT!

Πχ. Εστω $x(t) = e^t u(t)$: συνεχώς αυξανόν εκθετικό σήμα, ήμ απόλυτα ολοκληρώσιμο, που δεν έχει FT.

Για $\sigma > 1$, $x(t)e^{-\sigma t} = e^{(1-\sigma)t} u(t)$ είναι φθίνον εκθετικό του οποίου ο FT υπάρχει \Rightarrow Για $\sigma > 1$ υπάρχει ο LT του $x(t)$.



- Γραφική απεικόνιση της μηχανικής συχνότητας $s = \sigma + j\omega$ στο μηχανικό πεδίο συχνότητας (s -plane).



* Αν το πεδίο συγκλίσεως του LT περιέχει τον φανταστικό άξονα, $j\omega$, τότε ο FT της $x(t)$ υπάρχει και:

$$X(j\omega) = X(s) |_{\sigma=0}$$

* Η πιο ενδιαφέρουσα μορφή ML σε εφαρμογές μηχανικού δίνεται από ένα λόγο δύο παρανομήμων (στην συνάρτηση):

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{l=1}^N (s - d_l)}$$

x: Μηδενικά της $X(s)$ (zeros) \triangleq Οι ρίζες, c_k , του αριθμητή.

o: Πόλοι της $X(s)$ (poles) \triangleq Οι ρίζες, d_k , του παρανομήνου.

Παράδειγμα : (1) $x(t) = e^{at} u(t)$. LT & ROC
 a : πραγματικός

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{+\infty} \quad (s = \sigma + j\omega)$$

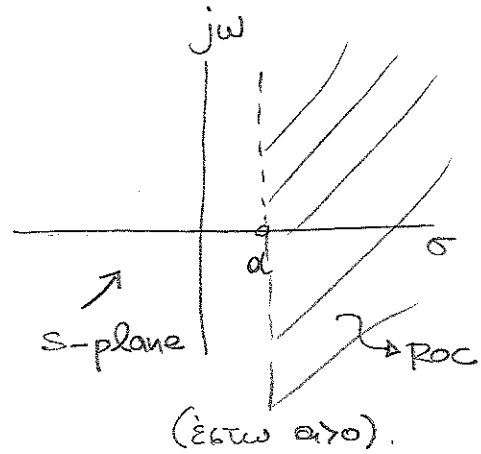
$$= \frac{-1}{\sigma + j\omega - a} e^{-(\sigma-a)t} e^{-j\omega t} \Big|_0^{+\infty}$$

Αν $\sigma > a$ τότε $e^{-(\sigma-a)t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Επομένως

$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\omega - a} (0 - 1) , \quad \sigma > a$$

$$\therefore \boxed{X(s) = \frac{1}{s-a} , \text{Re}(s) > a}$$

\downarrow LT \downarrow ROC

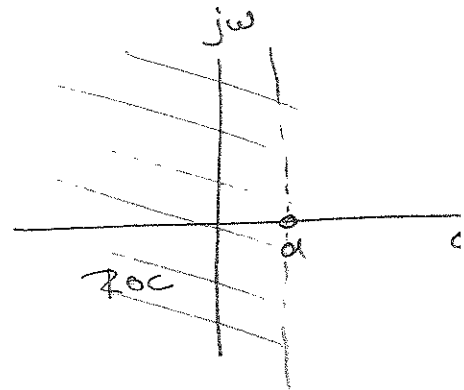


(2) $y(t) = -e^{at} u(-t)$ LT & ROC

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{at} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$\therefore \boxed{Y(s) = \frac{1}{s-a} , \text{Re}(s) < a}$$



3.2 Ο Μονόπλευρος ML

Χρήσιμος για τη μελέτη αιτιατών συστημάτων όταν το σήμα είσοδου $x(t)$ εφαρμόζεται σε χρόνο $t=0$. Θα βοηθήσει στην λύση ΓΔΕ με αρχικές συνθήκες.

$$\begin{aligned}
 x(t) &\xleftrightarrow{L} X(s) \\
 X(s) &= \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \\
 x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} dt
 \end{aligned}$$

Θεώρημα 'Υπαρξης': Αν η $x(t)$ είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε πεπερασμένο διάστημα $0 \leq t \leq b$ και εκθευκώς τείνει $\alpha \forall t > b$ τότε ο ML της $x(t)$ υπάρχει για $\text{Re}(s) > \alpha$. (Απόδειξη: βλ. 112 του βιβλίου).

Απόδειξη: $\forall b > 0$ έχουμε:

$$L\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \underbrace{\int_0^b x(t) e^{-st} dt}_{T_1} + \underbrace{\int_b^{+\infty} x(t) e^{-st} dt}_{T_2}$$

- $T_1 < \infty$ γιατί η $x(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, b]$
- $|T_2| = \left| \int_b^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_b^{+\infty} |x(t) e^{-st}| dt \leq \int_b^{+\infty} K(t) e^{-\alpha t} dt \leq \int_b^{+\infty} M e^{\alpha t - st} dt < \infty$ όταν $\text{Re}\{s\} > \alpha$

* Ικανές συνθήκες μόνο! Πχ. η $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ δεν πληρεί την πρώτη αλλά $L\{x(t)\} = \sqrt{\pi/s}$.

3.2.1 Μ.Λ. Στοιχειωδών Συναρτήσεων

(α) $x(t) = \delta(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \text{Re}\{s\} > -\infty$$

(β) $x(t) = u(t)$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \text{Re}\{s\} > 0$$

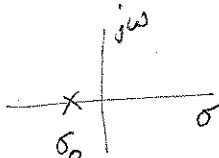
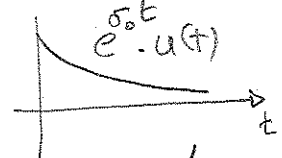
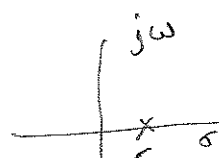
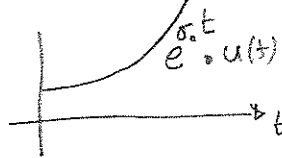
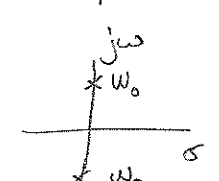
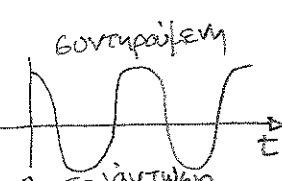
(γ) $x(t) = t u(t)$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} t e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

$= 0, \text{Re}\{s\} > 0 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{s^2}, \text{Re}\{s\} > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t u(t)\} = 1/s^2, \text{Re}\{s\} > 0$$

Ομοίως, $\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{Re}\{s\} > 0$

(δ)	$x(t) = e^{-at} u(t)$	\xleftrightarrow{LT}	$\frac{1}{s+a}$, Re		
	$x(t) = e^{at} u(t)$	\xleftrightarrow{LT}	$\frac{1}{s-a}$, Re		
	$x(t) = e^{j\omega_0 t} u(t)$	\xleftrightarrow{LT}	$\frac{1}{s-j\omega_0}$			

(ε) $x(t) = \cos \omega_0 t \cdot u(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \text{Re}\{s\} > 0$$

$$\Rightarrow \cos \omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \text{Re}\{s\} > 0$$

Ομοίως, $\sin \omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$ (61)

3.2.2 Ιδιότητες των Μονόπλευρου Μ.Λ.

(α) Γραμμικότητα: $x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s), \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$

$y(t) \xleftrightarrow{LT} Y(s), \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_2$

$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{LT} aX(s) + bY(s), \operatorname{Re}\{s\} > \max(\sigma_1, \sigma_2)$

(β) Κλίμακωση: $x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s), \operatorname{Re}\{s\} > \sigma$

$x(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} X(s/a), \operatorname{Re}\{s\} > a\sigma$

(γ) Μετατόπιση στο χρόνο:

$x(t) \cdot u(t) \xleftrightarrow{LT} X(s), \operatorname{Re}\{s\} > \sigma$

$x(t-t_0) \cdot u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} e^{-st_0} X(s), t_0 > 0, \operatorname{Re}\{s\} > \sigma$

Μετατόπιση στο χρόνο αντιστοιχεί με πολλαπλασιασμό με το μιγαδικό εκθετικό e^{-st_0} .

(δ) Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα:

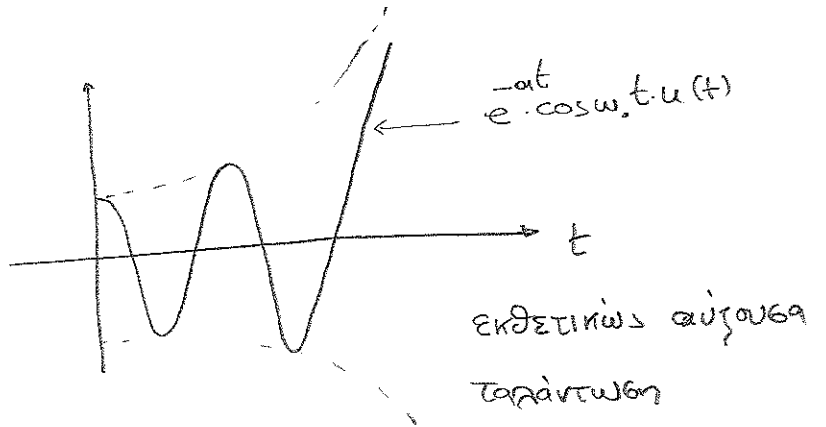
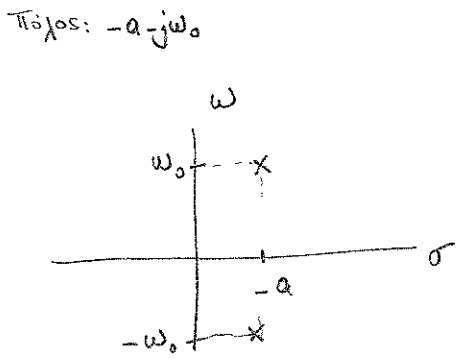
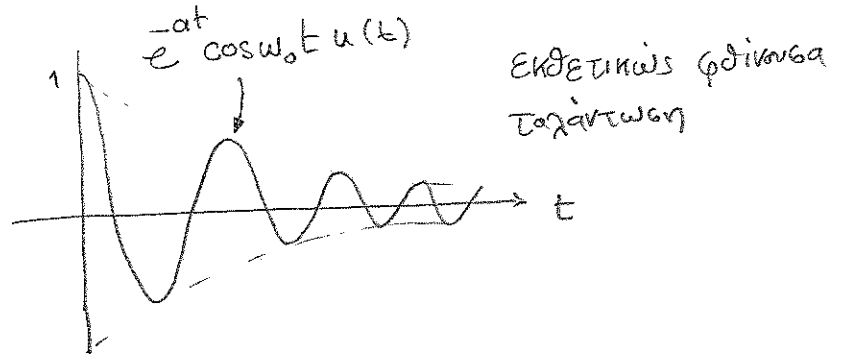
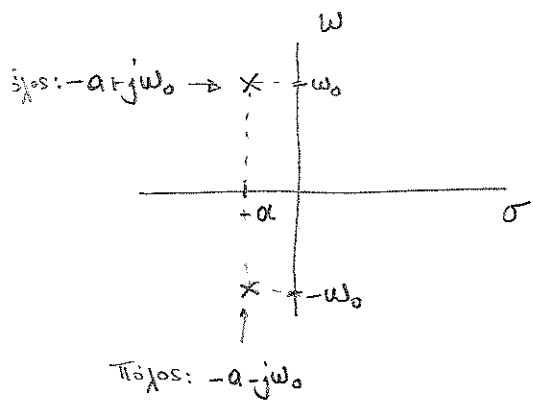
$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s), \operatorname{Re}\{s\} > \sigma$

$x(t) e^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} X(s-s_0), \operatorname{Re}\{s\} > \sigma + \operatorname{Re}\{s_0\}$

Π.χ. $x(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t \cdot u(t)$ $L\{x(t)\} = ?$ $a \in \mathbb{R}$

$\cos \omega_0 t u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \text{Re}\{s\} > 0$

$\Rightarrow e^{-at} \cos \omega_0 t u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{Re}\{s\} > -a$



(ε) Παράγωγος στη συχνότητα:

$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s), \text{Re}\{s\} > \sigma_0$

$? \xleftrightarrow{LT} \frac{d^{(n)}}{ds^n} X(s)$

$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$

$\frac{d^{(n)}}{ds^n} X(s) = \int_0^{+\infty} (-t)^n x(t) e^{-st} dt$

$\Rightarrow (-t)^n x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d^{(n)}}{ds^n} X(s), \text{Re}\{s\} > \sigma_0$

(στ) Παράγωγος στο χρόνο :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt \\ &= x(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s x(t) e^{-st} dt \\ &= x(t) e^{-st} \Big|_{t=+\infty} - x(0) + s X(s) \end{aligned}$$

Τύπος $x(t) e^{-st} \leq |x(t)| e^{-st} < M e^{at} e^{-st} = M e^{-(s-a)t}$ [x(t) : εκθετικής τάξης, α]

Άρα, καθώς $t \rightarrow +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) e^{-st}) < M \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(s-a)t} = 0$

για $\text{Re}\{s\} > \alpha$

Επομένως $x(t) e^{-st} \Big|_{t=+\infty} = 0$

$\therefore \mathcal{L} \{ x'(t) \} = s X(s) - x(0)$, $\text{Re}\{s\} > \alpha$

Όμοιας, $\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x^{(1)}(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$

π.χ. $\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} = s^n$

(ζ) Μετασχηματισμός ολοκληρώματος

$x(t) \xleftrightarrow{LT} X(s)$, $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$

$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{LT} ?$

$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 x(\tau) d\tau}_{y(0^-)} + \int_0^t x(\tau) d\tau = y(0^-) + \int_0^t x(\tau) d\tau$

Αλλά $\mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = \mathcal{L} \{ x(t) \}$

$\Rightarrow s Y(s) - y(0^-) = X(s)$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{X(s)}{s} + \frac{y(0^-)}{s} = \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^0 x(\tau) d\tau}{s}$

(π) Συνέλιξη συναρτήσεων

$x(t) * g(t) \leftrightarrow X(s) \cdot G(s), \text{ Re}\{s\} > \max(\sigma_1, \sigma_2)$

$\mathcal{L} \{ x(t) * g(t) \} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) e^{-st} dt$
 $= \int_0^{+\infty} x(\tau) \left(\int_0^{+\infty} g(t-\tau) e^{-st} dt \right) d\tau = \int_0^{+\infty} x(\tau) G(s) e^{-s\tau} d\tau$
 $= X(s) \cdot G(s).$

(θ) Γινόμενο συναρτήσεων. $x(t) \cdot g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2\pi j} X(s) * G(s).$

(ι) Θεώρημα αρχικής ή τελικής τιμής:

Σκοπός: Προσδιορισμός των τιμών $x(0^-)$ ή $x(\infty)$ κατευθείαν από την $X(s)$.

