ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

C1. Ορισμοί

□ Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών (complex numbers) ορίζεται ως

$$\mathbb{C} = \{a + jb : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Το $j = \sqrt{-1}$ (δηλαδή $j^2 = -1$) καλείται μοναδιαίος φανταστικός αριθμός.

Η μορφή $z = a + jb$ καλείται <u>συνήθης</u> ή <u>καρτεσιανή</u>.

Το a καλείται <u>πραγματικό</u> μέρος : $a = Re(z)$

Το b -//- <u>φανταστικό</u> μέρος : $b = Im(z)$.

Πράξεις για τους $z_1 = a + jb$ και $z_2 = c + jd \in \mathbb{C}$:

Πρόσθεση : $z_1 + z_2 = (a+c) + j(b+d)$

Αφαίρεση : $z_1 - z_2 = (a-c) + j(b-d)$

Πολ/σμός : $z_1 z_2 = ac + j^2 bd + jbc + jad = (ac-bd) + j(bc+ad)$

□ Πιο αυστηρά, οι μιγαδικοί ορίζονται ως το σώμα

$\mathbb{C} = \{(a,b), \oplus, \otimes\}$ με $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ και

$\oplus$: προσθετική πράξη : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

$\otimes$: πολλαπλασιαστική πράξη :

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $(a,b) \otimes (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

. Το υποσύνολο του $\mathbb{C}$ $r = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{C}$ και είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}$. Με βάση αυτό, συμβολίζουμε το $(a,0)$ με a, δηλαδή $(3,0) \equiv 3$!

. Το στοιχείο $(0,1) \in \mathbb{C}$ το συμβολίζουμε με j (φανταστική μονάδα)

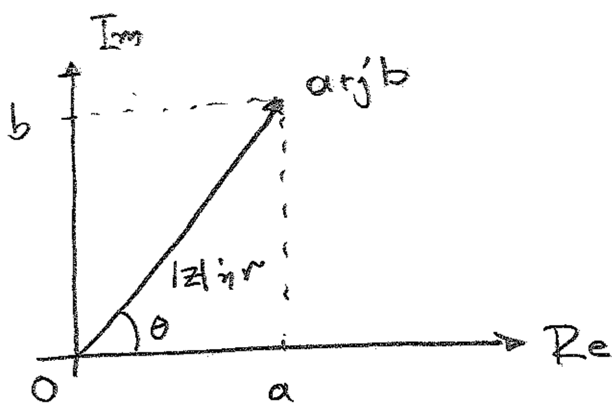
Ισχύει ότι: $j^2 = (0,1) \otimes (0,1)$

$$= (0\cdot0 - 1\cdot1,\ 1\cdot0 + 0\cdot1) = (-1, 0) = -1.$$

Δηλαδή το $j^2 = -1$ είναι απλά ένας συμβολισμός που δηλώνει το αποτέλεσμα της πολλαπλασιαστικής πράξης του μιγαδικού $(0, 1) \in \mathbb{C}$ με τον εαυτό του. Αποφεύγουμε δηλαδή την αντιδιαισθητική αναφορά στην ρίζα του -1.

$\mathbb{C}$2. Μιγαδικό Επίπεδο

Κάθε μιγαδικός αριθμός (a, b) ή $z = a + jb$ αντιπροσωπεύει ένα σημείο $M(z)$ στο επίπεδο.



Διάγραμμα Argand

$\mathbb{C}$2.1 Πολική ή τριγωνομετρική μορφή:

$$\boxed{z = a + jb = r\cos\theta + j\, r\sin\theta}$$

$$a = r\cos\theta \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a}{r}\\ \sin\theta &= \frac{b}{r}\end{aligned}}$$

$$b = r\sin\theta \Rightarrow$$

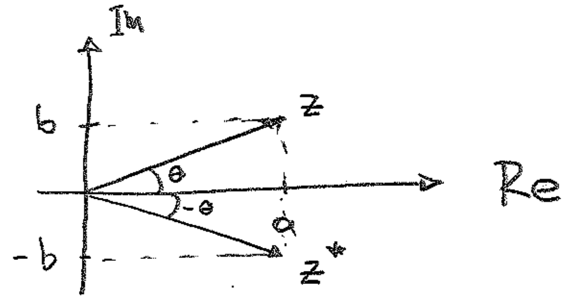
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}(b/a)}$$

- Το $\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ονομάζεται <u>μέτρο</u> ή <u>απόλυτη τιμή</u> του z και συμβολίζεται με $|z|$ ή $\mathrm{mod}(z)$. $|z| \geq 0$.

