ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Για Μηχανικούς
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

Φροντιστήριο 1

Άσκηση 1: Περιοδικότητα

Για τα παρακάτω σήματα βρείτε ποιά ειναι περιοδικά. Για τα περιοδικά σήματα βρείτε την θεμελιώδη συχνότητα τους.

(i)

$$x(t) = \cos^2(2\pi t) = \frac{1+\cos(4\pi t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2t), \;\; f_0 = 2$$

(ii)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^3(2t) = \sin(2t)\sin^2(2t) = \sin(2t)\frac{1-\cos(4t)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\cos(4t) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{4}\sin(6t) + \frac{1}{4}\sin(2t), \quad \text{από γνωστή ταυτότητα} \\
&= \frac{3}{4}\sin(2t) - \frac{1}{4}\sin(6t) \\
&\Longrightarrow \omega_0 = \text{ΜΚΔ}(2,6) = 2, \;\text{άρα}\; f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \\
\text{Εναλλακτικά, } f_0 &= \text{ΜΚΔ}\Big(\frac{1}{\pi}, \frac{3}{\pi}\Big) = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

(iii)

$$x(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$$

Δεν ειναι περιοδική γιατί

$$x(t+T) = e^{-2(t+T)}\cos(2\pi(t+T)) = e^{-2t}e^{-2T}\cos(2\pi t + 2\pi T)$$

Αν T είναι ακέραιος τότε:

$$\cos(2\pi t + 2\pi T) = \cos(2\pi t)$$

Επομένως:

$$x(t+T) = e^{-2t}e^{-2T}\cos(2\pi t + 2\pi T) = e^{-2T}x(t) \neq x(t)$$

(iv)

$$x(t) = \cos(2\pi 10t + \frac{\pi}{3}) + \cos(2\pi 3t + \frac{\pi}{2}) - \sin(2t)$$

Ο ΜΚΔ $\left(10, 3, \frac{1}{\pi}\right)$ δεν υπάρχει, άρα δεν είναι περιοδικό.

Άσκηση 2: Φάσματα
Για το παρακάτω περιοδικό σήμα

$$x(t) = 3\cos(2\pi 10t + \frac{\pi}{3}) + 4\sin(2\pi 20t + \frac{\pi}{4})$$

να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης.

Λύση: Χρησιμοποιούμε Euler ωστε να φέρουμε το σήμα στην μορφη

$$x(t) = A_1 e^{j\phi_1} e^{j(2\pi f_1 t)} + A_2 e^{j\phi_2} e^{j(2\pi f_2 t)} + \cdots, \text{ όπου} A_1, A_2, ... > 0$$

Άρα

$$\begin{aligned}
x(t) &= 3\cos(2\pi 10t + \frac{\pi}{3}) + 4\sin(2\pi 20t + \frac{\pi}{4}) \\
&= 3\frac{e^{j(2\pi 10t + \frac{\pi}{3})} + e^{-j(2\pi 10t + \frac{\pi}{3})}}{2} + 4\frac{e^{j(2\pi 20t + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(2\pi 20t + \frac{\pi}{4})}}{2j} \\
&= \frac{3}{2}e^{\frac{j\pi}{3}} e^{j(2\pi 10t)} + \frac{3}{2}e^{\frac{-j\pi}{3}} e^{-j(2\pi 10t)} + 2\frac{1}{j}e^{\frac{j\pi}{4}} e^{j(2\pi 20t)} - 2\frac{1}{j}e^{\frac{-j\pi}{4}} e^{-j(2\pi 20t)}
\end{aligned}$$