Χρησιμοποιείται για τον εύκολο προσδιορισμό της αρχικής ή τελικής τιμής ενός συστήματος χωρίς την πλήρη περιγραφή της απόκρισης του συστήματος $\forall t$.

$\left[\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} s X(s) &= x(0^+) \\ \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) &= x(\infty) \end{aligned} \right]$

→ βρέθεις ^{αρχική} πολλαπλάσιμη \leq πραγματική τιμή του $X(s)$ στο άπειρο ή μηδέν ενώ από ένα άξιο στο $s=0$

$$(1) \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^+)$$

• Έστω $x(t)$ συνεχής στο $t=0$.

$$(*) \mathcal{L} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-), \quad \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0$$

Η $x(t)$ συνεχής στο 0 \Rightarrow η $x'(t)$ δεν περιέχει

κρουστικές συνιστώσες στο $t=0$. Αρα καθώς $s \rightarrow +\infty$

$$\text{με } \operatorname{Re}\{s\} > \sigma_0, \quad \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Επομένως, } (*) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = x(0^-) = x(0^+) = x(0) \quad (x(t) \text{ συνεχής στο } 0).$$

• Η $x(t)$ έχει βηχιακή ασυνέχεια στο $t=0$, με ύψος $[x(0^+) - x(0^-)] u(t)$. Τότε, $x'(t) \Big|_{t=0} = [x(0^+) - x(0^-)] \delta(t)$

$$\text{Και } \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{0^-}^{+\infty} [x(0^+) - x(0^-)] \delta(t) e^{-st} dt = x(0^+) - x(0^-)$$

$$\text{Επομένως, } (*) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) - x(0^-) = x(0^+) - x(0^-) \quad \square$$

Παράδειγμα:

$$x(t) = u(t) \cos \omega_0 t, \quad x(t) \Big|_{t=0^+} = ?$$

$$\mathcal{L} \{ x(t) \} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} = 1.$$

(2) $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(+\infty)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0^-)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0^-) = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt = x(t) \Big|_0^{+\infty} = x(+\infty) - x(0^-)$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(+\infty)$$

Πχ. $x(t) = u(t) (1 - e^{-t}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} ?$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Αρα $x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+1)} = 1.$

3.3 Αντίστροφη των Μετασχηματισμού Laplace

• Μοναδικότητα αντίστροφου ML: Αν $X_1(s) = X_2(s)$, τότε για τις συναρτήσεις $x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\}$ & $x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\}$ θα ισχύει ότι $x_1(t) - x_2(t) = N(t)$, όπου $N(t)$ είναι η μηδενική συνάρτηση. ($N(t) = 0$ παντού εκτός από αριθμητικές βίνετο σημείων όπου έχει πεπερασμένες τιμές).

II Αντίστροφη μέσω ανάπτυξης ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad M < N$$

- Η ρητή συνάρτηση $X(s)$ με $M < N$ περιγράφει τη συνερπτική πλεονεξία των πρακτικά υλοποιήθων ΓΧΑΣ.
- Η συνθήκη $M \geq N$, βεβαιώνει την ύπαρξη όρων της μορφής $c_k \cdot s^k$; $k=0, 1, \dots, M-N$ στην $X(s)$. Αυτοί οι όροι αντιστοιχούν σε κρουστικές συναρτήσεις και τις παραγώγους τους: $c_0 \delta(t)$ και $c_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$, $k=1, \dots, M-N$.

□ Αρχίζουμε τη διαδικασία αντιστροφής της $X(s)$, γράφοντας το πολυώνυμο του παρονομαστή ως γινόμενο παραγόντων

$$A(s) = \prod_{k=1}^N (s - d_k), \text{ όπου } d_k \text{ είναι οι πόλοι.}$$

Επομένως,

$$X(s) = \frac{b_M s^M + \dots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Πόλοι διακεκριμένοι & πραγματικοί: $d_k \in \mathbb{R}, d_1 \neq d_2 \neq \dots \neq d_N$

Τότε:
$$X(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - d_k}, \text{ όπου}$$

$$A_k = \lim_{s \rightarrow d_k} (s - d_k) X(s).$$

Ισχύει:
$$A_k e^{d_k t} \cdot u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{A_k}{s - d_k}$$

Επομένως
$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{d_k t} \cdot u(t).$$

(ii) Επιαναλαμβανόμενοι πραγματικοί πόλοι: $d_k \in \mathbb{R}, d_1 = d_2 = \dots = d_r \neq d_{r+1} \neq \dots \neq d_N$ (68)

Έστω ο πόλος d_1 επιαναλαμβάνεται r φορές. Τότε

$$X(s) = \frac{A_1}{s-d_1} + \frac{A_2}{(s-d_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s-d_1)^r} + \frac{A_{r+1}}{s-d_{r+1}} + \dots + \frac{A_N}{s-d_N}$$

όπου
$$A_i = \lim_{s \rightarrow d_1} \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} [(s-d_1)^r X(s)]; \quad i=1, \dots, r$$

$$A_i = \lim_{s \rightarrow d_i} (s-d_i) X(s); \quad i=r+1, \dots, N$$

Ισχύει:
$$\frac{A t^{n-1}}{(n-1)!} e^{d_k t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{A}{(s-d_k)^n}$$

Επιπλέον,
$$x(t) = A_1 e^{d_1 t} u(t) + A_2 t e^{d_1 t} u(t) + \dots + A_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{d_1 t} u(t) + A_{r+1} e^{d_{r+1} t} u(t) + \dots + A_N e^{d_N t} u(t).$$

(iii) Ζεύγη συζυγών μιγαδικών πόλων: $d_1 = \alpha + j\omega_0, d_2 = d_1^* = \alpha - j\omega_0$.

Τότε: $X(s) = X_1(s) + X_2(s)$, όπου $X_1(s) = \frac{A_1}{s-d_1} + \frac{A_2}{s-d_1^*}$

και $A_1 = \lim_{s \rightarrow d_1} (s-d_1) X(s), \quad A_2 = A_1^* \rightarrow X_1(t) = A_1 e^{d_1 t} u(t) + A_1^* e^{d_1^* t} u(t)$

$$X_1(s) = \frac{A_1}{s-\alpha-j\omega_0} + \frac{A_1^*}{s-\alpha+j\omega_0} = \frac{B_1 s + B_2}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2} = \frac{C_1 (s-\alpha)}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2} + \frac{C_2 \omega_0}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2}$$

όπου $C_1 = B_1$ και $C_2 = \frac{B_1 \alpha + B_2}{\omega_0}$

$\dots \rightarrow \mathbb{R} \{ A_1 t^* \}$

Τότε $x_1(t) = C_1 e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t) u(t) + C_2 e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t) u(t)$. \square

\square Βλέπουμε από τα παραπάνω ότι οι πόλοι της $X(s)$ καθορίζουν τα χαρακτηριστικά του σήματος $x(t)$. Ένας πόλος $s = \sigma_k$ δίνει ένα εκθετικό μιγαδικό σήμα $e^{\sigma_k t} u(t)$. Αν $\sigma_k = \sigma_k + j\omega_k$, το σήμα είναι $e^{\sigma_k t} \cdot e^{j\omega_k t} u(t)$.

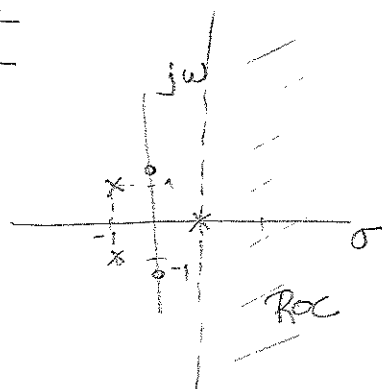
Επομένως, το πραγματικό μέρος του πόλου, σ_k , καθορίζει το ρυθμό εκθετικής μεταβολής (μείωσης ($\sigma_k < 0$) ή αύξησης ($\sigma_k > 0$)) του μέτρου της ταξάνωσης. Το φανταστικό μέρος, ω_k , καθορίζει τη συχνότητα της ταξάνωσης. Αν $\sigma_k = \text{Re}\{s_k\}$ είναι μεγάλος αρνητικός αριθμός, ο αντιστοιχος όρος μειώνεται γρήγορα. Αν $\omega_k = \text{Im}\{s_k\}$ είναι μεγάλος, τότε ο όρος ταλαντώνεται γρήγορα.

Παράδειγμα 1: $X(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2}$, $\text{ROC} = ?$, $x(t) = ?$

$$X(s) = \frac{4s^2 + 6}{(s-1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B_1 s + B_2}{(s+1)^2 + 1}$$

Three poles: $s_1 = 1$, $s_{2,3} = -1 \pm j$.

$$A = X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{4s^2 + 6}{s^2 + 2s + 2} \Big|_{s=1} = 2$$



Επίσης, για τους B_1, B_2 έχουμε:

$$4s^2 + 6 = 2[(s+1)^2 + 1] + (B_1 s + B_2)(s-1)$$

$$4s^2 + 6 = (2 + B_1)s^2 + (4 - B_1 + B_2)s + (4 - B_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 2 + B_1 \\ 0 = 4 - B_1 + B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 2 \\ B_2 = -2 \end{cases}$$

Επιμένω,
$$X(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{2s-2}{(s+1)^2+4}$$

$$X(s) = \frac{2}{s-1} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - 4 \frac{1}{(s+1)^2+4}$$

$$\therefore x(t) = 2e^t u(t) + 2e^{-t} \cos t \cdot u(t) - 4e^{-t} \sin t u(t). \quad \square$$

Παράδειγμα 2:
$$X(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2 (s+2)} \quad \text{ROC } \dot{\zeta} X(t).$$

$$X(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+2} \quad \text{Πόλοι: } s_{1,2} = -1, s_3 = -2$$

$$A_3 = X(s) \cdot (s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{s^2}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 4$$

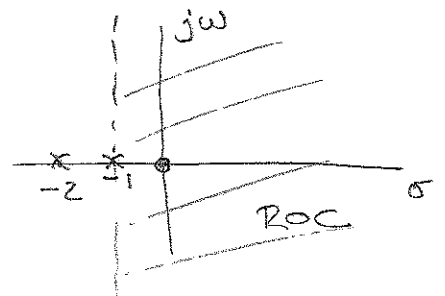
$$A_1 = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} X(s) (s+1)^2 \Big|_{s=-1} =$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2}{s+2} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{2s(s+2) - s^2}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -3$$

$$A_2 = X(s) (s+1)^2 \Big|_{s=-1} = \frac{s^2}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$\therefore X(s) = \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2}$$

$$\therefore x(t) = -3e^{-t} u(t) + t e^{-t} u(t) + 4e^{-2t} u(t). \quad \square$$



3.4 Σχέση LT - FT

Έστω το σήμα $x(t)$: $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$ με

$$(1) \quad X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0, \quad s = \sigma + j\omega.$$

$$(2) \quad X_F(j\omega) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Ερώτηση: Πότε και πώς μπορούμε να πάρουμε την (2) από την (1)?
 - Εξαρτάται από το σ_0 (i.e., την περιοχή σύγκλισης της (1)).

(i) $\sigma_0 > 0$

Τότε ο LT δεν ορίζεται για $\operatorname{Re}\{s\} = 0$ και συνεπώς ο FT δεν υπάρχει.

(ii) $\sigma_0 < 0$

Εδώ, η περιοχή σύγκλισης του LT περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα για $X_F(j\omega) = X(s) \Big|_{\sigma=0}$.

(iii) $\sigma_0 = 0$

$\sigma_0 = 0$ σημαίνει ότι ο LT έχει πόλους στο φανταστικό άξονα.

\Rightarrow ύπαρξη συντηρημένων ταλαντώσεων (i.e., όρων $\cos\omega_0 t \cdot u(t)$ $\sin\omega_0 t \cdot u(t)$)

Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση: ο FT υπάρχει, αλλά λόγω των ημιπεριοδικών συνημιτόνων θα περιέχει κάποιους κρουστικούς όρους ($\delta(\omega - \omega_0)$). Πώς θα πάρουμε λοιπόν το FT από τον LT?

