ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Για Μηχανικούς
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

Φροντιστήριο 3

1 Άσκηση 1

Να βρεθεί ο Μ.Φ των σημάτων:

(i) $rect\Big(\dfrac{t-3}{2}\Big)$

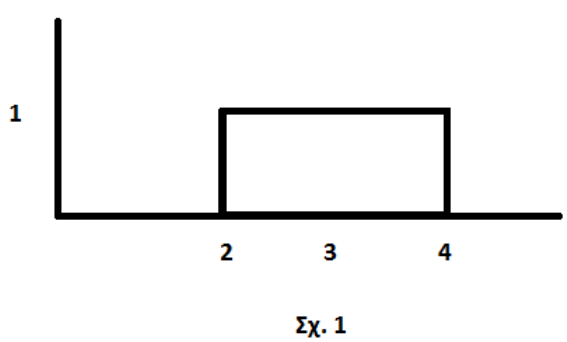
(ii) $rect(2t-6)$

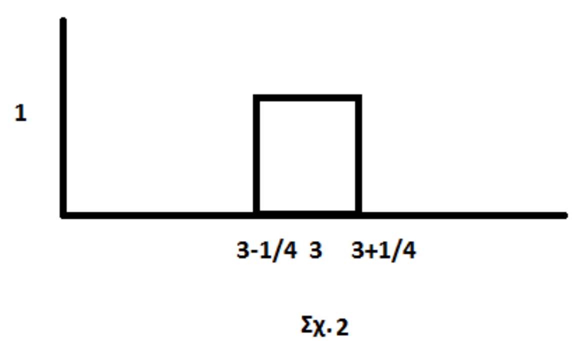
(iii) $e^{-|t|}$

(iv) $e^{-2t}\epsilon(t-1)$

Λύση

(i) Το σήμα είναι ο παλμός που φαίνεται στο Σχ. (1)-1. Είναι ενα ορθογωνικό παράθυρο διάρκειας





Σχήμα 1: Παλμοί

$T = 2$ sec και πλάτους 1. Το ορθογωνικό παράθυρο με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων έχει μετασχηματισμό Fourier

$$F\{Arect\Big(\frac{t}{T}\Big)\} = ATsinc(fT) \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας και την ιδιότητα της μετατόπισης κατά t_0 ισχύει:

$$F\{Arect\Big(\frac{t-t_0}{T}\Big)\} = ATsinc(fT)e^{j2\pi ft_0} \tag{2}$$

Επομένως

$$F\{rect\Big(\frac{t-3}{2}\Big)\} = 2sinc(2f)e^{j2\pi f3} \tag{3}$$

(ii) • 1ος τρόπος:

$$rect(2t-6) = rect(2(t-3)) = rect\Big(\frac{t-3}{\frac{1}{2}}\Big). \tag{4}$$

όπως αυτό φαινεται στο Σχ. (1)-2. Επομένως:

$$F\{rect\Big(\frac{t-3}{\frac{1}{2}}\Big)\} = \frac{1}{2}sinc\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{j2\pi f3} \tag{5}$$

• 2ος τρόπος: Αφου φέρουμε το σήμα στην κατάλληλη μορφή εφαρμόζουμε κλιμάκωση και μετατόπιση. Στην γενική περίπτωση ισχύει:

$$F\{x(at-t_0)\} = F\{x\Big(a\Big(t-\frac{t_0}{a}\Big)\Big)\} = \frac{1}{|a|}X\Big(\frac{f}{a}\Big)e^{2\pi f\frac{t_0}{a}} \tag{6}$$

Επομένως:

$$F\{rect(2t-6)\} = F\{rect(2(t-3))\} = \frac{1}{2}sinc\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{j2\pi f\frac{6}{2}} \tag{7}$$

(iii) Ισχύει στην γενική περίπτωση ότι:

$$F\{e^{-at}\epsilon(t)\} = \frac{1}{a+j2\pi ft} \tag{8}$$

Το σήμα $e^{-|t|}$ μπορεί να γραφεί ώς:

$$e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t}, & t>0 \\ e^{t}, & t<0 \end{cases}$$

Με την βοηθεια της βηματικής συνάρτησης $\epsilon(t)$, η παραπάνω συνάρτηση γράφεται ώς:

$$e^{-|t|} = e^{-t}\epsilon(t) + e^{t}\epsilon(-t) \tag{9}$$

Ο μετασχηματισμός Φουριερ αυτής είναι:

$$\begin{aligned} F\{e^{-|t|}\} &= F\{e^{-t}\epsilon(t)\} + F\{e^{t}\epsilon(-t)\} \\ &= \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f} = \frac{2}{1+4\pi^2f^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Δηλαδή, στην γενική περίπτωση,

$$F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+j4\pi^2f^2} \tag{11}$$

(iv) Είναι

$$\begin{aligned} F\{e^{-2t}\epsilon(t-1)\} &= F\{e^{-2(t-1)-2}\epsilon(t-1)\} \\ &= F\{e^{-2}e^{-2(t-1)}\epsilon(t-1)\} \\ &= e^{-2}\frac{1}{2+j2\pi f}e^{-j2\pi f} \end{aligned} \tag{12}$$

