# Ασκήσεις με τον Μετασχηματισμό Laplace - HY215

31 Μαΐου 2014

## 1 Ασκήσεις

1. **Για ένα σήμα και το μετασχ. Laplace του γνωρίζετε ότι:**

   (α΄) **το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό και άρτιο**

   (β΄) **έχει 4 πόλους και κανένα μηδενικό στο μιγαδικό επίπεδο**

   (γ΄) **ένας πόλος βρίσκεται στο** $\mathbf{s = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}$

   (δ΄) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(t)dt = 4}$

   **Βρείτε το** $\mathbf{X(s)}$.

   Λύση:
   Προφανώς το $X(s)$ θα είναι της μορφής:

   $$X(s) = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

   Δίδεται όμως ότι το σήμα είναι πραγματικό και άρτιο, άρα θα είναι

   $$x(t) = x^*(t) \leftrightarrow X(s) = X^*(s^*) \text{ και } x(t) = x(-t) \leftrightarrow X(s) = X(-s)$$

   Άρα αν έχει έναν πόλο στη θέση $s_k$, θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k$ (από τη σχέση του άρτιου σήματος). Όμοια, αν έχει έναν πόλο στη θέση $-s_k$ θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k^*$ (από τη σχέση του πραγματικού σήματος). Γνωρίζουμε ότι έχει έναν πόλο $s_1$, άρα θα έχει κι έναν $-s_1$, κι έναν $-s_1^*$ και έναν $s_1^*$. Οπότε το σήμα θα γράφεται:

   $$X(s) = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_1^*)(s+s_1)(s+s_1^*)}$$

   Μένει να βρούμε το $A$.
   Δίνεται ότι

   $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$$

   Όμως ξέρουμε ότι

   $$\begin{aligned} X(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-0t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4 \Leftrightarrow \\ 4 &= \frac{A}{(0-s_1)(0-s_1^*)(0+s_1)(0+s_1^*)} = \frac{A}{|s_1|^2|s_1|^2} = \frac{A}{\frac{1}{4}\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{1}{16}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα που ψάχνουμε είναι το

$$X(s) = \frac{\frac{1}{4}}{(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(s+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})} \tag{1}$$

2. **Δίνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης:**

$$\mathbf{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)}$$

**με αρχικές συνθήκες**

$$\mathbf{y(0^-) = 2,\ \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} = 1}$$

και

$$\mathbf{x(t) = e^{-t}u(t)}$$

Βρείτε το $y(t)$.

Λύση:
Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &\longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) &= x(t) \longleftrightarrow \\ s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) &= X(s) \\ s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) &= X(s) \\ Y(s)(s^2+5s+6) &= X(s) + 2s + 11 \\ Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1} + 2s + 11}{s^2+5s+6} \\ Y(s) &= \frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα (μπορούμε κατευθείαν, γιατί η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη αυτής του παρονομαστή):

$$Y(s) = \frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

με

$$\begin{aligned} A &= (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2s^2+13s+12}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \\ B &= (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=-2} = 6 \\ C &= (s+3)Y(s)\Big|_{s=-3} = \frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-3} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + 6\frac{1}{s+2} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+3} \longleftrightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 6e^{-2t}u(t) - \frac{9}{2}e^{-3t}u(t) \end{aligned} \tag{2}$$

που είναι και το ζητούμενο.

3. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t)}$$

   (α΄) **Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace**

   (β΄) **Να βρεθεί η αρχική συνθήκη $\mathbf{x(0^+)}$ μέσω του μετασχ. Laplace**

   (γ΄) **Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{\mathbf{t}\to\infty}\mathbf{x(t)}$ μέσω του μετασχ. Laplace**

   (δ΄) **Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των παραπάνω δυο ερωτημάτων υπολογίζοντας αναλυτικά τα όρια**

   Λύση:

   (α΄)

$$X(s) = Ł\{e^{-2t}u(t)\} + Ł\{e^{-t}\cos(3t)u(t)\} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+9},\ \Re\{s\} > -1$$

   και κάνοντας λίγες πράξεις, έχουμε

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20}$$

   (β΄)

$$\begin{aligned} x(0^+) &= \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{2s^3+5s^2+12s}{s^3+5s^2+14s+20} \\ \text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s\to\infty} \frac{6s^2+10s+12}{3s^2+10s+14} \\ \text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s\to\infty} \frac{12s+10}{6s+10} \\ \text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s\to\infty} \frac{12}{6} = 2 \Longleftrightarrow \\ x(0^+) &= 2 \end{aligned} \tag{3}$$

   (γ΄)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s^3+5s^2+12s}{s^3+5s^2+14s+20} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

   (δ΄) Δικό σας. :-)

4. **Εστω δύο αιτιατά ΓΧΑ συστήματα $S1$ και $S2$ των οποίων η λειτουργία εκφράζεται μέσα από τις διαφορικές εξισώσεις:**

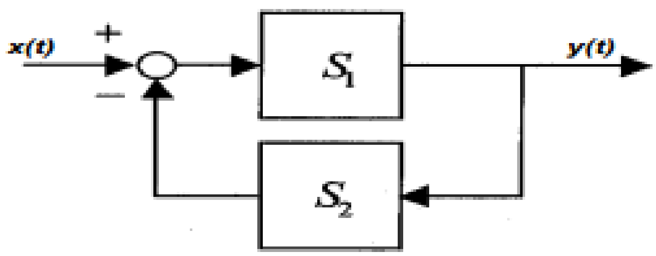
$$\begin{aligned} S1: \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ S2: \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \end{aligned} \tag{4}$$

Θεωρείστε μηδενικές αρχικές συνθήκες

(α') Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, του συνολικού αιτιατού συστήματος με ανάδραση του Σχήματος 1 και περιγράψτε το πεδίο σύγκλισης. Είναι το σύστημα ευσταθές ·

(β') Υπολογίστε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

(γ') Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος, $y(t)$ αν στην είσοδο εφαρμόσουμε την βηματική συνάρτηση, $x(t) = u(t)$. Σχεδιάστε την έξοδο $y(t)$.




Λύση: http://www.csd.uoc.gr/~hy215/current/ex_13.html Θέματα τελικής εξέτασης 2013.

5. **Ασκήσεις δειγματοληψίας: δείτε το συμπληρωματικό υλικό που ανέβηκε στο site-Φροντιστήρια**