Έστω ότι η $X(s)$ έχει M_0 τέτοιους πόλους στο φανταστικό άξονα. Οι υπόλοιποι $(M - M_0)$ βρίσκονται βέβαια στο αριστερό ημιεπίπεδο και έστω ότι αντιστοιχούν στη συνάρτηση $X_a(s)$.

Επομένως, $X(s) = X_a(s) + \sum_{k=1}^{M_0} \frac{b_k}{s - j\omega_k}$ (T2)

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\delta(\tau) \xrightarrow{FT} 1 = X(j\omega)$$

$$u(t) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$= \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$\therefore x(t) = x_a(t) + \sum_{k=1}^{M_0} b_k e^{j\omega_k t} \cdot u(t)$$

Εφόσον η $X_a(s)$ είναι αναρτημένη στο φανταστικό άξονα

$$x_a(t) \xleftrightarrow{FT} X_a(j\omega) = X_a(s) \Big|_{\sigma=0}$$

Για τους υπόλοιπους M_0 όρους χρησιμοποιούμε ότι λαμβάνε ως 2π κερφάλια για το FT.

$$(a) FT\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$(b) FT\{e^{j\omega_k t} \cdot u(t)\} = \pi\delta(\omega - \omega_k) + \frac{1}{j(\omega - \omega_k)}$$

Επομένως,

$$X_F(j\omega) = X_a(j\omega) + \sum_{k=1}^{M_0} b_k \left[\pi\delta(\omega - \omega_k) + \frac{1}{j(\omega - \omega_k)} \right]$$

$$X_F(j\omega) = X_a(j\omega) + \underbrace{\sum_{k=1}^{M_0} \frac{b_k}{j\omega - j\omega_k}}_{X(s) \Big|_{s=0}} + \pi \sum_{k=1}^{M_0} b_k \delta(\omega - \omega_k)$$

$$\therefore X_F(j\omega) = X(s) \Big|_{s=0} + \pi \sum_{k=1}^{M_0} b_k \delta(\omega - \omega_k)$$

Π.χ. Ποιος είναι ο FT της $\cos\omega_0 t \cdot u(t)$?

$$\cos\omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{1/2}{s + j\omega_0} + \frac{1/2}{s - j\omega_0} = X(s)$$

$$\Rightarrow \cos\omega_0 t \cdot u(t) \xleftrightarrow{FT} X(s) \Big|_{s=0} + \pi \sum_{k=1}^2 b_k \delta(\omega - \omega_k)$$

$$= \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2} \left[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right]$$

3.5

Χρήση LT στην επίλυση Γ.Δ.Ε. με αρχικές συνθήκες

73

Η χρήση του LT για τη λύση ΓΔΕ προσφέρει ένα φυσικό διαχωρισμό μεταξύ της ελεύθερης απόκρισης (natural response) που οφείλεται στις αρχικές συνθήκες και της εξαναγκασμένης απόκρισης (forced response) που οφείλεται στην είσοδο.

$$a_N \frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t) + b_{M-1} \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}} x(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t).$$

Παίρνοντας τον μονόπλευρο LT έχουμε:

$$A(s) \cdot Y(s) - C(s) = B(s) X(s) - D(s) \quad \text{όπου}$$

$$A(s) = a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$B(s) = b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0$$

$$C(s) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} \frac{d^l}{dt^l} y(t) \Big|_{t=0^-}$$

$$D(s) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=0}^{k-1} b_k s^{k-1-l} \frac{d^l}{dt^l} x(t) \Big|_{t=0^-}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{B(s)X(s) - D(s)}{A(s)} + \frac{C(s)}{A(s)}$$

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_n(s)$$

• $C(s) = 0$ αν όλες οι αρχικές συνθήκες είναι 0.

• $B(s)X(s) - D(s) = 0$ αν η είσοδος είναι μηδέν.

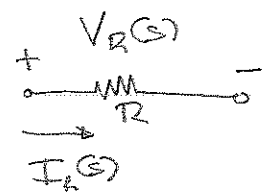
• $Y_f(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot X(s) - \frac{D(s)}{A(s)}$: εξαναγκασμένη απόκριση

• $Y_n(s) = \frac{C(s)}{A(s)}$: ελεύθερη απόκριση.

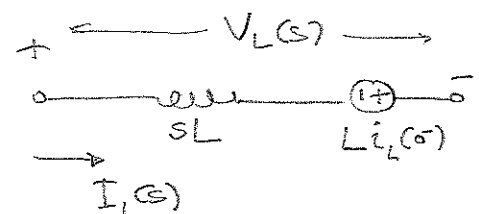
Οι ρίζες του πολυωνόμου $A(s)$ αναφέρονται φυσικές συχνότητες του συστήματος που περιγράφεται από τη ΓΔΕ. Για να είναι το σύστημα σταθερό, πρέπει οι ρίζες του $A(s)$ να βρίσκονται στο αριστερό ημισπίτιο.

II Εφαρμογή στην επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων:

• Αυκίσταση: $U_R(t) = R i_R(t) \xleftrightarrow{LT} V_R(s) = R I_R(s)$

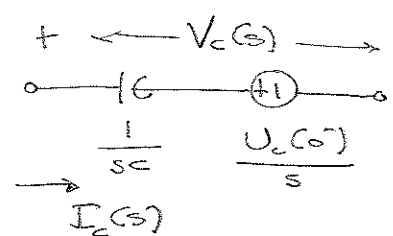


• Πηνείο: $U_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \xleftrightarrow{LT} V_L(s) = sL I_L(s) - L i_L(0^-)$

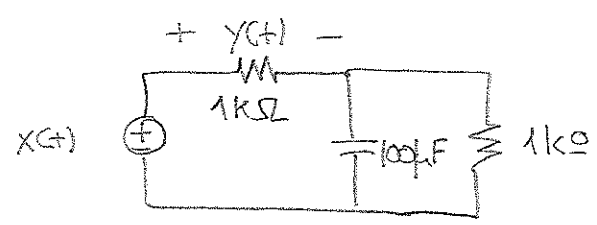


• Ποκνωτής: $U_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$

$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{U_C(0^-)}{s}$

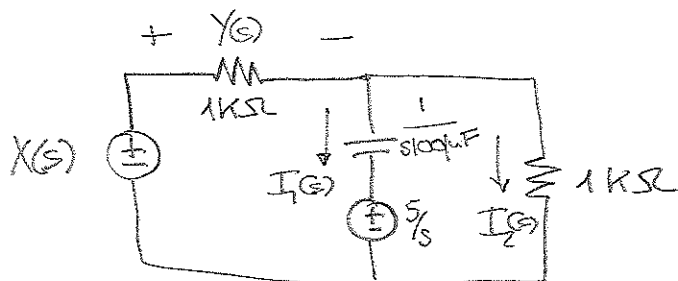


Παράδειγμα:



• Εφαρμογή τσυσ $X(t) = 2e^{-10t} u(t) V$ - Τις η τσγ $Y(t)$?

Το μετασχηματισμένο κύκλωμα είναι:



$$\frac{Y(s)}{1000} = I_1(s) + I_2(s)$$

$$X(s) = Y(s) + \frac{1}{s \cdot 10^4} I_1(s) + \frac{5}{s} \quad \left. \vphantom{X(s)} \right\} \Rightarrow Y(s) = X(s) \frac{s+10}{s+20} - \frac{5}{s+20}$$

$$X(s) = Y(s) + 1000 I_2(s)$$

$$\text{Άλλα } x(t) = 2e^{-10t} u(t) \Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s+10}$$

$$\text{Επομένως } Y(s) = -\frac{3}{s+20} \Rightarrow$$

$$y(t) = -3e^{-20t} u(t) \text{ V}$$

3.6 Χρήση του LT στην Ανάλυση ΓΧΑΣ

Ορισμός: Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΧΑΣ \triangleq ο λόγος του LT της εξόδου προς το LT της εισόδου:

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Αν $h(t)$ είναι η χρονική απόκριση του συστήματος, τότε

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

και παίρνοντας το LT :

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι ο LT της χρονικής απόκρισης.

Επίσης, από την περιγραφή ενός ΓΧΑΣ μέσω ΓΔΕ της ενότητας 3.5, έχουμε ότι για μηδενικές αρχικές συνθήκες (ie, $D(s)=0$ ή $C(s)=0$).

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s)$$

Συνεπώς,
$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

∴ Η συνάρτηση μεταφοράς είναι μια ρητή συνάρτηση όπου ο συντελεστής του όρου s^k στο παρονομαστή (παρονομαστή) αντιστοιχεί στο συντελεστή της k -οστής παραγωγού της εισόδου, $x(k)$ (εξόδου, $y(t)$).

Π.χ. Το ΓΧΑΣ που περιγράφεται από τη ΓΔΕ

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = 2 \frac{d}{dt} x(t) - 3x(t)$$

έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 3s + 2} \quad \square$$

□ Η $H(s)$ γράφεται συνάρτηση των ριζών-πόλων της ως

$$H(s) = \frac{(b_M/a_M) \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

□ Άρα, έχουμε τις εξής ισοδύναμες περιγραφές ενός αιτιατού ΓΧΑΣ:

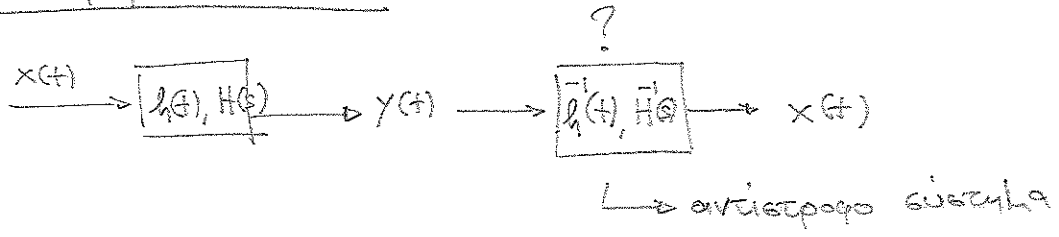
- (i) ΓΔΕ ; (ii) χρονική απόκριση, $h(t)$; (iii) $H(s)$ με την ROC;
- (iv) ρίζες, πόλοι, b_M/a_M
 $\{c_k\}$ $\{d_k\}$

□ Αν ένα ΓΧΑΣ είναι αιτιατό, (ie, $h(t) = 0 \forall t < 0$), τότε η περιοχή σύγκλισης του LT $H(s)$ θα εκτείνεται από κάποιο σ_0 έως $+\infty$: $Re\{s\} > \sigma_0$

□ Αν το ΓΧΑΣ είναι ευσταθές, τότε η περιοχή σύγκλισης του $H(s)$ περιέχει το φανταστικό άξονα. (Γιατί? - Ένα ευσταθές σύστημα $h(t)$ έχει κατ'ελάχιστο αποκλιμαίωση $h(t)$, συνεπώς FT $\{h(t)\}$ υπάρχει).

⇒ Ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑΣ έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό ημιεπίπεδο.

3.6.1 Αντίστροφα Συστήματα



Θα πρέπει: $h^{-1}(t) * h(t) = \delta(t)$

Πάρε LT: $H^{-1}(s) \cdot H(s) = 1$
 $\therefore H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{N}{(b_M/s^M) \prod_{k=1}^M (s-c_k)}$

Επομένως: Τα μηδενικά του αντίστροφου συστήματος είναι οι πόλοι του $H(s)$, και οι πόλοι του αντίστροφου είναι τα μηδενικά του $H(s)$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ:

*# Για να είναι το αντίστροφο σύστημα αιτιατό και ευσταθές θα πρέπει οι πόλοι του (επομένως τα μηδενικά της $H(s)$) να είναι στο αριστερό ημιεπίπεδο.

⇒ Ένα σύστημα $H(s)$ έχει αιτιατό και ευσταθές αντίστροφο μόνο αν οι πόλοι και τα μηδενικά του $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο!!! Λέμε ότι το $H(s)$ είναι "ελάχιστης φάσης" (minimum phase).

Πχ. Έστω ΓΧΑΣ να περιγράφεται από την ΓΔΕ

$$\frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2 \frac{d}{dt} x(t) - 3x(t).$$

Υπάρχει αμετάβλητη & ευσταδής αντίστροφο του συστήματος?

$$LT \rightsquigarrow Y(s)(s+2) = X(s)(s^2+2s-3)$$

$$\rightsquigarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+2s-3}{s+2}$$

$$\rightsquigarrow H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s+2}{s^2+2s-3} = \frac{s+2}{(s-1)(s+3)}$$

\rightsquigarrow πόλοι της $H^{-1}(s)$: $s_1=1, s_2=-3$

- s_1 είναι στο δεξιό ημιεπίπεδο $\Rightarrow H^{-1}(s)$ δεν μπορεί να είναι αμετάβλητη & ευσταδής.