2 Άσκηση 2

Να βρεθεί ο Μ.Φ του σήματος

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \tag{13}$$

Λύση

Μέσω ορισμού του Μ.Φ είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που προκύπτει. Κοιτώντας γνωστά ζέυγη Μ.Φ παρατηρούμε οτι το $x(t)$ μοιάζει με το Μ.Φ $Y(f)$ του $y(t)$.

$$Y(f) = F\{y(t)\} = F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + j4\pi^2 f^2} \tag{14}$$

Προσπαθούμε να φέρουμε το $Y(f)$ στην μορφή του $x(t)$:

$$U(f) = \frac{2a}{a^2 + j4\pi^2 f^2} = \frac{\frac{2a}{4\pi^2}}{\frac{a^2}{4\pi^2} + j4\pi^2 f^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+f^2} \tag{15}$$

όπου $a = 2\pi$. Παρατηρούμε επομένως οτι

$$F^{-1}\{Y(f)\} = F^{-1}\{\frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+f^2}\} = e^{-2\pi|t|} \tag{16}$$

και επομένως ο

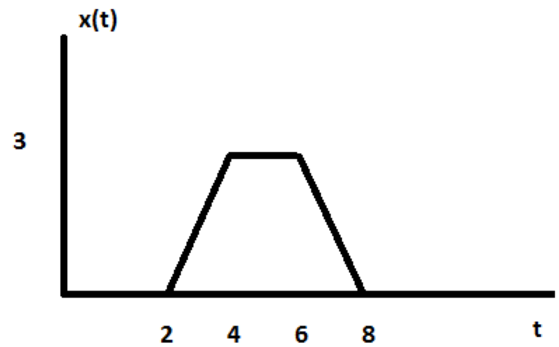
$$F^{-1}\{X(f)\} = F^{-1}\{\frac{2}{1+f^2}\} = 2\pi e^{-2\pi|t|} \tag{17}$$

Βάσει του θεωρήματος της δυικότητας: $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$ δηλαδή

$$\frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-2\pi|-f|} = 2\pi e^{-2\pi|f|} \tag{18}$$

3 Άσκηση 3

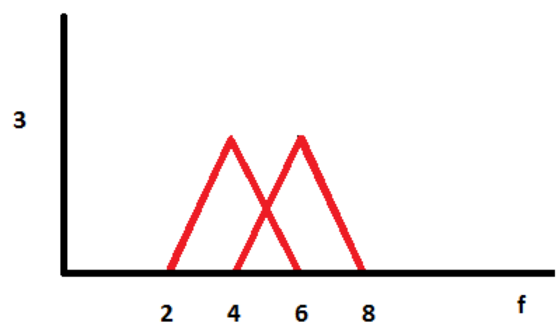
Να βρεθει ο Μ.Φ του σήματος του σχήματος 2.



Σχήμα 2: Ισοσκελές τραπέζιο

<u>Λύση</u>

(i) **1ος τρόπος:** Μπορούμε να δούμε οτι το παραπάνω ισοσκελές τραπέζιο μπορεί να γραφεί ώς άθροισμα 2 τριγώνων, όπως δείχνει το σχήμα (3). Τα τρίγωνα αυτά έχουν γνωστό μετασχημα-



Σχήμα 3: Άθροισμα τριγώνων

τισμο Fourier και λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας θα ισχύει:

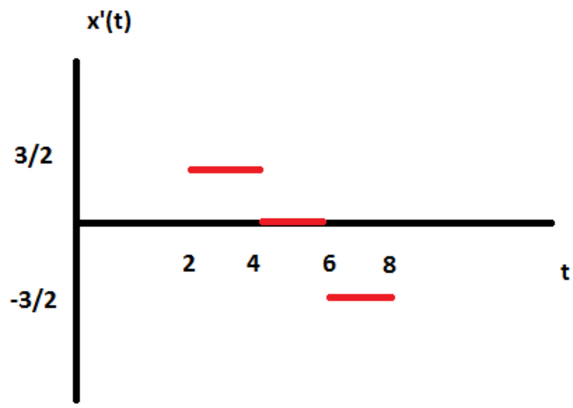
$$X(f) = F\{3tri\Big(\frac{t-4}{2}\Big) + 3tri\Big(\frac{t-6}{2}\Big)\} = 6sinc^2(2f)e^{-4j2\pi f} + 6sinc^2(2f)e^{-6j2\pi f} \tag{19}$$

Προσοχη, στην συνάρτηση $tri(\cdot)$ στον παρανομαστή βάζουμε την μισή διαρκεια του παλμού, ενω στην συνάρτηση $rect(\cdot)$, ολη την διάρκεια.