- Η γωνία θ καλείται <u>όρισμα</u> ή γωνία του z και συμβολίζεται με $\arg(z)$. Η θ δεν είναι μοναδική αφού οι γωνίες $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ είναι ορίσματα του ίδιου μιγαδικού. Ορίζουμε ως <u>πρωτεύουσα τιμή</u> του ορίσματος του z την τιμή του θ που ανήκει στο διάστημα $-\pi < \theta < \pi$.

C2.2. Συζυγής Μιγαδικός

Ορίζεται ως ο $z^* \equiv \bar{z} = a - jb$. Γεωμετρικά ο z^* αποτελεί τον κατοπτρισμό του z ως προς τον άξονα των πραγματικών:



Χρήσιμες ιδιότητες:

- $|z|^2 = z \cdot z^*$
- $|z| = |z^*|$
- $(z+w)^* = z^* + w^*$
- $(zw)^* = z^* \cdot w^*$
- $(z/w)^* = \dfrac{z^*}{w^*}$
- $z^{-1} = \dfrac{z^*}{|z|^2}$
- $z^* = z \iff Im(z) = 0$, ie, $z \in \mathbb{R}$
- $z = -z^* \iff Re(z) = 0$, ie, $z \in \mathbb{I}$
- $(z^*)^* = z$
- $R(z) = \dfrac{z + z^*}{2}$, $Im(z) = \dfrac{z - z^*}{2j}$

C2.3. Εκθετική Μορφή και τύπος του Euler

Η περίφημη σχέση του Euler: $\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$

Η ανάπτυξη σε σειρά Maclaurin δίνει:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (1)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots \quad (2)$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (3)$$

Από τις Εξ. (1),(2),(3), προκύπτει η σχέση του Euler.

Επομένως, μπορούμε τώρα να γράψουμε ότι:

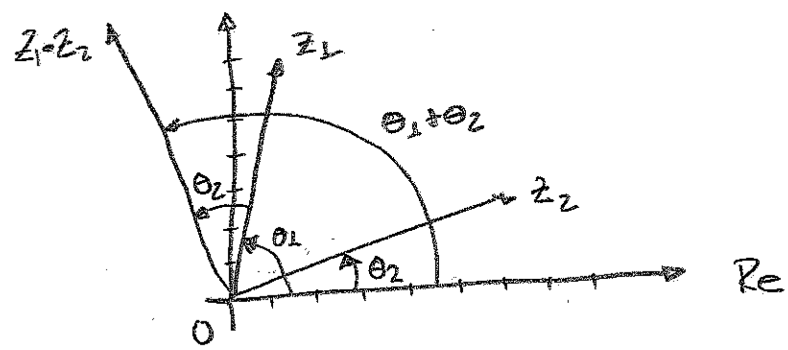
$$z = a + jb = r(\cos\theta + j\sin\theta) = r \cdot e^{j\theta}$$

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{j\theta}}$$ Εκθετική Μορφή

· Στο μιγαδικό επίπεδο, ο μιγαδικός $z = r e^{j\theta}$ αναπαριστά ένα σημείο σε απόσταση r από το κέντρο των αξόνων και υπό γωνία θ με τον άξονα των πραγματικών.