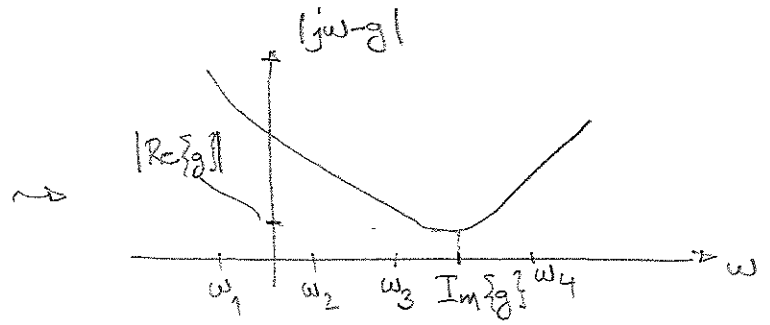
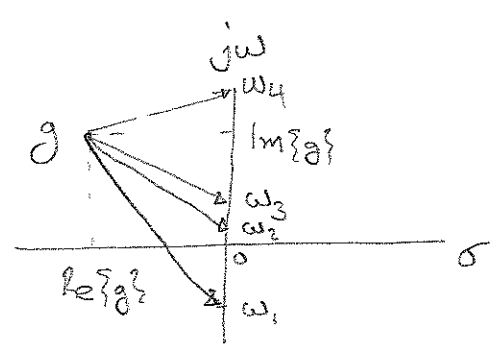
3.6.2 Επίδραση πόλων-μηδενικών στον απόκριση συχνότητας $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{(b_n/a_n) \prod_{k=1}^M (j\omega - c_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - d_k)}$$

($j\omega$ άξονας ριζώνεται μέσα στη ROC)

$$\rightsquigarrow |H(j\omega)| = \frac{|b_n/a_n| \prod_{k=1}^M |j\omega - c_k|}{\prod_{k=1}^N |j\omega - d_k|}$$

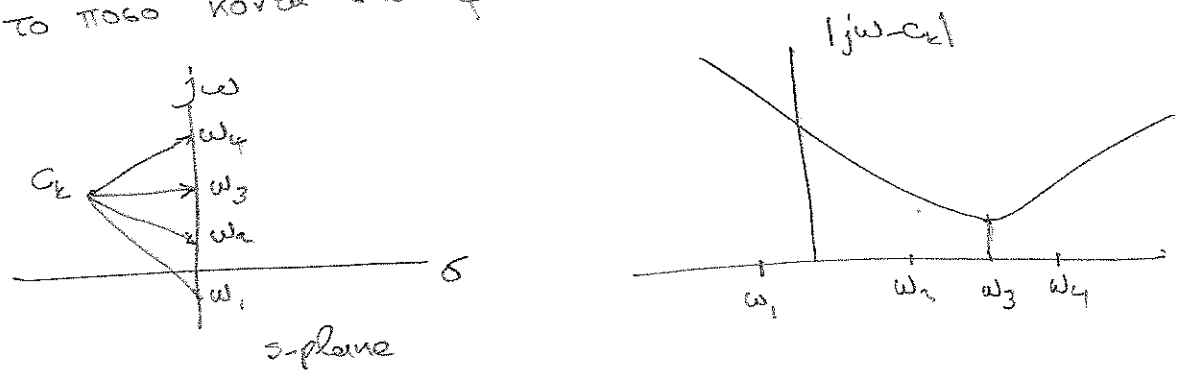
Γενικώς υπάρχει επίδραση όρων: $|j\omega - g|$



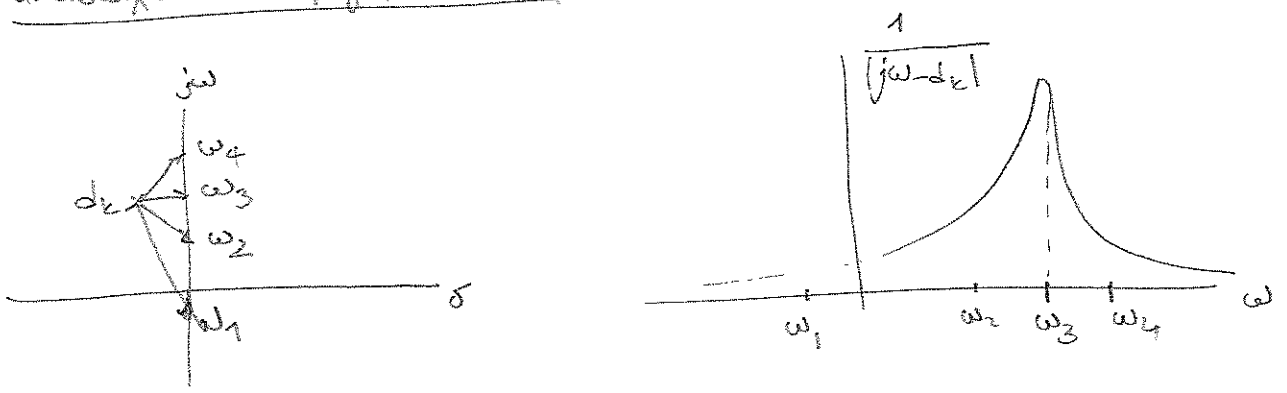
- Όταν $\omega = \text{Im}\{g\} \Rightarrow |j\omega - g| = |\text{Re}\{g\}| = \min_{\omega} |j\omega - g|$. Επομένως, αν g είναι κοντά στο φανταστικό άξονα ($\text{Re}\{g\} \approx 0$), τότε $|j\omega - g| \approx 0$ για $\omega = \text{Im}\{g\}$. Επίσης, αν g είναι κοντά στο $j\omega$ -άξονα, οι πιο γρήγορες

μεταβολές στο $|j\omega - g|$ συμβαίνουν στις συχνότητες πιο κοντά στο g . Για συχνότητες μακριά από το g ($|\omega| \gg |g|$), $|j\omega - g| \approx |\omega|$.

• Αν g είναι ένα μηδενικό, $|j\omega - g|$ συμβάλλει στον αριθμητή του $|H(j\omega)|$. Επομένως για συχνότητες κοντά στο μηδενικό, η $|H(j\omega)|$ τείνει να ελαττώνεται και το πόσο εξαρτάται από το πόσο κοντά στο φανταστικό άξονα βρίσκεται το μηδενικό:



• Αν το g αντιστοιχεί σε πόλο, τότε το $|j\omega - g|$ συμβάλλει στον παρονομαστή του $|H(j\omega)|$, και όταν το $|j\omega - g|$ ελαττώνεται, το $|H(j\omega)|$ αυξάνεται. Πόσο αυξάνεται εξαρτάται από το πόσο κοντά είναι ο πόλος στο $j\omega$ -άξονα. Πόλοι κοντά στο $j\omega$ -άξονα αντιστοιχούν σε μεγάλη απόκριση στην συγκεκριμένη συχνότητα.

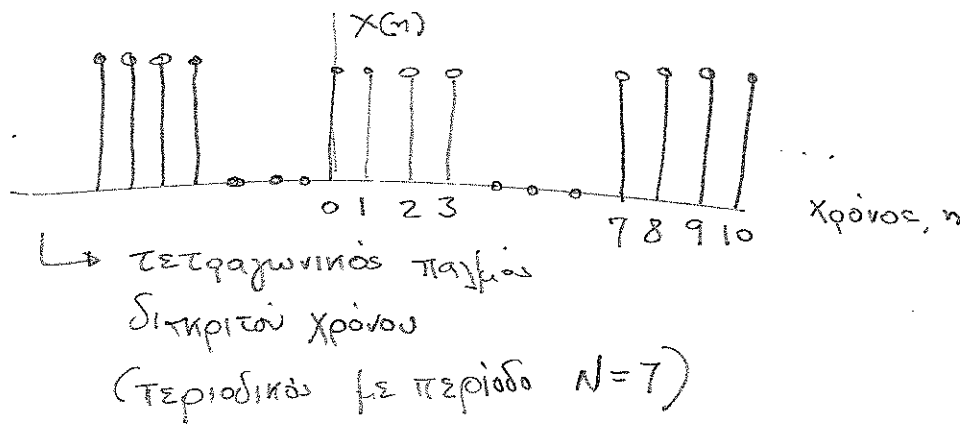


4 ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

- Η επεξεργασία αναλογικών σήματος βασίζεται στη χρήση στοιχείων αναλογικών κυκλωμάτων όπως αντιστάσεις, πυκνωτές, πηνία, διαόδους, & transistor ενισχυτές.
- Από την άλλη, η επεξεργασία διακριτών σήματος βασίζεται σε τρία στοιχεία ψηφιακών υπολογιστών: αριθμητές & πολλαπλασιαστές (για αριθμητικές πράξεις) & μνήμη (για αποθήκευση).

4.1 Ορισμοί & Στοιχεία Διακριτών σήματος

- ▣ Περιοδικά σήματα: $x(n) = x(n+N)$, $\forall n$ ακέραιο: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Περίοδος N : θετικός ακέραιος αριθμός (δηλαδή, η περίοδος μετράται σε δείγματα)
- Βασική συχνότητα: $\omega = \frac{2\pi}{N}$.



▣ Ολική ενέργεια $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)$

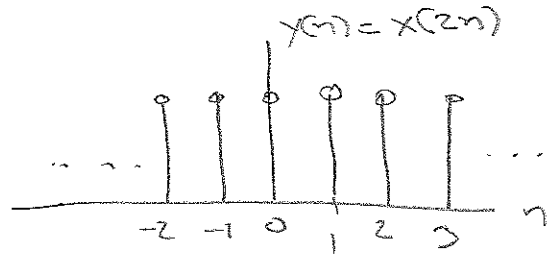
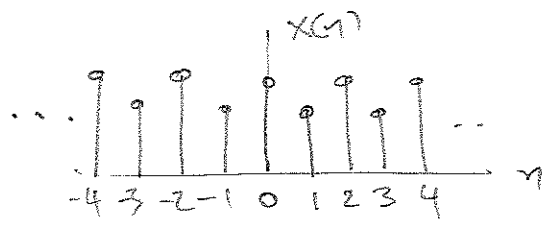
▣ Μέση ισχύς $P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x^2(n)$

$\left[= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \right]$ για περιοδικά σήματα με περίοδο N

□ Μετατόπιση : $y(n) = x(n+m)$; m : ακέραιος.

□ Κλιμάκωση χρόνου $y(n) = x(kn)$; k : ακέραιος

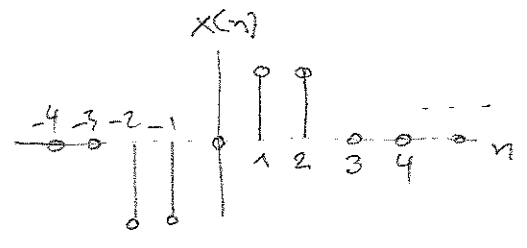
Αν $k > 1$, τότε κάποιες τιμές του $x(n)$ χάνονται (downsampling, subsampling, decimation)



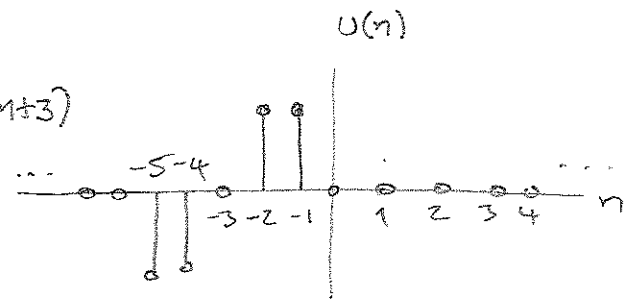
□ Μετατόπιση & κλιμάκωση : $y(n) = x(kn+m)$; k, m : ακέραιοι.

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n=1, 2 \\ -1 & n=-1, -2 \\ 0 & n=0, |n| > 2 \end{cases}$$

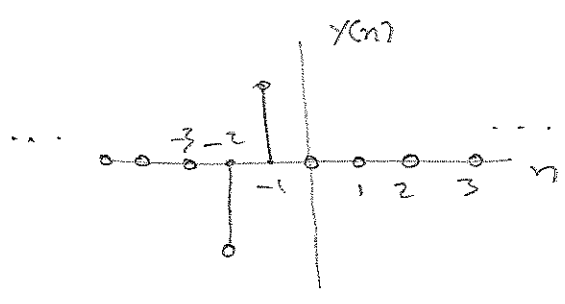
$$y(n) = x(2n+3) = ?$$



$$v(n) = x(n+3)$$



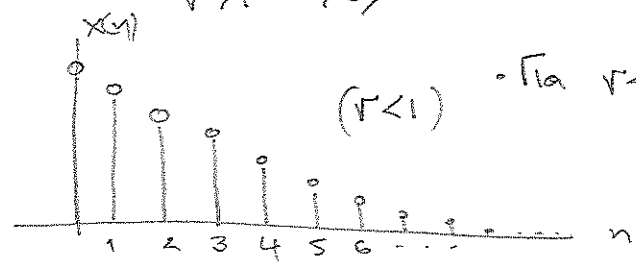
$$\Downarrow y(n) = v(2n) = x(2n+3)$$



□ Πραγματική Εξθετική ακολουθία

$$x(n) = B r^n \quad ; \quad r = e^a$$

- Για $0 < r < 1 \rightarrow x(n)$ είναι εκθετικά φθίνον σήμα
- Για $r > 1 \rightarrow$ -||- αυξανόν -||-



($r < 1$) • Για $r < 0$, έχουμε εναλλαγή θετικών & αρνητικών όρων στο $x(n)$.

□ Ημιτονοειδές σήμα $x(n) = A \cos(\omega n + \phi)$

$x(n) = x(n+N) = A \cos(\omega n + \omega N + \phi) \Rightarrow \omega N = 2\pi m$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi m}{N}}$ m, N : ακέραιοι.

* Επιπέδως, ένα διακριτό ημιτονοειδές σήμα είναι περιοδικό μόνο όταν η γωνιακή συχνότητα ω είναι ρίζα πολλαπλασίου του 2π .