(ii) **2ος τρόπος:** Εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα της παραγώγισης:

$$F\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\} = (j2\pi f)^n X(f) \tag{20}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω συνάστηση προκύπτει η γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα ii. Παρατηρούμε οτι επειδή δεν υπάρχουν ασυνέχειες δεν προκύπτουν $diracs$. Το



Σχήμα 4: Παράγωγος σήματος

αποτέλεσμα της πρωτης παραγώγου του $x(t)$, $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ εχει γνωστό Μ.Φ αφου αποτελείται απο ορθογωνικούς παλμούς:

$$\begin{aligned} Y(f) &= F\{\frac{dx(t)}{dt}\} \\ &= F\{\frac{3}{2}rect\Big(\frac{t-3}{2}\Big) - \frac{3}{2}rect\Big(\frac{t-7}{2}\Big)\} \\ &= 3sinc(2f)e^{-j2\pi f3} - 3sinc(2f)e^{-j2\pi f7} \end{aligned} \tag{21}$$

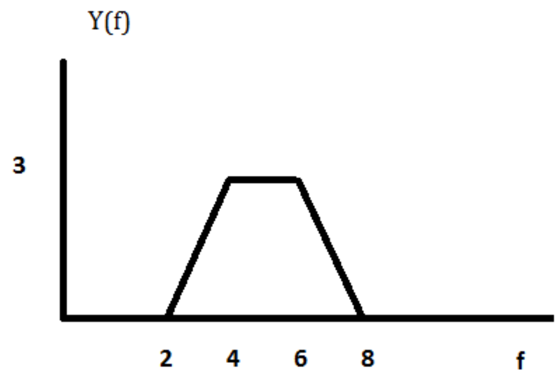
Επομένως ο ζητούμενος Μ.Φ:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} = \frac{3sinc(2f)}{j2\pi f}(e^{-j2\pi f3} - e^{-j2\pi f7}) \tag{22}$$

4 Άσκηση 4

Να βρεθει ο Μ.Φ του σήματος του Σχήματος 5 και να υπολογιστεί στην συνέχεια το

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \tag{23}$$



Σχήμα 5: Σχήμα Άσκησης 4

Λύση Παρατηρούμε οτι η γραφική παράσταση του $Y(f)$ ειναι ίδια με την γραφική παράσταση του $x(t)$ της παραπάνω άσκησης με την διαφορά οτι αντί χρόνου έχω συχνότητα. Αν επομένως βρω την $x(f)$ τοτε $Y(f) = x(f)$ και ο αντιστροφος μετασχηματισμος της $x(f)$ θα ειναι το ζητουμενο $y(t)$. Απο την άσκηση 4 έχουμε:

$$x(t) \longleftrightarrow \frac{3sinc(2f)}{j2\pi f}(e^{-j2\pi f3} - e^{-j2\pi f7}) \tag{24}$$

Βάσει της ιδιότητας της δυικότητας:

$$\frac{3sinc(2t)}{j2\pi t}(e^{-j2\pi t3} - e^{-j2\pi t7}) \longleftrightarrow x(-f) \tag{25}$$

και βασει της ιδιότητας της ανάκλασης ($x(-t) \longleftrightarrow X(-f)$):

$$\frac{3sinc(-2t)}{j2\pi(-t)}(e^{-j2\pi(-t)3} - e^{-j2\pi(-t)7}) \longleftrightarrow x(f) = Y(f) \tag{26}$$

Επειδη η συνάρτηση σινς ειναι άρτια:

$$y(t) = \frac{3sinc(2t)}{-j2\pi t}(e^{j2\pi t3} - e^{j2\pi t7}) \tag{27}$$

Τώρα, για το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3sinc(2t)}{-j2\pi t}(e^{j2\pi t3} - e^{j2\pi t7})dt = \text{καλύτερα όχι :-)} \tag{28}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \\ &= \int_2^4 \left(\frac{3}{2}f - 3\right)^2 df + \int_4^6 3^2 df + \int_6^8 \left(\frac{-3}{2}f + 12\right)^2 df \\ &= \cdots\cdots\cdots \text{ (πράξεις :-))} \\ &= 4173 \end{aligned} \tag{29}$$