· Με βάση την εκθετική μορφή των μιγαδικών, μπορούν να ερμηνευτούν οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με χρήσιμο εποπτικό γεωμετρικό τρόπο:

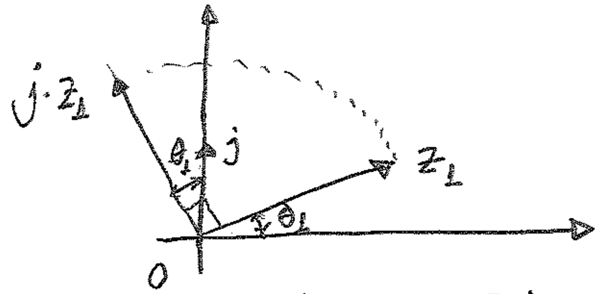
I) $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$:



Συνεπώς ο πολλαπλασιασμός του z_1 με τον z_2 μπορεί να θεωρηθεί ως μία <u>στροφή</u> του z_1 κατά τη γωνία θ_2 (το όρισμα του z_2) και <u>κλιμάκωση</u> του μέτρου του z_1 κατά το μέτρο, $|z_2|$, του z_2, δηλαδή, επιμήκυνση ή σμίκρυνση του z_1, ανάλογα αν $|z_2|<1$ ή $|z_2|>1$.

* Ο πολλαπλασιασμός με το φανταστικό αριθμό $j = e^{j\pi/2}$ αντιστοιχεί σε μια στροφή 90° με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού:

$$z_1 \cdot j = r_1 e^{j\theta_1} \cdot e^{j\pi/2}$$
$$= r_1 e^{j(\theta_1+\pi/2)}$$



Πολλαπλασιασμός του z_1 με τον j:
Στροφή του z_1 κατά $+90°$.

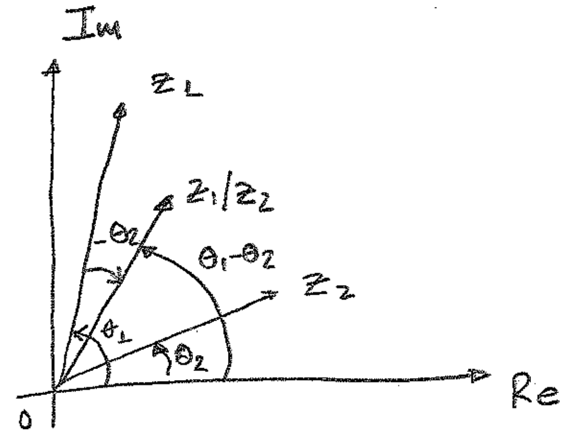
* Επομένως, η γεωμετρική σημασία της εξίσωσης $j^2=-1$ που ορίζει τη φανταστική μονάδα, είναι πως δύο διαδοχικές στροφές 90° ταυτίζονται με μία στροφή 180°!

Για τη διαίρεση του z_1 με τον z_2 έχουμε:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

ή χρησιμοποιώντας την πολική μορφή:

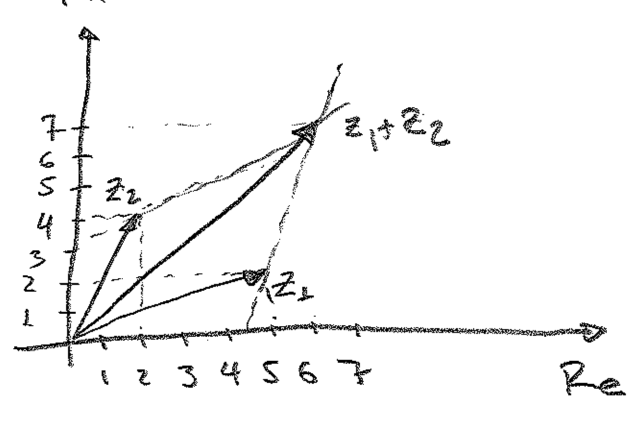
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$



Από την άλλη, η πρόσθεση μιγαδικών γίνεται πιο εύκολα όταν οι z_1 και z_2 βρίσκονται στην καρτεσιανή μορφή τους και ταυτίζεται με πρόσθεση διανυσμάτων:

$z_1 = 5+j2$
$z_2 = 2+j4$

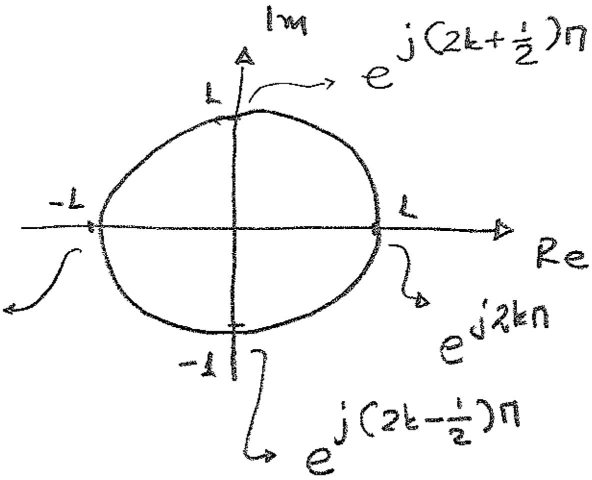
$z_1+z_2 = (5+2)+j(2+4)$
$= 7+j6$



□ · Ορισμένες χρήσιμες τιμές μιγαδικών εκθετικών.

π.χ. $e^{j0} = e^{j2\pi} = e^{-j2\pi} = e^{j4\pi} = \dots = 1$

$e^{j\pi} = e^{j3\pi} = e^{-j3\pi} = \dots = -1$



$e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j\frac{5\pi}{2}} = \dots = j$

$e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{j\frac{3\pi}{2}} = \dots = -j$

□ Εξισώσεις Ανάλυσης του Euler.

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$: Εξ. σύνδεσης.

$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos\theta - j\sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}}$

Εξ. Ανάλυσης

□ Θεώρημα De Moivre:

$\cos(n\theta) + j\sin(n\theta) = e^{jn\theta} = (e^{j\theta})^n = (\cos\theta + j\sin\theta)^n.$

C3. Ρίζες Μιγαδικών Αριθμών

$z = re^{j\theta} \Rightarrow z^n = r^n e^{jn\theta}$

□ Νιοστή ρίζα του 1:

$z^n = 1 \Rightarrow r^n e^{jn\theta} = e^{j2k\pi}$

$\Rightarrow r = 1 \ , \ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \ , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Υπάρχουν n διαφορετικές λύσεις της $z^n = 1$ (ρίζες) της μορφής

$$z_k = \omega^k = e^{j\frac{2k\pi}{n}} \quad ; \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

Για $k=0$, $\quad z_0 = 1$

$k=1$, $\quad z_1 = \omega = e^{j\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

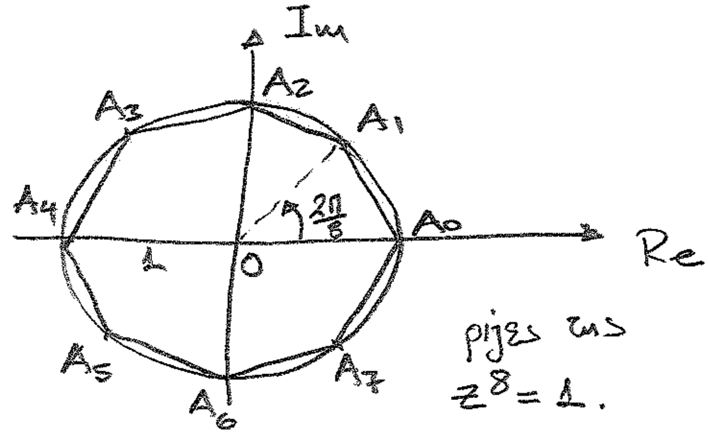
$k=2$, $\quad z_2 = \omega^2 = e^{j\frac{4\pi}{n}} = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)$

$k=3$, $\quad z_3 = \omega^3 = e^{j\frac{6\pi}{n}} = \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right)$

$\vdots \qquad \vdots$

$k=n-1$ $\quad z_{n-1} = \omega^{n-1} = e^{j\frac{2(n-1)\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right) + j\sin\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$

Οι εικόνες $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ των λύσεων $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}$ της εξίσωσης $z^n = 1$ είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου με n πλευρές, εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $r=1$.



ρίζες της $z^8 = 1$.