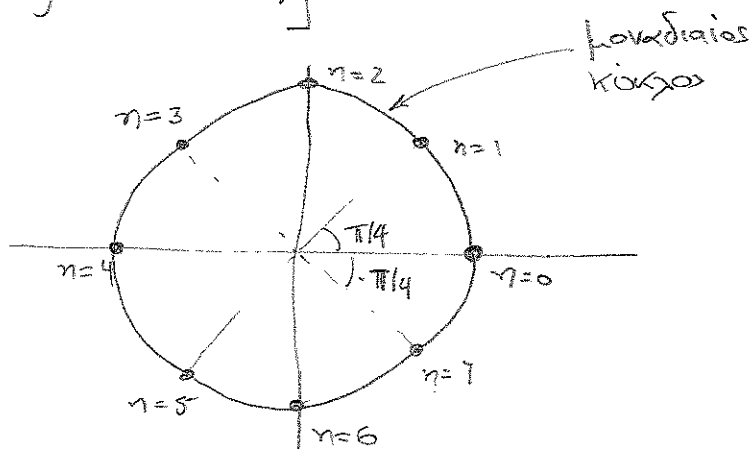
□ Μιγαδική εκθετική ακολουθία $x(n) = B e^{j\omega n}$, $B = A e^{j\phi}$
 $= A e^{j(\omega n + \phi)}$

$x(n) = A [\cos(\omega n + \phi) + j \sin(\omega n + \phi)]$

$x(n) = e^{j\omega n}$; $\omega = \frac{\pi}{4}$

$N = \frac{2\pi m}{\omega} = 8m$

Βασική περίοδος: $N=8$ ($m=1$)



□ Εκθετικά φθίνοντα ημιτονοειδής ακολουθία

$x(n) = B r^n \sin(\omega n + \phi)$, $0 < |r| < 1$

□ Βηματική ακολουθία : $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

□ Κραυτική ακολουθία : $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

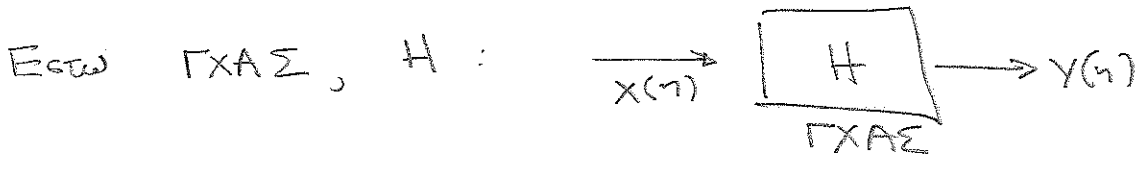
□ Ακολουθία ριψπας : $r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ ($= n u(n)$)

□ Απόκριση ΓΧΑΣ : Συνέλιξη

Είναι προφανές ότι $x(n) \cdot \delta(n) = x(0) \cdot \delta(n)$
 $x(n) \delta(n-k) = x(k) \delta(n-k)$.

Επομένως, $x(n) = \dots + x(-2) \delta(n+2) + x(-1) \delta(n+1) + x(0) \delta(n) +$
 $x(1) \delta(n-1) + x(2) \delta(n-2) + \dots$

$\therefore x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)$.



$$y(n) = H \{ x(n) \} = H \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k) \right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) H \{ \delta(n-k) \} \quad [H: \text{πρακτικό}]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h_k(n),$$

όπου $h_k(n) = H \{ \delta(n-k) \}$. Εφόσον το σύστημα είναι ΧΑ,

$h_k(n) = h_0(n-k) = h(n-k), \quad (h_0(n) = H \{ \delta(n) \})$

$\therefore y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) \triangleq x(n) * h(n)$

$h(n) = H \{ \delta(n) \}$: κρουστική απόκριση

□ Αιτιατό σύστημα : $h(n) = 0, \forall n < 0$

□ Ευσταδές \Leftrightarrow : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$

Απόκριση Συχνότητας Συστήματος, FT Διακριτού Σήματος.



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$$

οπότε

$$H(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k}$$

Απόκριση Συχνότητας Συστήματος Διακριτού Χρόνου.

4.2 Ανάλυση Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου

4.2.1 Περιοδικές Ακολουθίες: Διακριτές Σειρές Fourier (Discrete-Time Fourier Series) DTFS

- Θέλουμε να αναπαραστήσουμε μια περιοδική ακολουθία ως ένα γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών ημιτονοειδών ακολουθιών.
- Εστω ότι $x(n) = x(n+N)$; N : θετική περιόδος του $x(n)$
- Θέλουμε να αναπαραστήσουμε το $x(n)$ ως:

$$\hat{x}(n) = \sum_k A(k) \cdot e^{jk\omega_0 n}$$

όπου $\omega_0 = 2\pi/N$ είναι η βασική συχνότητα του $x(n)$.

- Επίσης: Πόσοι όροι της μορφής $A(k)e^{jk\omega_0 n}$ πρέπει να χρησιμοποιηθούν στο παραπάνω συνδυασμό?

• Απάντηση: Οι μιγαδικές ημιτονοειδείς ακολουθίες $e^{jk\omega_0 n}$ είναι N -περιοδικές ακολουθίες ως προς το δείκτη της συχνότητας k :

$$\begin{aligned} e^{j(N+k)\omega_0 n} &= e^{jN\omega_0 n} e^{jk\omega_0 n} \\ &= e^{j2\pi n} e^{jk\omega_0 n} \quad [\omega_0 = 2\pi/N] \\ &= e^{jk\omega_0 n} \end{aligned}$$

* Επιμέλως: υπάρχουν μόνο N διαφορετικές μιγαδικές ημιτονοειδείς ακολουθίες της μορφής $e^{jk\omega_0 n}$.

(Υπερδύμηση: Μιγαδικά ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου, της μορφής $e^{jk\omega_0 t}$ με διαφορετικές συχνότητες $k\omega_0$ είναι διαφορετικές συναρτήσεις).

• Συνεπώς για την αναπαράστασή μας θα έχουμε ότι:

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} A(k) e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

όπου ο δείκτης $k=\langle N \rangle$ σημαίνει ότι το k παίρνει N συνεχείς τιμές. Π.χ. $k=0, 1, \dots, N-1$ ή $k=-N/2, \dots, N/2-1$.

• Θέλουμε λοιπόν να λύσουμε το εγχείρημα βέλτιστης αποδόσεως (σε αναλογία με την ανάλυση μας στις σειρές Fourier αναλογικών σήματων):

$$\min_{\{A(k), k=\langle N \rangle\}} \text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n) - \hat{x}(n)|^2$$

□ Ορθοκανονικότητα των $\frac{1}{\sqrt{N}} e^{jk\omega_0 n}$

Εστω $\phi_k(n), \phi_m(n)$ δυο N -περιοδικές ακολουθίες. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$I_{k,m} = \sum_{n=\langle N \rangle} \phi_k(n) \cdot \phi_m^*(n)$$

Αν $I_{k,m} = 0$ για $k \neq m$, οι $\phi_k(n)$ & $\phi_m(n)$ είναι ορθογωνικές.

Εστω λοιπόν $\phi_k(n) = e^{jk\omega_0 n}$. Τότε

$$I_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\omega_0 n} = \begin{cases} N, & k=m \\ \frac{1 - e^{j(k-m)2\pi}}{1 - e^{j(k-m)\omega_0}}, & k \neq m \end{cases} \rightarrow 1$$

↑ γεωμετρική σειρά

$$\therefore I_{k,m} = \begin{cases} N, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Άρα οι N μιγαδικές ακολουθίες $\{ e^{jk\omega_0 n}; k=\langle N \rangle \}$, των οποίων οι συχνότητες διαχωρίζονται από ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας ω_0 , είναι ορθογώνιες.

□
$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n) - \hat{x}(n)|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n) - \sum_{k=\langle N \rangle} A(k) e^{jk\omega_0 n}|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left\{ \left(x(n) - \sum_{k=\langle N \rangle} A(k) e^{jk\omega_0 n} \right) \left(x(n) - \sum_{m=\langle N \rangle} A(m) e^{jm\omega_0 n} \right)^* \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 - \sum_{m=\langle N \rangle} A^*(m) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{jm\omega_0 n} \right) \\ &\quad - \sum_{k=\langle N \rangle} A(k) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^*(n) e^{jk\omega_0 n} \right) + \sum_{\substack{k, m \\ =\langle N \rangle}} A^*(m) A(k) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-m)\omega_0 n} \right) \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

(87)

και εφαρμόζουμε τη διαδικασία της ορθογωνιότητας των $e^{jk\omega_0 n}$:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 - \sum_{k=\langle N \rangle} A^*(k) X(k) -$$

$$- \sum_{k=\langle N \rangle} A(k) X^*(k) + \sum_{k=\langle N \rangle} |A(k)|^2$$

"completing the square" \rightarrow

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 + \sum_{k=\langle N \rangle} \left(|A(k)|^2 - A^*(k) X(k) - A(k) X^*(k) + |X(k)|^2 \right) -$$

$$\sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2$$

$$\therefore MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 + \sum_{k=\langle N \rangle} |A(k) - X(k)|^2 - \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2$$

Το MSE ελαχιστοποιείται όταν

$$A(k) = X(k).$$

Παρατήρηση: $X(k+N) = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j(k+N)\omega_0 n}$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n} e^{-jN\omega_0 n} \rightarrow e^{-j2\pi n} = 1$$

$$= X(k)$$

$\Rightarrow X(k)$ είναι N-περιοδική ακολουθία.

Το ελαχιστοποιημένο MSE είναι:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 - \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2$$

$$\text{Αλλά, } \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N^2} \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{m=\langle N \rangle} x(n) x^*(m) e^{j(m-n)\omega_0 k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_n \sum_m x(n) x^*(m) \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} e^{j(m-n)\omega_0 k}}_{\substack{1 \text{ αν } m=n \\ 0 \text{ αν } m \neq n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=\langle N \rangle} |X(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2$$

Επιθυμώ το MSE = 0 ! Επιθυμώ το σφάλμα είναι μηδέν $\forall n \Rightarrow \hat{x}(n) = x(n) !$

ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΣΕΙΡΑ FOURIER , DTFS

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFS}; \omega_0} X(k)$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

$$x(n) = x(n+N) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$X(k) = X(k+N)$$

* Και η $\{x(n)\}$, και η $\{X(k)\}$ αποτελούν πλήρεις & ακριβείς περιγραφές του διακριτού σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1: $x(n) = \cos(\frac{\pi}{8}n + \varphi)$, DTFS = ?

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow N = 16, \omega_0 = \frac{2\pi}{16}$$

$$x(n) = \frac{e^{j[\frac{\pi}{8}n + \varphi]} + e^{-j[\frac{\pi}{8}n + \varphi]}}{2}$$

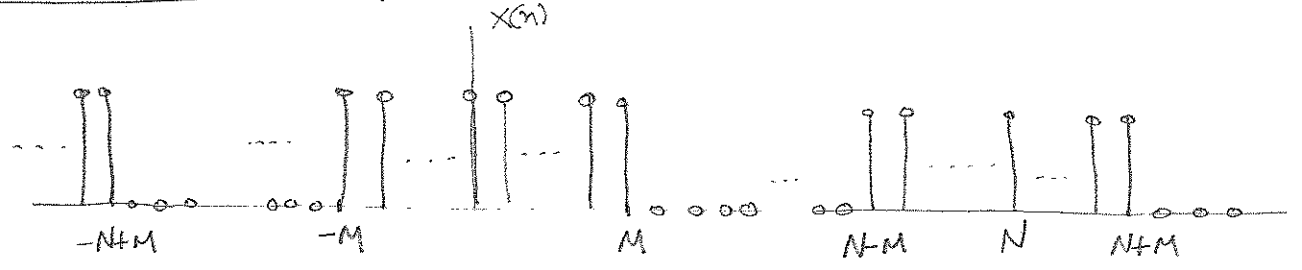
$$= \frac{1}{2} e^{j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{8}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}n} e^{j\varphi}$$

$$= \sum_{k=\langle 16 \rangle} X(k) e^{jk\frac{\pi}{8}n} = \sum_{k=-7}^8 X(k) e^{jk\frac{\pi}{8}n}$$

$$\Rightarrow x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFS}; 2\pi/16} X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-j\varphi} & , k = -1 \\ \frac{1}{2} e^{j\varphi} & , k = 1 \\ 0 & , -7 \leq k \leq 8 \ \& \ k \neq \pm 1 \end{cases}$$

↓
περιοδική ακολουθία με περίοδο N=16.

Παράδειγμα 2: Περιοδικός τετραγωνικός παλμός.



