Μετασχηματισμός Fourier - Ασκήσεις

Επιμέλεια: Μαρία Κουτσογιαννάκη
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

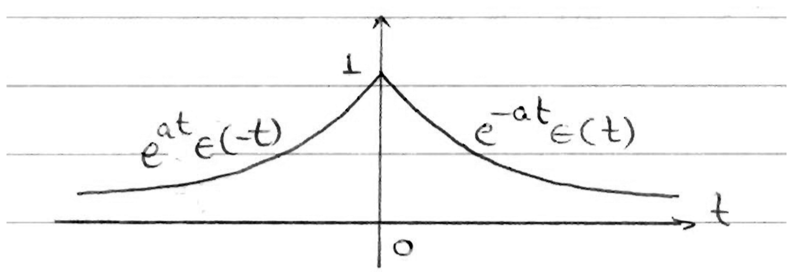
13 Μαρτίου 2014

1. **Να σχεδιάσετε το σήμα**
$$\mathbf{x(t) = e^{-\alpha|t|},\ t \in \Re}$$
με $\mathbf{a > 0}$ και να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος. Επίσης, να υπολογίσετε το μέτρο και τη φάση του. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(t)dt}$$
Σε ποιές συχνότητες το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος;

Λύση:
Το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Το σήμα φαίνεται στο σχήμα 1 Είναι



Σχήμα 1: Σήμα Άσκησης 3.3

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt \\
&= \frac{1}{a-j2\pi f}e^{(a-j2\pi f)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-a-j2\pi f}e^{-(a+j2\pi f)t}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{a-j2\pi f}(1-0) + \frac{1}{-a-j2\pi f}(0-1) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2},\ a > 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το $X(f)$ είναι πραγματικό σήμα, και θετικό για κάθε f. Άρα η φάση του είναι $\phi = 0$ και το μέτρο του είναι ο ίδιος ο μετασχηματισμός Fourier, δηλ.

$$|X(f)| = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \text{ και } \angle X(f) = 0 \tag{2}$$

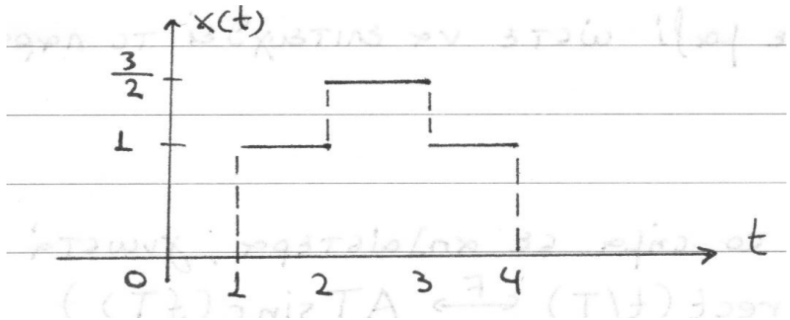
Επίσης

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(f)\Big|_{f=0} = X(0) = \frac{2}{a} \tag{3}$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε σε ποιές συχνότητες, τέλος, το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος. Λύνοντας απλά την εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned} |X(f)| = \frac{\frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{a} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow \quad 4\pi^2 f^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow \quad f = \pm\frac{a}{2\pi} \end{aligned} \tag{4}$$

2. **Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 2**



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 3.4

<u>Λύση:</u>
Για την εύρεση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$ που απεικονίζεται στο σχήμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε πολλούς τρόπους. Ας δούμε μερικούς...

(α΄) Με τον ορισμό:

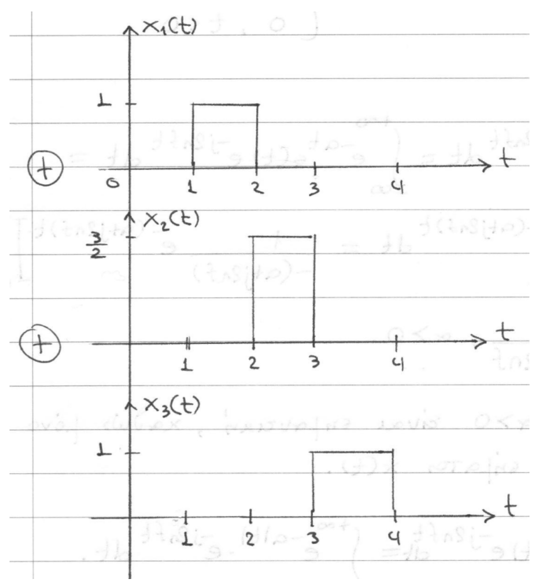
$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ft}dt \\ &= \int_1^2 1e^{-j2\pi ft}dt + \int_2^3 \frac{3}{2}e^{-j2\pi ft}dt + \int_3^4 1e^{-j2\pi ft}dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_1^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_2^3 - \frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_3^4 \\ &= \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j4\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi f}} + \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f}\frac{3}{2}e^{-j6\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}\frac{3}{2}e^{-j4\pi f}} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j4\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j6\pi f}} \end{aligned}$$