Η κορυφή A_0 παριστάνει τη ρίζα 1.

Η A_1 τη ρίζα $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Η A_k παριστάνει την ρίζα ω_k που προκύπτει από την A_0 $(z_0=1)$ με στροφή του διανύσματος $\overrightarrow{OA_0}$ κατά γωνία $\frac{k2\pi}{n}$; $k=1,2,\dots,n-1$.

π.χ. Για $n=4$ $\quad z^4 - 1 = 0 \Rightarrow$ ρίζες $z_k = e^{j\frac{2k\pi}{4}}$; $k=0,1,2,3$

$$\Rightarrow \quad z_0 = 1$$

$$z_1 = e^{j\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$$

$$z_2 = e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\sin(\pi) = -1$$

$$z_3 = e^{j\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -j$$

• N-στή ρίζα μιγαδικού $w = \rho \cdot e^{j\varphi}$

Έστω η εξίσωση $z^n = w$. Τότε,

$$(re^{j\theta})^n = w = \rho e^{j\varphi} \Rightarrow r^n e^{jn\theta} = \rho \cdot e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{r^n}{\rho} \cdot e^{j(n\theta - \varphi)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta - \varphi = 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} r = \rho^{1/n} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{array}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Οι ρίζες είναι: $\boxed{z_k = \rho^{1/n} \cdot e^{j\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \; ; \; k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$

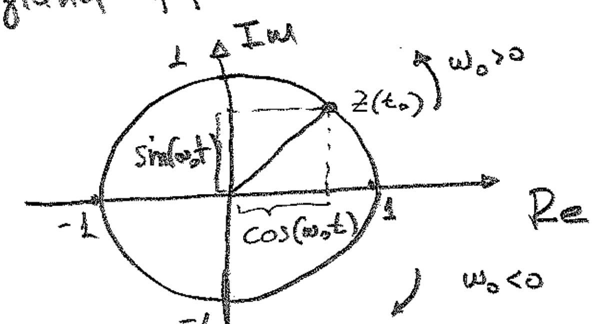
C4. Ημίτονα

Έστω τώρα η μιγαδική εκθετική συνάρτηση όπου το όρισμα μεταβάλλεται με το χρόνο με συγκεκριμένο τρόπο (γραμμικά).

$$z(t) = e^{j\theta(t)} \quad \text{όπου} \quad \theta(t) = \omega_0 t.$$

Η σταθερά ω_0 ονομάζεται κυκλική συχνότητα και μετράται σε ακτίνια (rad) ανά δευτερόλεπτο (rad/sec).

Προφανώς $|z(t)| = 1$ και το σημείο $z(t)$ (η εικόνα του $z(t)$) κινείται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο κατά αντιωρολογιακή φορά όταν $\omega_0 > 0$ ή κατά ωρολογιακή φορά όταν $\omega_0 < 0$:

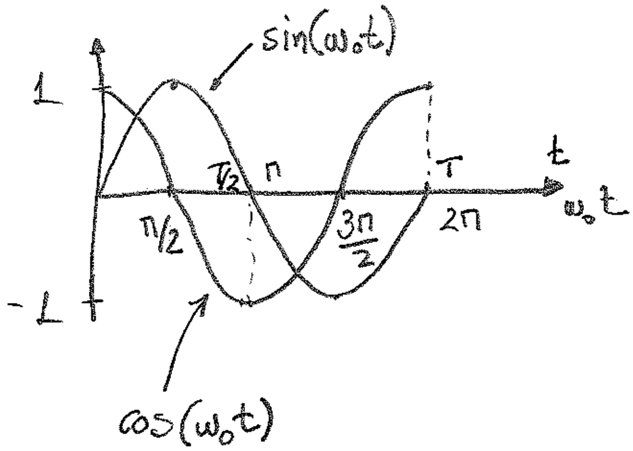


Από την ταυτότητα του Euler:

$z(t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$

$Re\{z(t)\} = \cos(\omega_0 t)$

$Im\{z(t)\} = \sin(\omega_0 t)$.