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^{N-M-1} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-M}^M e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} e^{jk\omega_0 M} \sum_{m=0}^{2M-1} e^{-jk\omega_0 m}$$

$$\therefore X(k) = \frac{1}{N} e^{jk\omega_0 M} \frac{1 - e^{-jk\omega_0 (2M)}}{1 - e^{-jk\omega_0}}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$X(k) = \frac{1}{N} e^{jk\omega_0 M} \frac{e^{-jk\omega_0 \frac{2M+1}{2}}}{e^{-jk\omega_0/2}} \cdot \frac{e^{jk\omega_0 \frac{2M+1}{2}} - e^{-jk\omega_0 \frac{2M+1}{2}}}{e^{+jk\omega_0/2} - e^{-jk\omega_0/2}} ; k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\omega_0}{2} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\omega_0}{2}\right)} ; k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{N} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)} ; k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \quad *$$

Για $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ έχουμε ότι

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M 1 = \frac{2M+1}{N} ; \text{ που είναι το όριο}$$

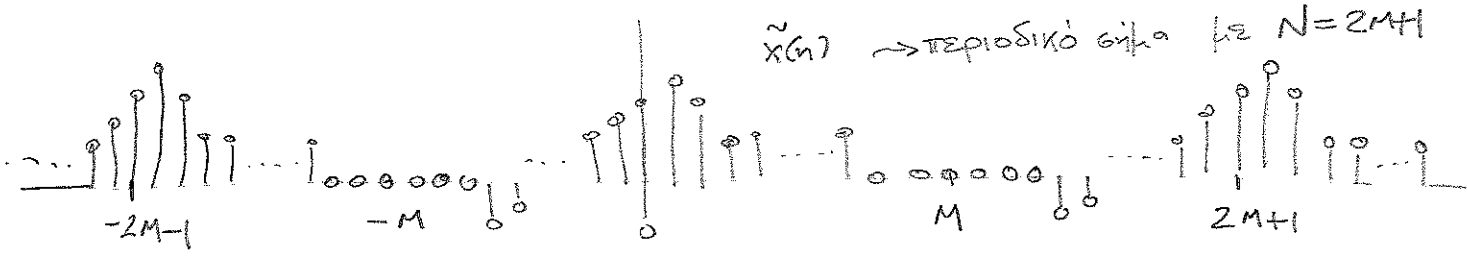
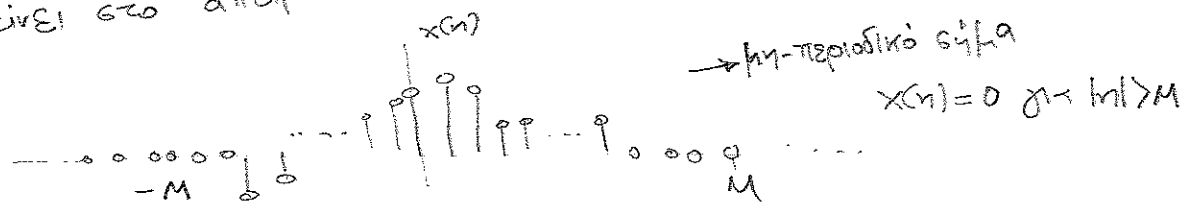
της * καθώς $k \rightarrow 0, \pm N, \pm 2N, \dots$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$X(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{N} (2M+1)\right)}{\sin\left(k \frac{\pi}{N}\right)}$$

4.2.2 Μη-Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου: The Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

Θα θεωρήσουμε και πάλι την μη-περιοδική ακολουθία $x(n)$ ως το όριο μιας περιοδικής ακολουθίας της οποίας η περίοδος N τείνει στο άπειρο.



$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & , -M \leq n \leq M \\ 0 & , |n| > M \end{cases}$$

Ιχάζει ότι $x(n) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \tilde{x}(n)$.

DTFS Αναπαράσταση για το $\tilde{x}(n)$:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-M}^M X(k) e^{jk\omega_0 n} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{2M+1} \quad (1)$$

όπου $X(k) = \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \tilde{x}(n) e^{-jk\omega_0 n}$

Εφόσον $\tilde{x}(n) = x(n)$ για $-M \leq n \leq M$,

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n) e^{-jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jk\omega_0 n} \quad [x(n) = 0 \quad \forall |n| > M] \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα μια συνεχή συνάρτηση της συχνότητας, $X(e^{j\omega})$, της οποίας οι τιμές στις συχνότητες $k\omega_0$ είναι ίσες με τις DTFS συντελεστές διαυρούμενος δια $2M+1$, i.e.,

$$X(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \text{έτσι ώστε}$$

$$X(k) = X(e^{jk\omega_0}) / (2M+1).$$

Τότε (1) $\Rightarrow \tilde{x}(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$

$$(2) \quad \tilde{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \quad \left[\omega_0 = \frac{2\pi}{2M+1} \right]$$

Πρέπει τώρα να παρούμε το όριο της (2) καθώς $M \rightarrow +\infty$.

• Πρώτα παρατηρούμε ότι καθώς το M αυξάνεται, η Διεύθυνση Συχνότητας ω_0 μειώνεται, συνεπώς η απόσταση των αλληλοεικόνων γραμμών στο DTFS μειώνεται. Δηλαδή το φάσμα τείνει να γίνει συνεχές: $M \rightarrow +\infty \Rightarrow \omega_0 \rightarrow d\omega$, $\omega = k\omega_0$ συνεχής συχνότητα.

• Επίσης, παρατηρούμε ότι η $X(e^{j\omega})$ είναι 2π -περιοδική ως προς ω . (εφόσον η $e^{j\omega n}$ είναι 2π -περιοδική ως προς ω).

Επομένως, $x(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \tilde{x}(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$.

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

γιατί $\lim_{M \rightarrow \infty} M\omega_0 = \lim_{M \rightarrow \infty} M \frac{2\pi}{2M+1} = \pi$.

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER, DTFT

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad : \text{ } 2\pi\text{-ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ}$$

* Συνθήκη ύπαρξης του DTFT, $X(e^{j\omega})$, για $x(n)$, $-\infty < n < +\infty$:

Αν ισχύει ότι $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$ τότε το άθροισμα

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j\omega n}$ συγκλίνει σε μία συνεχή συνάρτηση του ω .

Παράδειγμα 1. $x(n) = a^n u(n)$ (εκθετική απόσβεση).

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

Για $|a| > 1$ το άθροισμα αποκλίνει. Για $|a| < 1$ έχουμε τη γεωμετρική σειρά:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^n$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} ; |a| < 1$$

Παράδειγμα 2: Τετραγωνικός παλμός $x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M e^{-j\omega n} = \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega(m-M)}$$

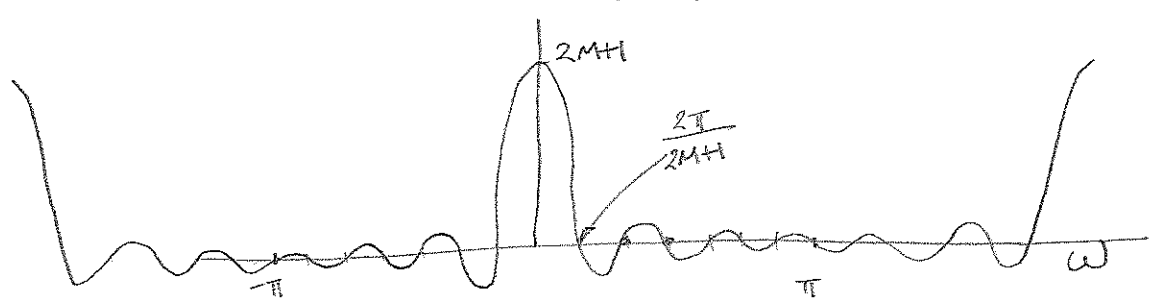
$$= e^{j\omega M} \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\omega m}$$

$$= \begin{cases} e^{j\omega M} \frac{1 - e^{-j\omega(2M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} & , \omega \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ 2M+1 & , \omega = 0, \pm 2\pi, \dots \end{cases}$$

Για $\omega \neq 2k\pi, k=0, \pm 1, \dots$

$$X(e^{j\omega}) = \dots = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}(2M+1)\right)}{\sin(\omega/2)} \xrightarrow{\omega \rightarrow 2k\pi} 2M+1$$

$$\therefore X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}(2M+1)\right)}{\sin(\omega/2)}$$



01 4 Αναπαραστάσεις Fourier :

Time Domain	Periodic	Nonperiodic	
Continuous	<p>Fourier Series</p> $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$ $X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ <p>$x(t)$ has period T $\omega_0 = 2\pi/T$</p>	<p>Fourier Transform</p> $X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$	Non-periodic
Discrete	<p>Discrete time F.S.</p> $x(n) = \sum_{k \in \langle N \rangle} X(k) e^{jk\omega_0 n}$ $X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$ <p>$x(n)$ & $X(k)$ have period N $\omega_0 = 2\pi/N$</p>	<p>Discrete time FT</p> $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ <p>$X(e^{j\omega})$ has period 2π.</p>	Periodic
	Discrete	Continuous	Frequency Domain.

4.3 Αναπαράσταση Σημάτων Διακριτού Χρόνου μέσω μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών: Ο μετασχηματισμός Z.

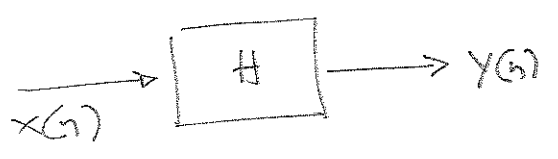
Στόχος: Η γενίκευση του DTFT για την περιγραφή μη-ελαστικών συστημάτων των οποίων η κρουστική απόκριση δεν είναι αδρανή και κατά κάποιο τρόπο. Ο μετασχηματισμός Z είναι για συστήματα διακριτού χρόνου ένα εργαλείο ανάλογο του μετασχηματισμού Laplace για συστήματα συνεχούς χρόνου.

4.3.1 Ο μετασχηματισμός Z.

θεωρούμε τη μιγαδική εκθετική ακολουθία $x(n) = z^n$, όπου $z = r e^{j\omega}$, ως την είσοδο σε ένα ΓΧΑΣ.

$$x(n) = r^n e^{j\omega n} = r^n \cos(\omega n) + j r^n \sin(\omega n).$$

(r: damping factor, ω : sinusoidal frequency).



$$\begin{aligned}
 y(n) &= H \{ x(n) \} = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k}
 \end{aligned}$$

Ορισμός: Συνάρτηση Μεταφοράς:

$$H(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} \quad (1)$$

$$\leadsto y(n) = H \{ z^n \} = H(z) \cdot z^n$$

↳ eigenfunction

Έστω λοιπόν τώρα ότι θέλουμε να αναπαράσουμε ένα γενικό σήμα ως ένα γραμμικό συνδυασμό ιδιοσυμμετρίσεων z^n , $z = r e^{j\omega}$.

$$\begin{aligned} a) \Rightarrow H(r e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) (r e^{j\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (h(n) r^{-n}) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

Επομένως, η $H(r e^{j\omega})$ αντιστοιχεί στο DTFT του σήματος $h(n) r^{-n}$. Ο αντίστροφος DTFT του $H(r e^{j\omega})$

θα είναι:

$$h(n) r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(r e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(r e^{j\omega}) (r e^{j\omega})^n d\omega$$

Θέτουμε $z = r e^{j\omega}$. Επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς ω , r μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερά και $dz = jr e^{j\omega} d\omega$
 $\Rightarrow d\omega = (1/j) z^{-1} dz$. Καθώς το ω μεταβάλλεται από $-\pi$ στο π , το z μεταβάλλεται σε ένα κύκλο ακτίνας r με φορά αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

$$\therefore h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) z^{n-1} dz$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το σήμα $h(n)$ ως ένα συνδυασμό κυκλικών εκθετικών z^n με πόση $\frac{1}{2\pi j} \cdot H(z) z^{n-1} dz$.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z (Διτρησπος)

$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

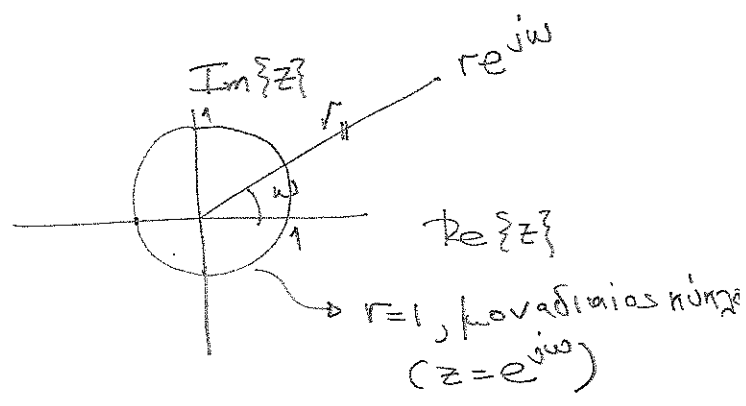
• Αναγκαία συνθήκη ύπαρξης του ΜΖ είναι η απόλυτη

$x(n) z^{-n}$ να είναι απόλυτως ερπώσιμη:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n}| < \infty$$

• Το πεδίο τιμών r για τις οποίες ικανοποιείται η παραπάνω σχέση ονομάζεται Πεδίο Σύγκλισης (ROC).

• Πεδίο Z (z-plane):



• Αν η $x(n)$ είναι απόλυτως ερπώσιμη (ie, το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, $r=1$) τότε ο DTFT υπάρχει και ισχύει ότι:

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

• Στον πράξη θα ασχοληθούμε με συνάρτησεις Z ως κορμούς

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

c_k : μηδενικά, d_k : πόλοι

(1) $X(n) = a^n u(n)$ ZT & ROC

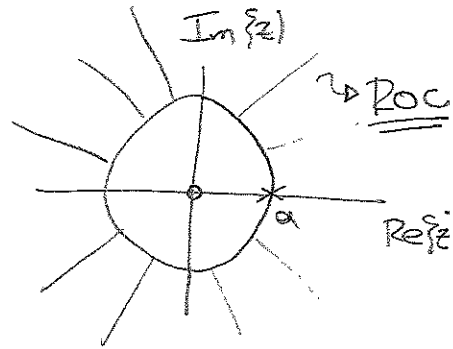
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$\therefore X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} ; |z| > |a|$$

$$X(z) = \frac{z}{z - a} ; |z| > |a|$$

↓
ZT

↓
ROC.