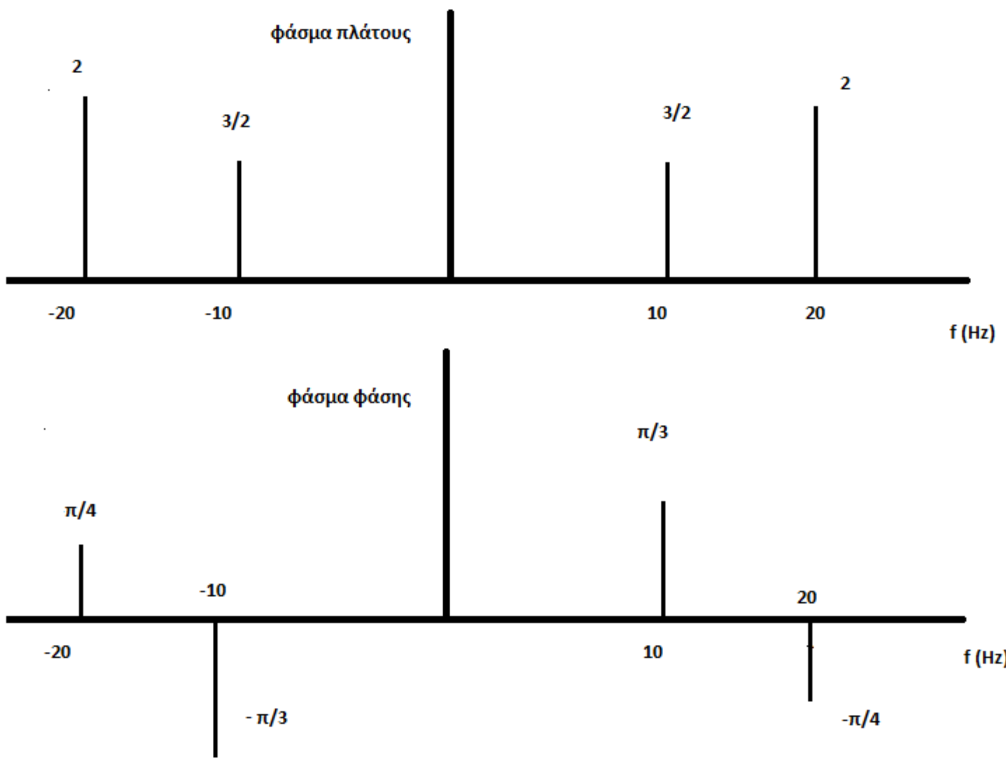
Ομως $\frac{1}{j} = -j = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = e^{-j\frac{\pi}{2}}$. Αρα

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{2}e^{\frac{j\pi}{3}} e^{j(2\pi 10t)} + \frac{3}{2}e^{\frac{-j\pi}{3}} e^{-j(2\pi 10t)} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{\frac{j\pi}{4}} e^{j(2\pi 20t)} - 2e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-j\pi}{4}} e^{-j(2\pi 20t)} \\
&= \frac{3}{2}e^{\frac{j\pi}{3}} e^{j(2\pi 10t)} + \frac{3}{2}e^{\frac{-j\pi}{3}} e^{-j(2\pi 10t)} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j(2\pi 20t)} - 2e^{\frac{-j3\pi}{4}} e^{-j(2\pi 20t)}
\end{aligned}$$

Επειδή να φτιάξουμε το φάσμα πλατους πρεπει να έχουμε μόνο θετικά πλάτη: $-1 = e^{j\pi}$ και επομένως:

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{\frac{j\pi}{3}} e^{j(2\pi 10t)} + \frac{3}{2}e^{\frac{-j\pi}{3}} e^{-j(2\pi 10t)} + 2e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j(2\pi 20t)} + 2e^{\frac{j\pi}{4}} e^{-j(2\pi 20t)}$$

Τα φάσματα φαίνονται στο Σχημα 1.



Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2

Άσκηση 3: AM Διαμόρφωση ή Διαμόρφωση πλάτους
Για το παρακάτω σήμα

$$y(t) = \cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 5000t)$$

να βρέιτε ποιό ειναι το σήμα πληροφορίας και ποιό το φέρον και στην συνέχεια να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους του σήματος πληροφορίας, του φέροντος, και του διαμορφώμενου σήματος $y(t)$. Τι παρατηρείτε·

Λύση: Το σήμα πληροφορίας είναι το σήμα χαμηλής συχνότητας

$$x(t) = \cos(2\pi 100t)$$

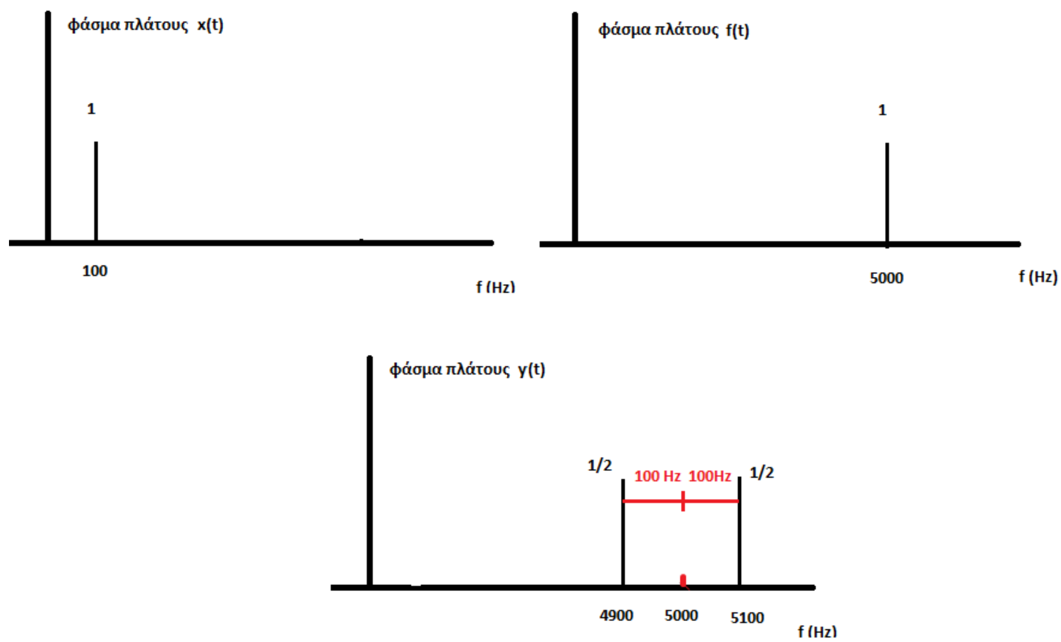
το οποιο και χρειαζεται να μεταφερθεί σε υψηλές συχνοτικές περιοχές για τους λόγους που αναλύσαμε στο μάθημα και στο φροντιστήριο (εκμετάλευση του φάσματος, μικρές κεραίες, μικρότερες αποσβεσεις σε μεγαλυτερες συχνότητες, κλπ). Άρα το φέρον εχει μεγαλύτερη συχνότητα

$$f(t) = \cos(2\pi 5000t)$$

Έυρεση φάσματος διαμορφωμένου σήματος: Για την ευρεση του φάσματος πλατους του διαμορφωμένου σήματος πρέπει το σήμα απο γινόμενο συνημιτόνων να γίνει άθροισμα συνημιτόνων.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 5000t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi(100+5000)t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi(100-5000)t) \\
&= \frac{1}{2}\cos(2\pi 5100t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi(-4900)t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi 5100t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 4900t) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Το φάσμα λοιπόν σχεδιάζεται όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Φάσμα Άσκησης 3

Παρατηρούμε οτι το γινόμενο 2 συνημιτόνων ισοδυναμεί με **μεταφορά** της συχνοτικής πληροφορίας του σήματος με χαμηλότερη συχνότητα γύρω απο την συχνότητα του σήματος με υψηλότερη συχνότητα. Αντιθέτως κατα την πρόσθεση συνημιτόνων, το φάσμα προκύπτει απο την πρόσθεση των επιμέρους φασμάτων του κάθε συνημιτόνου (εφόσον βρίσκονται σε διαφορετικές συχνότητες).