Σε ένα πλήρη κύκλο του $z(t)$ γύρω από το μοναδιαίο κύκλο, σε χρόνο T, θα έχουμε:

$\theta(T) = \omega_0 T = 2\pi \Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ sec} : \text{Θεμελειώδης περίοδος}}$

Επίσης ορίζουμε τη λεγόμενη <u>γραμμική</u> <u>συχνότητα</u> f_0:

$\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0}$ με μονάδες μέτρησης $\frac{1}{\text{sec}}$ ή Herz (Hz).

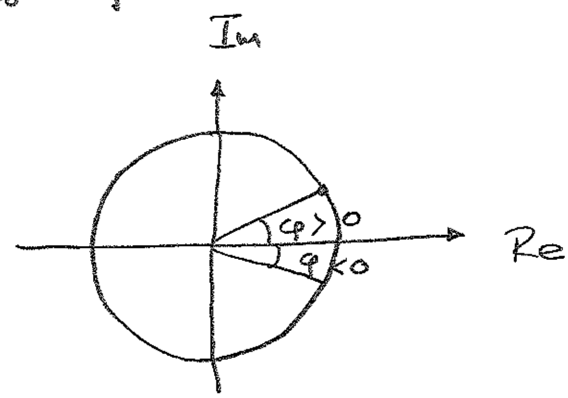
Π.χ. $A\cos(2\pi 10 t) = A\cos(\omega_0 t)$

$\omega_0 = 2\pi 10 = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = 10 \text{ Hz}$ ή $T = 0.1 \text{ sec}$

Σημαίνει ότι αυτό το συνημίτονο επαναλαμβάνεται κάθε 0.1 δευτερόλεπτα. Επίσης λέμε ότι έχουμε 10 επαναλήψεις του ανά δευτερόλεπτο.

Π.χ. KISS-FM !! $A\cos(2\pi \times 96.1 \times 10^6 t)$. Αυτό το συνημίτονο έχει 96.1×10^6 επαναλήψεις /sec ή επαναλαμβάνεται περίπου κάθε 10^{-8} sec!

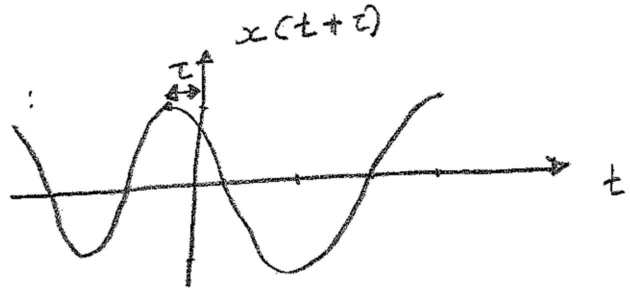
Έστω τώρα ότι το μιγαδικό εκθετικό μας έχει μία <u>αρχική φάση</u> ίση με φ, δηλαδή: $\theta(t) = \omega_0 t + \varphi$.



Τότε $\quad z(t) = e^{j\theta(t)} = e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t}$.

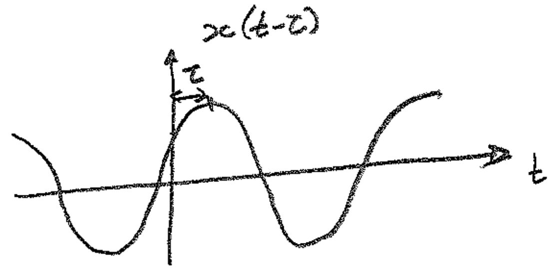
Τώρα, $Re\{z(t)\} = \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Για $\varphi > 0$:



Το σήμα προηγείται

Για $\varphi < 0$:



Το σήμα καθυστερεί

Έστω $x(t) = \cos(\omega_0 t)$. Τότε
$$x(t-\tau) = \cos(\omega_0 (t-\tau))$$
$$= \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau)$$
$$= \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = -\omega_0 \tau = -\frac{2\pi}{T}\tau$$

* Αν $\varphi > 0 \Rightarrow \tau < 0$ και το σήμα προηγείται.
* Αν $\varphi < 0 \Rightarrow \tau > 0$ και το σήμα καθυστερεί.