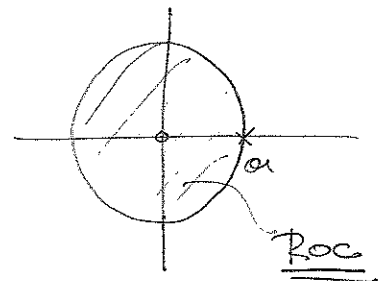
(2) $X(n) = -a^n u(-n-1)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$= - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - z a^{-1}} ; |z| < |a|$$

$$= \frac{z}{z - a} ; |z| < |a|$$



(3) $X(n) = -u(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

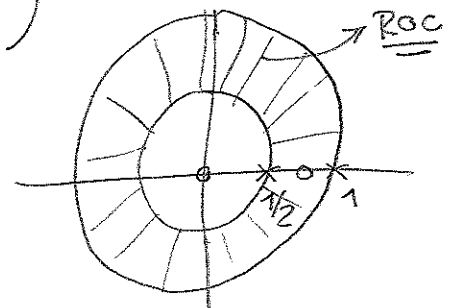
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) z^{-n} - u(-n-1) z^{-n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} z\right)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} z\right)^n + 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z} + 1 - \frac{1}{1 - z} , \quad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

$$= \frac{z (2z - 3/2)}{(z - 1/2)(z - 1)} , \quad 1/2 < |z| < 1$$



□ Παρατηρήσεις για την περιοχή σύγκλισης του ΜΖ

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n} \quad \text{για ένα σήμα που}$$

ορίζεται μεταξύ n_1 και n_2 .

(i) Αν n_1 ή n_2 είναι πεπερασμένοι ακέραιοι τότε η ROC είναι όλο το z -επίπεδο εκτός ίσως των σημείων $z=0$ και $|z|=\infty$. (ύπαρξη όρων για $n_2 > 0 \rightarrow z^{-1}$ στην έκφραση του $X(z) \rightarrow z=0$ εκτός της ROC. ύπαρξη όρων για $n_1 < 0, \rightarrow z$ στην έκφραση του $X(z) \rightarrow |z|=\infty$ εκτός ROC.)

(ii) Έστω τώρα $n_1 = -\infty, n_2 = +\infty$.

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| |z|^{-n}$$

$$\therefore |X(z)| \leq \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)| |z|^{-n}}_{I_-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)| |z|^{-n}}_{I_+(z)}$$

$$\therefore |X(z)| \leq I_-(z) + I_+(z)$$

Έστω τώρα ότι το σήμα $x(n)$ δεν αυξάνεται ταχύτερα από αντίστοιχες εκθετικές ακολουθίες, τότε όταν $n \rightarrow +\infty$, όσο και $n \rightarrow -\infty$:

$$|x(n)| \leq A_- (\Gamma_-)^n, \quad n < 0$$

$$|x(n)| \leq A_+ (\Gamma_+)^n, \quad n \geq 0$$

Τότε
$$I_-(z) \leq A_- \sum_{n=-\infty}^{-1} (\Gamma_-)^n |z|^{-n} = A_- \sum_{-\infty}^{-1} (\Gamma_-/|z|)^n$$

$$\therefore I_-(z) \leq A_- \sum_{k=1}^{+\infty} (\Gamma_-/|z|)^k < \infty \quad \boxed{\text{iff } |z| < \Gamma_-}$$

Ομοίως
$$I_+(z) \leq A_+ \sum_{n=0}^{+\infty} (\Gamma_+)^n |z|^{-n} = A_+ \sum_{n=0}^{+\infty} (\Gamma_+/|z|)^n < \infty$$

$$\boxed{\text{iff } |z| > \Gamma_+}$$

$$\therefore \text{Επιπλέον} \quad \boxed{|X(z)| < \infty \quad \text{iff} \quad r_+ < |z| < r_-} \quad (100)$$

(υποθέτουμε ότι $r_+ < r_-$)

Συμπεράσματα:

- * Η ROC ενός αδιατάκτου σήματος $x(n)$ που ορίζεται στο διάστημα $[n_0, +\infty]$ (right-sided signal) (ακολουθία δεξιάς πλευράς) έχει τη μορφή $|z| > r_+$.
- * Η ROC ενός σήματος $x(n)$ που ορίζεται στο διάστημα $[-\infty, n_0]$ (left-sided signal) (ακολουθία αριστεράς πλευράς) έχει μορφή $|z| < r_-$.
- * Η ROC ενός σήματος $x(n)$ που ορίζεται στο $[-\infty, +\infty]$ (Διπλευρή ακολουθία) έχει τη μορφή $r_+ < |z| < r_-$.

4.3.2 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

$$\text{Έστω} \quad x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) ; \text{ROC: } R_x$$

$$y(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) ; \text{ROC: } R_y$$

(1) Γραμμικότητα

$$a x(n) + b y(n) \xleftrightarrow{Z} a X(z) + b Y(z) ; \text{ROC: τουλάχιστον } R_x \cap R_y.$$

Αν κάποιος πόλος της μιας συνάρτησης εξαλείφεται από αντίστοιχο μηδενικό της άλλης, τότε η περιοχή συγκλίσεως του γραμμικού τους συνδυασμού μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $R_x \cap R_y$, δηλαδή την τομή των δυο περιοχών συγκλίσεως.

(2) Κατωπεριθιος στο χρονο

$$w(n) = x(-n) \xleftrightarrow{z} X(1/z) ; \text{Roc} : 1/R_x$$

$$W(z) = Z \{ x(-n) \} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) (z^{-1})^m = X(z^{-1})$$

Αν $R_x : a < |z| < b$, τότε $R_w : a < 1/|z| < b$
∴ $R_w : 1/b < |z| < 1/a$

(3) Ολισηση στο χρονο

$$x(n-n_0) \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z) ; \text{Roc} : R_x \text{ εκτος ισως των } z=0 \text{ η } |z|=\infty$$

Πλ $y(n) = a^{n-2} u(n-2), \quad Y(z) = ?$

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

Επομενως $Y(z) = z^{-2} X(z) = \frac{1}{z(z-a)}, \quad |z| > |a|$

Σημειωση: $x(n-1) \xleftrightarrow{z} z^{-1} X(z)$, δηλαδη καθυστερηση
κατα ενα δειγμα αντιστοιχει σε πολλαπλασιασμο με z^{-1} . Για
αυτο το λογο, θα δειξε σε ψηφιακα συστηματα τους
καθυστερησεις δειγματος να συμφορμονται με z^{-1} .



(4) Πολλαπλασιασμός με εκθετική κλιμάκωση

102

Έστω a : μιγαδικός.

$$a^n x(n) \xleftrightarrow{z} X(z/a); \text{Roc: } |a| R_x$$

$$(R_x : b_1 < |z| < b_2 \rightsquigarrow |a| R_x : |a| b_1 < |z| < |a| b_2)$$

• Αν η $X(z)$ περιέχει όρους της μορφής $1 - d z^{-1}$, τότε η $X(z/a)$ περιέχει όρους $1 - a d z^{-1}$. Επομένως οι πόλοι και τα μηδενικά της $X(z)$ μεταβάλλονται κατά $|a|$ ως προς το μέτρο τους και κατά $\arg\{a\}$ ως προς τη γωνία τους.

(5) Συνένδειξη

$$x(n) * y(n) \xleftrightarrow{z} X(z) \cdot Y(z); \text{Roc: το ελάχιστο } R_x \cap R_y.$$

(6) Παραγωγή

$$n x(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} X(z); \text{Roc: } R_x$$

$$\begin{aligned} z \{n x(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x(n) z^{-n} = z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x(n) z^{-n-1} \\ &= -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{d z^{-n}}{dz} = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \\ &= -z \frac{d}{dz} X(z) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1

$$x(n) = \underbrace{\left(n \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \right)}_{w(n)} * \underbrace{\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u(-n) \right)}_{y(n)}$$

$$X(z) = ? \quad \text{Roc} = ?$$

• $w(n) = n \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad \xleftrightarrow{z} \quad W(z) = ?$

Ξέρουμε ότι $\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z + \frac{1}{2}} ; |z| > \frac{1}{2}$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της παραγώγου έχουμε ότι

$$w(n) = n \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{z} W(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z + \frac{1}{2}} \right)$$

$$= -z \frac{z + \frac{1}{2} - z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2}$$

∴ $w(n) \xleftrightarrow{z} \frac{-\frac{1}{2} z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} ; |z| > \frac{1}{2}$.

• $y(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u(-n) \xleftrightarrow{z} Y(z) = ?$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα του καταπριότου στο χρόνο:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} ; |z| > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u(-n) \xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1}}{z^{-1} - \frac{1}{4}} ; \frac{1}{|z|} > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y(n) \xleftrightarrow{z} \frac{-4}{z - 4} ; |z| < 4$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της συνέλιξης και έχουμε:

$$x(n) = w(n) * y(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = W(z) Y(z) \quad , \quad R_w \cap R_y$$

$$X(z) = \frac{2z}{(z-4)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2} ; \frac{1}{2} < |z| < 4$$

$$x(n) = a^n \cos(\omega_0 n) \cdot u(n) \quad ; \quad a > 0.$$

$$\text{Έχουμε ότι } y(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ; \quad |z| > a$$

Εκφράζουμε το $x(n)$ ως

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot y(n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} y(n) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} y(n)$$

Μέσω των ιδιοτήτων (1) §(4), έχουμε ότι :

$$X(z) = \frac{1}{2} Y(e^{-j\omega_0} z) + \frac{1}{2} Y(e^{j\omega_0} z) \quad ; \quad |z| > a \quad |e^{\pm j\omega_0}| = 1$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0} z^{-1}}$$

$$\therefore a^n \cos(\omega_0 n) \cdot u(n) \leftrightarrow \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}},$$

$$\text{ROC: } |z| > a$$

□

4.3.3 Ο Αντίστροφος Μ.Ζ.

Η αντιστροφή της $X(z)$ ώστε να πάρουμε την $x(n)$ μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους οι κυριότερες των οποίων είναι

1. Χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων
(Δείτε το βιβλίο σας, σελ. 232-234)

2. Ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

3. Διαίρεση

4. Επέκταση σε συνθετικά.

2. Μέθοδος των μερικών κλασμάτων (Partial Fraction Expansion) (105)

Στη μελέτη διακριτών ΓΧΑΣ, θα αξιοποιήσουμε κυρίως με συνάρτηση Z της μορφής:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} ; M < N$$

(Σημείωση: Αν $M \geq N$ τότε με διαίρεση μπορούμε να πάρουμε $X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} f_k z^{-k} + \frac{\tilde{B}(z)}{A(z)}$ με $\tilde{M} < N$.
Για τους όρους $f_k z^{-k}$ θα είναι: $f_k z^{-k} \leftrightarrow f_k \delta(n-k)$.)

Η $X(z)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} ; d_k: \text{πόλοι}$$

(1) Απλοί πόλοι: $X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} ; A_k = \left. (1 - d_k z^{-1}) X(z) \right|_{z=d_k}$

Τότε:

$$A_k (d_k)^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad \text{με ROC: } |z| > |d_k|$$

$$-A_k (d_k)^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad \text{με ROC: } |z| < |d_k|$$

* Προσοχή: Η σχέση μεταξύ της ROC και της θέσης του πόλου καθορίζει αν η ακολουθία θα είναι δεξιά ή αριστερή πλευράς.

(ii) Υπαρξη πολλαπλού πόλου: $d_i - r$ φορές

(106)

Στο $X(z)$ υπάρχουν παράγοντες:

$$\frac{A_1}{1-d_i z^{-1}} + \frac{A_2}{(1-d_i z^{-1})^2} + \dots + \frac{A_r}{(1-d_i z^{-1})^r} \quad k \in$$

$$A_k = \frac{1}{(r-k)!} (-d_i)^{r-k} \frac{d^{r-k}}{du^{r-k}} \left[(1-d_i u)^r X(u) \right] \Big|_{u=d_i^{-1}}$$

(όπου $u = z^{-1}$).

Τότε

$$A \frac{(n+1) \dots (n+m-1)}{(m-1)!} (d_i)^n u(n) \xleftrightarrow{z} \frac{A}{(1-d_i z^{-1})^m}; \text{Roc: } |z| > |d_i|$$

$$-A \frac{(n+1) \dots (n+m-1)}{(m-1)!} (d_i)^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} \frac{A}{(1-d_i z^{-1})^m}; \text{Roc: } |z| < |d_i|$$

□

* Γενική παρατήρηση: Στην αναστροφή του (διόλου) μ.ζ. πρέπει να προσέχουμε τη ROC του $X(z)$: Αν η ROC του $X(z)$ έχει ακτίνα μικρότερη από την ακτίνα του πόλου, d_k , παίρνουμε την ακολουθία αριστεράς πλευράς για την αναστροφή του όρου $\frac{1}{1-d_k z^{-1}}$. Αν η ROC έχει ακτίνα μεγαλύτερη από αυτή του πόλου d_k , τότε παίρνουμε την ακολουθία δεξιάς πλευράς.