Άσκηση 4: Μετατόπιση, Ανάκλαση και Κλιμάκωση σήματος

Δίνεται το σήμα

$$y(t) = \begin{cases} t+2 & \text{αν } -2 \leq t \leq 0 \\ -2t+2 & \text{αν } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(i) Να βρεθεί το σήμα $y(t+3)$ (Μεταφορά)

Λύση:

$$y(t+3) = \begin{cases} (t+3)+2 & \text{αν } -2 \leq t+3 \leq 0 \\ -2(t+3)+2 & \text{αν } 0 \leq t+3 \leq 1 \end{cases}$$

$$y(t+3) = \begin{cases} t+5 & \text{αν } -2-3 \leq t \leq -3 \\ -2t-4 & \text{αν } 0-3 \leq t \leq 1-3 \end{cases}$$

$$y(t+3) = \begin{cases} t+5 & \text{αν } -5 \leq t \leq -3 \\ -2t-4 & \text{αν } -3 \leq t \leq -2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε οτι το σήμα μεταφέρεται κατα 3 μονάδες αριστερα.

(ii) Να βρεθεί το σήμα $y(t-3)$ (Μεταφορά)

Λύση:

Χωρίς να χρειαστεί να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία το σήμα θα μεταφερθεί 3 μονάδες δεξιά.

(iii) Να βρεθεί το σήμα $y(-t)$ (Ανάκλαση)

Λύση:

$$y(-t) = \begin{cases} -t+2 & \text{αν } -2 \leq -t \leq 0 \\ -2(-t)+2 & \text{αν } 0 \leq -t \leq 1 \end{cases}$$

$$y(-t) = \begin{cases} -t+2 & \text{αν } 2 \geq t \geq 0 \\ 2t+2 & \text{αν } 0 \geq t \geq -1 \end{cases}$$

(iv) Να βρεθεί το σήμα $y(-t+3)$ (Μεταφορά και Ανάκλαση)

Λύση:

$$y(-t+3) = \begin{cases} -t+3+2 & \text{αν } -2 \leq -t+3 \leq 0 \\ -2(-t+3)+2 & \text{αν } 0 \leq -t+3 \leq 1 \end{cases}$$

$$y(-t+3) = \begin{cases} -t+5 & \text{αν } -2-3 \leq -t \leq -3 \\ 2t-4 & \text{αν } -3 \leq -t \leq 1-3 \end{cases}$$

$$y(-t+3) = \begin{cases} -t+5 & \text{αν } 5 \geq t \geq 3 \\ 2t-4 & \text{αν } 3 \geq t \geq 2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε οτι ισοδυναμεί με την ανάκλαση του σήματος $y(t-3)$. Δηλαδη το $y(-t+3)$ μπορει να γραφει ως $y(-(t-3))$ που ισοδυναμεί με μετατοπιση του $y(t)$ δεξιά κατα 3 και στην συνέχεια με ανάκλαση αυτου.

(v) Να βρεθεί το σήμα $y(3t)$ (Κλιμάκωση)

Λύση:

$$y(3t) = \begin{cases} 3t + 2 & \text{αν } -2 \leq 3t \leq 0 \\ -2(3t) + 2 & \text{αν } 0 \leq 3t \leq 1 \end{cases}$$

$$y(3t) = \begin{cases} 3t + 2 & \text{αν } -2/3 \leq t \leq 0 \\ -6t + 2 & \text{αν } 0 \leq t \leq 1/3 \end{cases}$$

Το σήμα 'συμπιέζεται' στο χρόνο κατά 3.