Θέλουμε να 'πακετάρουμε' μαζι τα υποσημειωμένα εκθετικά. Βλέπουμε όμως οτι οι εκθέτες τους δε μας δίνουν ημίτονα ή συνημίτονα με απεύθείας εφαρμογή της σχέσης του Euler. Άρα πρέπει να βγαλουμε κάποιον κοινό παράγοντα για να έρθουμε σε πιο βολική μορφή. Στο πρώτο ζευγάρι εκθετικών, βγαζουμε κοινό παράγοντα το 'μέσο ορο' του 4π και του 2π, δηλ. το 3π. Άρα ο κοινός παραγοντας θα ειναι ο $e^{-j3\pi f}$. Ομοίως και για τα άλλα.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j3\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) + \frac{3}{2}\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j5\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) + \\
&+ \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j7\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j3\pi f}(-2j\sin(\pi f)) + \frac{3}{2}\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j5\pi f}(-2j\sin(\pi f)) + \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j7\pi f}(-2j\sin(\pi f)) \\
&= \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}e^{-j5\pi f} + \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}e^{-j7\pi f} \\
&= sinc(f)\Big(e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2}e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f}\Big) \\
&= sinc(f)\Big(e^{-j2\pi\frac{3}{2}f} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{5}{2}f} + e^{-j2\pi\frac{7}{2}f}\Big) \qquad (5)
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε τους όρους που βγάλαμε κοινό παράγοντα ώστε να εμφανιστούν τα $\sin(\pi f)$. Με άγκιστρο είναι τα εκθετικά που χρησιμοποιήσαμε μαζί ώστε να το πετύχουμε αυτό.

(β') Αναλύοντας το σήμα σε τρία σήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Όμοια λοιπόν, θα έχουμε



Σχήμα 3: Διάσπαση Άσκησης 3.4 - δεύτερος τρόπος

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= rect\Big(\frac{t-3/2}{1}\Big) \\
x_2(t) &= \frac{3}{2}rect\Big(\frac{t-5/2}{1}\Big) \\
x_3(t) &= rect\Big(\frac{t-7/2}{1}\Big)
\end{aligned}$$

Οπότε το αρχικό σήμα γράφεται ως άθροισμα των παραπάνω σημάτων, ως

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ &= rect\Big(\frac{t-3/2}{1}\Big) + \frac{3}{2}rect\Big(\frac{t-5/2}{1}\Big) + rect\Big(\frac{t-7/2}{1}\Big) \\ &= rect(t-3/2) + \frac{3}{2}rect(t-5/2) + rect(t-7/2) \end{aligned} \tag{6}$$

Γνωρίζουμε οτι $Arect(t/T) \longleftrightarrow ATsinc(fT)$, και επομένως $rect(t) \longleftrightarrow sinc(f)$. Παρατηρούμε, συγκρινοντας τη σχέση 6 με τον μετασχ. Fourier που βρηκαμε παραπάνω (σχεση 5), ότι χρονική μετατόπιση του $rect(t)$, δηλ. $rect(t-t_0)$, αντιστοιχεί στο μετασχ. Fourier σε πολλαπλασιασμό του μετασχηματισμού Fourier του $rect(t)$ επί μια εκθετική συνάρτηση $e^{-j2\pi f t_0}$:

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) + X_3(f) = sinc(f)\Big(e^{-j2\pi\frac{3}{2}f} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{5}{2}f} + e^{-j2\pi\frac{7}{2}f}\Big) \tag{7}$$

Η άσκηση αυτή μας εισάγει σε δυο βασικές ιδιότητες του μετασχ. Fourier, που ειναι η Γραμμικότητα και η Χρονική Μετατόπιση:

$$\begin{aligned} x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) &\longleftrightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f) \\ x(t \pm t_0) &\longleftrightarrow X(f)e^{\pm j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που προέκυψε με τον ορισμό, αλλά πολύ πιο εύκολα και σύντομα. :-) Υπάρχουν 1-2 τρόποι ακόμα που μπορείτε να σπάσετε το αρχικό σήμα σε απλά σήματα με γνωστούς μετασχηματισμούς. Χρησιμοποιήστε τη φαντασία σας! ;-)