Αυτό γίνεται εμφανές στο επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα: $X(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - z^{-1})}$; ROC: $1 < |z| < 2$ (107)

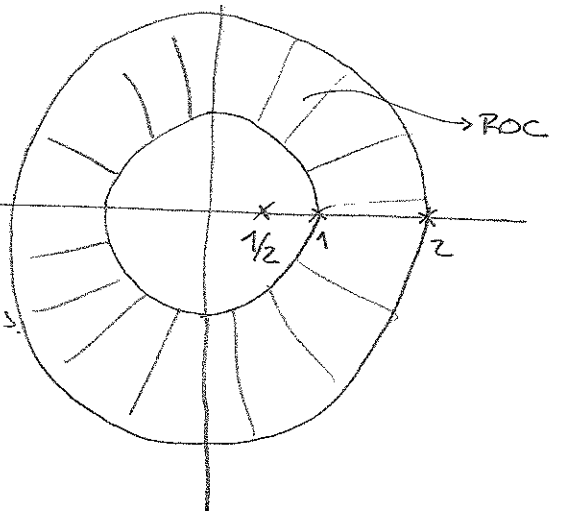
Γράφουμε $X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - z^{-1}}$ όπως

$A_1 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 1$. Ομοίως, $A_2 = 2$, $A_3 = -2$.

Επομένως $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{2}{1 - z^{-1}}$; $1 < |z| < 2$

Πόλοι: $\frac{1}{2}, 1, 2$.

Κέντρο η ακτίνα της ROC είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{2}$, ο όρος $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ στη $X(z)$ αντιστοιχεί σε μια ακολουθία δεξιάς πλευράς.



Δηλαδή $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{z} (\frac{1}{2})^n u(n)$

Ομοίως για τον όρο $-\frac{2}{1 - 2z^{-1}} \xleftrightarrow{z} -2 u(n)$.

Τέλος, η ROC έχει ακτίνα μικρότερη από 2, επομένως ο όρος $\frac{2}{1 - 2z^{-1}}$ αντιστοιχεί σε ακολουθία αριστεράς πλευράς:

$$\frac{2}{1 - 2z^{-1}} \xleftrightarrow{z} -2(2)^n u(-n-1)$$

Τελικά: $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) - 2(2)^n u(-n-1) - 2u(n)$

Παρατήρηση: Αν η ROC του προηγούμενου παραδείγματος ήταν: $\frac{1}{2} < |z| < 2$

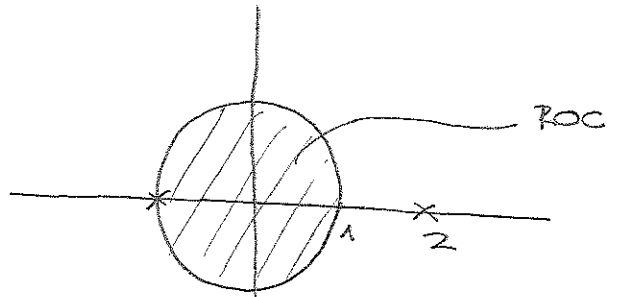
τότε: $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) - 2(2)^n u(-n-1) + 2u(-n-1)$.

□

Παράδειγμα 2 $X(z) = \frac{z^3 - 10z^2 - 4z + 4}{2z^2 - 2z - 4}$; ROC: $|z| < 1$ (108)

Δύο πόλοι: $z = -1$ και 2

Γράψατε τώρα το $X(z)$ ως λόγο δύο πολωνύμων ως προς z^{-1} .



$$X(z) = \frac{1}{2} z \left(\frac{1 - 10z^{-1} - 4z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} \right) = \frac{1}{2} z \cdot W(z)$$

Αφού $M=3 > L=N$, μειώνουμε το βαθμό του πολωνύμου του αριθμητή με ακριβή διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 4z^{-3} - 4z^{-2} - 10z^{-1} + 1 & -2z^{-2} - z^{-1} + 1 \\ -4z^{-3} - 2z^{-2} + 2z^{-1} & -2z^{-1} + 3 \\ \hline -6z^{-2} - 8z^{-1} + 1 & \\ 6z^{-2} + 3z^{-1} - 3 & \\ \hline -5z^{-1} - 2 & \end{array}$$

Επομένως, $W(z) = -2z^{-1} + 3 + \frac{-2 - 5z^{-1}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}$

$$W(z) = -2z^{-1} + 3 + \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{3}{1-2z^{-1}} \quad ; |z| < 1$$

$$\Rightarrow w(n) = -2\delta(n-1) + 3\delta(n) - (-1)^n u(-n-1) + 3(2)^n u(-n-1)$$

Αλλά $X(z) = \frac{1}{2} z W(z) \Rightarrow x(n) = \frac{1}{2} w(n+1)$

$$\therefore x(n) = -\delta(n) + \frac{3}{2}\delta(n+1) - \frac{1}{2}(-1)^{n+1} u(-n-2) + \frac{3}{2}(2)^{n+1} u(-n-2)$$

□

Σημείωση: Εκτός της ROC, συνθήκες όπως αντιστάσεις και ενστάσεις της βοηθούν στην αναστροφή του ζ.τ., δηλαδή στην επιλογή του αν μια ακολουθία είναι δεξιάς ή αριστερής πλευράς.

4. Ανάπτυξη σε σειρά δυναμικών όρων z^{-1} ή z

• Αν η ROC: $|z| > a$ (ή $|z| < a$), αναπτύσσουμε την $X(z)$ ως προς z^{-1} (ή z) ώστε να πάρουμε ακολουθία δειγμάτων (αριστεράς) (αριστεράς)

Πχ. $X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$; ROC $|z| > \frac{1}{2}$

Handwritten long division showing the expansion of $\frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ into a power series in z^{-1} .

Δηλαδή $X(z) = 2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} + \dots$

- ⇒ $x(n) = 0 \quad \forall n < 0$
 $x(0) = 2$
 $x(1) = 2$
 $x(2) = 1$
 $x(3) = \frac{1}{2}$
 \vdots

Αν η ROC ήταν: $|z| < \frac{1}{2}$, αναπτύσσουμε την $X(z)$ ως προς z :

Handwritten long division showing the expansion of $\frac{z^{-1} + 2}{-z^{-1} + 2}$ into a power series in z .

⇒ $X(z) = -2 - 8z - 16z^2 - 32z^3 + \dots$

- ⇒ $x(n) = 0 \quad \forall n > 0$
 $x(0) = -2, x(1) = -8, x(2) = -16, x(3) = -32, \dots$

Η μέθοδος αυτή μπορεί να μη δίνει εκφράσεις κλειστών μορφής για το $x(n)$, αλλά είναι χρήσιμη όταν ο ΖΤ δεν είναι λόγος δύο πολυωνύμων ως προς z :

(110)

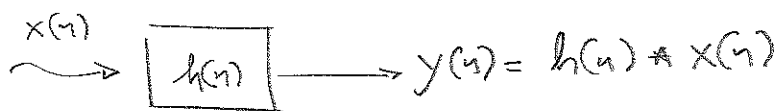
Πχ. $X(z) = e^{z^2}$ Ροο: $\forall z - \{ |z| = \infty \}$

Γνωρίζουμε ότι $e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n) = \begin{cases} 0, & n > 0 \text{ και } n: \text{περιττός} \\ \frac{1}{(n/2)!}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

4.3.4 Ανάλυση ΓΧΑΣ Διακριτού χρόνου με το Μετασχηματισμό Z.



Ορίζουμε $H(z) \triangleq Z \{ h(n) \}$: συνάρτηση μεταφοράς

Τότε $Y(z) = H(z) X(z) \rightsquigarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

□ Το διακριτό σύστημα μπορεί να περιγραφεί και από την εξίσωση διαφοράς

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

Z.T $\Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$

$$\rightsquigarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

II Αιτιότητα και Ευστάθεια

Αιτιότητα: Η κρουστική απόκριση $h(n)$ ενός αιτιατού συστήματος είναι ο $\forall n < 0$. Είναι βήταδι για ακολουθία βεγίας πλεωρής. Συνεπώς, η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ θα είναι της μορφής ROC: $|z| > |a|$, όπου $|a|$ είναι η ακτίνα του πόλου της $H(z)$ που βρίσκεται πιο μακριά από την αρχή των αξόνων.

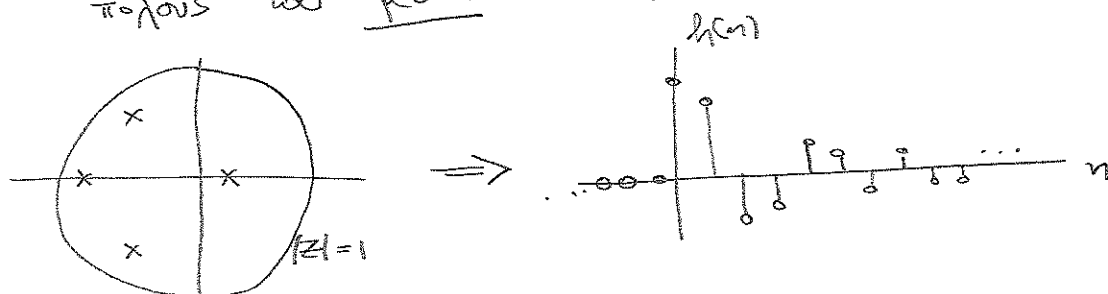
Ένας πόλος μέσα στο μοναδιαίο κύκλο ($|a| < 1$) συνεφέρει μια εκθετικά φθίνουσα ακολουθία ενώ ένας πόλος εκτός του μοναδιαίου κύκλου ($|a| > 1$) συνεφέρει μια εκθετικά αυξανουσα ακολουθία.

Ευστάθεια: Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η κρουστική απόκριση $h(n)$ να είναι αθροιστική κατ' απόλυτο μέτρο. Δηλαδή ο DTFT της $h(n)$ υπάρχει.

Συνεπώς η ROC των $H(z)$ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο.

Ένας πόλος μέσα στο μοναδιαίο κύκλο συνεφέρει μια βεγιοτέρη εκθετικά φθίνουσα ακολουθία, ενώ ένας πόλος έξω από το μοναδιαίο κύκλο συνεφέρει μια αριστοτέρη εκθετικά φθίνουσα ακολουθία.

\Rightarrow Ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα έχει όλους τους πόλους του μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.



□ Για να είναι ένα αντιστρόφο σύστημα $H^{-1}(z)$ αιτιατό ή
 ευσταδές $\exists <$ πρέπει οι πόλοι ΚΑΙ τα μηδενικά του
 $H(z)$ να βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.

(112)

($H(z)$ λέγεται "σύστημα ελάχιστης φάσης" (minimum phase system))

4.3.5 Ο Μονόπλευρος ΖΤ : Λύση Εξισώσεων Διαφορών με
 Αρχικές Συνθήκες

Κατάλληλος για τη μελέτη αιτιατών συστημάτων.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Ο μονόπλευρος ΖΤ ικανοποιεί αντίστοιχες ιδιότητες με αυτές
 του διπλευρού ΖΤ με μία εξαίρεση: την ολιγωρία στο χρόνο:

(α) Δεξιά Ολιγωρία (καθυστερήση)

$$w(n) = x(n-k) \quad (k > 0)$$

$$W(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} w(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n-k) z^{-n} = \sum_{l=-k}^{+\infty} x(l) z^{-(l+k)}$$

$$\therefore W(z) = z^{-k} \left[\sum_{l=0}^{+\infty} x(l) z^{-l} + \sum_{l=-k}^{-1} x(l) z^{-l} \right]$$

$$\therefore W(z) = z^{-k} X(z) + z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} x(l) z^{-l}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n-k) \xrightarrow{z^{-k}} x(-k) + x(-k+1) z^{-1} + \dots + x(-1) z^{-k+1} + z^{-k} X(z) \quad (k > 0)}$$

Όμοια, για αριστερή ολιγωρία (προίγηση)

$$\left[\begin{aligned} x(n+k) &\xrightarrow{z^{-k}} -x(0) z^k - x(1) z^{k-1} - \dots - x(k-1) z + z^k X(z) \\ &= z^k X(z) - z^k \sum_{l=0}^{k-1} x(l) z^{-l} \quad (k > 0) \end{aligned} \right.$$

Εφαρμογή: Έστω το σύστημα:

$$y(n) - 0.9y(n-1) = x(n)$$

Να βρεθεί η έξοδος $y(n]$ αν η είσοδος είναι $x(n) = u(n)$
και αρχική συνθήκη είναι $y(-1) = 2$.

Παίρνουμε το μονόπλευρο ΖΤ της σχέσης & έχουμε ότι:

$$Y(z) - 0.9 [y(-1) + z^{-1} Y(z)] = X(z)$$

$$\Rightarrow (1 - 0.9z^{-1}) Y(z) = X(z) + 0.9y(-1)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{X(z)}{1 - 0.9z^{-1}} + \frac{0.9y(-1)}{1 - 0.9z^{-1}}$$

\downarrow εξαρτημένη από αρχικά \downarrow εξειδικευμένη από αρχικά

$$x(n) = u(n) \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad y(-1) = 2.$$

$$\therefore Y(z) = \frac{1}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - z^{-1})} + \frac{1.8}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{-9}{1 - 0.9z^{-1}} + \frac{10}{1 - z^{-1}} + \frac{1.8}{1 - 0.9z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y(n] = \underbrace{-9(0.9)^n u(n)}_{\text{εξαρτημένη}} + \underbrace{10u(n)}_{\text{εξειδικευμένη}} + \underbrace{1.8(0.9)^n u(n)}_{\text{εξειδικευμένη}} \quad \square$$