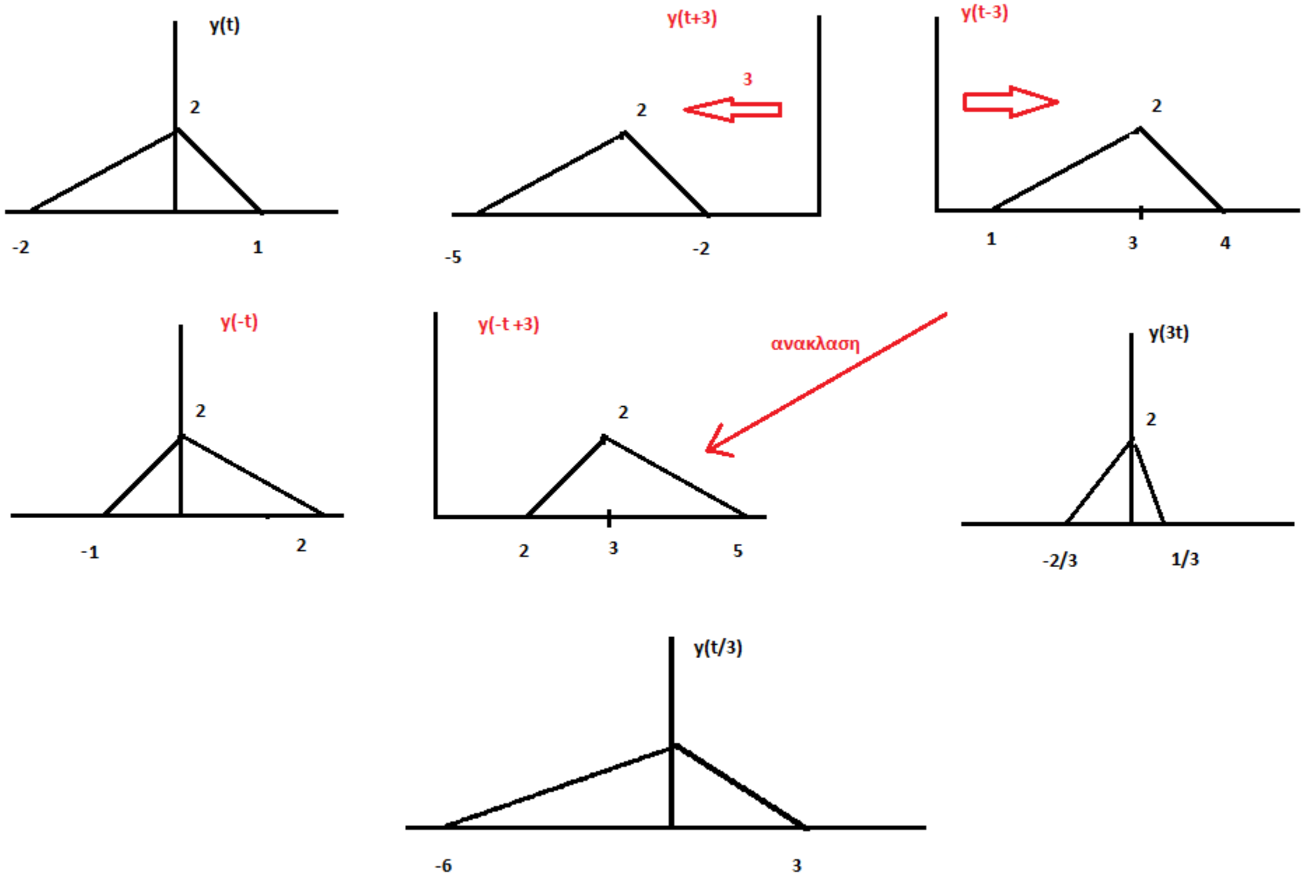
(vi) Να βρεθεί το σήμα $y(t/3)$ (Κλιμάκωση)

Λύση:

$$y(t/3) = \begin{cases} t/3 + 2 & \text{αν } -2 \leq t/3 \leq 0 \\ -2(t/3) + 2 & \text{αν } 0 \leq t/3 \leq 1 \end{cases}$$

$$y(t/3) = \begin{cases} t/3 + 2 & \text{αν } -6 \leq t \leq 0 \\ -2(t/3) + 2 & \text{αν } 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Το σήμα διευρύνεται στο χρόνο κατά 3.



Σχήμα 3: Σχήματα Άσκησης 4.