ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Για Μηχανικούς
Διδάσκων: Ι. Στυλιανού

Φροντιστήριο 4: Τυχαίες Διαδικασίες

Άσκηση 1:
Σε μια στάσιμη με την ευρεία έννοια διαδικασία η στατιστική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τ.δ $x(t)$ ειναι $R_x(t) = 2tri(\frac{t}{3})$. Να βρεθεί η φασματική πυκνότητα ισχύος $S_x(f)$:

Λύση:
Αφου ειναι στάσιμη με την ευρεία έννοια ισχύει: $S_x(f) = F\{R_x(t)\} = F\{2tri(\frac{t}{3})\} = 6sinc^2(3f)$

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι η $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ όπου A, ω_0 σταθερές και ϕ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή, ειναι:

1. πρώτης τάξης στάσιμη
2. δεύτερης τάξης στάσιμη
3. στάσιμη με την ευρεία έννοια
4. εργοδική

Λύση:

1. Για να είναι στάσιμη πρώτης τάξης αρκεί να δείξουμε ότι $E[x] = c$, $c =$σταθερά.

$$\begin{aligned} E[A\cos(\omega_0 t + \phi)] &= AE[\cos(\omega_0 t + \phi)] = A\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \phi) P_\phi d\phi \\ &= A\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \phi)\frac{1}{2\pi} d\phi = \frac{A}{2\pi}\Big[\sin(\omega_0 t + \phi)\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

   Επομένως ειναι στάστιμη πρώτης τάξης.

2. Για να είναι στάσιμη δεύτερης τάξης αρκεί να δείξουμε ότι $R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = f(\tau)$, όπου $\tau = t_2 - t_1$

$$\begin{aligned} R_x(t_1,t_2) &= E[A\cos(\omega_0 t_1 + \phi)A\cos(\omega_0 t_2 + \phi)] = A^2E[\cos(\omega_0 t_1 + \phi)\cos(\omega_0 t_2 + \phi)] \\ &= A^2E\Big[\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1 - t_2)\Big] + A^2E\Big[\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\phi)\Big] \\ &= \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau + \frac{A^2}{2}E[\cos(\omega_0(\tau + 2t_2) + 2\phi)] = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau + 0 = f(\tau) \end{aligned}$$

   όπου $E[\cos(\omega_0(\tau + 2t_2) + 2\phi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0(\tau + 2t_2) + \phi)P_\phi d\phi = ... = 0.$

   Επομένως ειναι στάσιμη δευτερης τάξης.

3. Για να είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια πρέπει η διασπορά $c_x(0)$ να ειναι πεπερασμένη. Όμως ισχύει ότι

$$c_x(0) = E[x^2] - (E[x])^2$$

και

$$E[x^2] = E[x(t)x(t+\tau)]|_{\tau=0} = R_x(0)$$

Επομένως

$$c_x(0) = R_x(0) - E[x]^2 = \frac{A^2}{2}\cos 0 - 0^2 = \frac{A^2}{2} < \infty$$

Προφανώς όταν η διαδικασία ειναι στασιμη δευτέρας τάξης, έχει πεπερασμένη μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση, άρα και πεπερασμένη διαφορά αυτών, οπότε είναι αυτοματα στασιμη με την ευρεία εννοια. Οπότε οταν μας ζητείται στασιμότητα με την ευρεία έννοια, αρκεί να δειχνουμε ότι η μέση τιμή είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτιση εξαρταται μόνο από τη χρονική διαφορά $\tau = t_2 - t_1$.

4. Για να είναι εργοδική πρέπει η χρονική μέση τιμή να είναι ίση με την στατιστική μέση τιμή $E[x]$ και η χρονική αυτοσυσχέτιση $\phi(x)$ με την στατιστική αυτοσυσχέτιση $R_x(\tau)$.
Χρονική μέση τιμή:

$$\overline{x} = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0 t + \phi)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{A}{T\omega_0}\Big[\sin(\omega_0 t + \phi)\Big]_{-T}^{T} = 0$$

διότι το ήμιτονο ειναι φραγμένο $[-1, 1]$ και το ολοκλήρωμά του σε συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν. Επομένως ισχύει $\overline{x} = E[x]$.
Χρονική αυτοσυσχέτιση:

$$\begin{aligned}
\phi_x(\tau) &= \lim_{T\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0 t + \phi)A\cos(\omega_0(t+\tau) + \phi)dt \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(-\omega_0\tau)dt + \lim_{T\to+\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos(-\omega_0(2t+\tau) + 2\phi)dt \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)
\end{aligned}$$