Ασκήσεις με τον Μετασχηματισμό Laplace

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

8 Ιουνίου 2014

1. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

   (α') **Να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του.**

   (β') **Να υπολογίσετε το μετασχ. Laplace του. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, χρησιμοποιώντας τον μετασχ. Laplace.**

Λύση:
Είναι

(α') Είναι

$$x(t) = Arect\Big(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\Big) \leftrightarrow X(f) = ATsinc(fT)e^{-j2\pi T/2f} = ATsinc(ft)e^{-j\pi fT} \tag{2}$$

(β') Είναι

$$X(s) = \int_0^T Ae^{-st}dt = \frac{A}{-s}e^{-st}\Big|_0^T = -\frac{A}{s}(e^{-sT}-1) = \frac{A}{s}(1-e^{sT}) \tag{3}$$

Επειδή το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισής του είναι όλο το s-επίπεδο. Επειδή το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, ας βρούμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace που μόλις υπολογίσαμε. Είναι

$$\begin{aligned} X(s)\Big|_{\sigma=0} &= \frac{A}{j2\pi f}(1-e^{-j2\pi fT}) = \frac{A}{j2\pi f}e^{-j\pi fT}(e^{j\pi fT}-e^{-j\pi fT}) \\ &= \frac{A}{j2\pi f}e^{-j\pi fT}2j\sin(\pi fT) \\ &= \frac{A}{\pi f}e^{-j\pi fT}\sin(\pi fT) \\ &= \frac{AT}{\pi fT}e^{-j\pi fT}\sin(\pi fT) \\ &= ATsinc(fT)e^{-j\pi fT} \end{aligned} \tag{4}$$

που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό που υπολογίσαμε παραπάνω.

2. **Υπολογίστε το μετασχ. Laplace του σήματος**

$$\mathbf{x(t) = e^{\alpha t} u(t) + e^{2\alpha t} u(-t),\ \ \alpha > 0} \tag{5}$$

Υπολογίζεται για το σήμα αυτό ο μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, εξηγείστε.

<u>Λύση:</u>
Είναι

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{(a-s)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(2a-s)t}dt \\
&= \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2a-s}e^{(2a-s)t}\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{a-s}0 - \frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} - \frac{1}{2a-s}0 \\
&= -\frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} \\
&= \frac{a-s-2a+s}{(2a-s)(a-s)} \\
&= \frac{-a}{(s-2a)(s-a)}
\end{aligned} \tag{6}$$

αν $a - \Re\{s\} < 0$ και $2a - \Re\{s\} > 0 \Leftrightarrow a < \Re\{s\} < 2a$.

Τα δυο πεδία σύγκλισης προέκυψαν απ΄ τους γνωστούς περιορισμούς στα ολοκληρώματα, όταν $t = \pm\infty$, ώστε αυτά να συγκλίνουν. Επειδή έχουμε άθροισμα σημάτων, το πεδίο σύγκλισης θα είναι η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης.
Ο μετασχηματισμός Fourier δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace, γιατί το πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $\Re\{s\} = \sigma = 0$.

3. **Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος**

$$\mathbf{x(t) = t e^{\alpha t} u(t),\ \ \alpha > 0}$$

είναι ο

$$\mathbf{X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2},\ \ \Re\{s\} > -\alpha}$$

Δίνεται ότι $\displaystyle \int \mathbf{t e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t}\Big(-\alpha t - 1\Big)}$

<u>Λύση:</u>

Είναι

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} te^{at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} te^{-(a+s)t}dt \\
&= \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2}\Big(-(a+s)t-1\Big)\Big|_0^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\Big(-\frac{te^{-(a+s)t}}{a+s} - \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2}\Big) + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{-te^{(a+s)t}}{a+s} - \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= \frac{1}{a+s}\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{e^{(a+s)t}} - 0 + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= \frac{1}{(a+s)^2}\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{e^{(a+s)t}} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
&= 0 + \frac{1}{(a+s)^2} = \frac{1}{(a+s)^2},\ \text{αν } \Re\{s\}+a>0 \Leftrightarrow \Re\{s\} > -a. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Εδώ, το πεδίο σύγκλισης προέκυψε από τους γνωστούς περιορισμούς, ώστε τα όρια να φθίνουν στο μηδέν. Επίσης, στο τελευταίο όριο, εφαρμόσαμε τον κανόνα του De L' Hospital για να το λύσουμε.

4. **Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος**

$$\mathbf{x(t) = tu(t)}$$

είναι

$$\mathbf{X(s) = \frac{1}{s^2},\ \Re\{s\} > 0.}$$

Δίνεται ότι $\displaystyle\int \mathbf{te^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\Big(-\alpha t - 1\Big)}$

<u>Λύση:</u>
Είναι

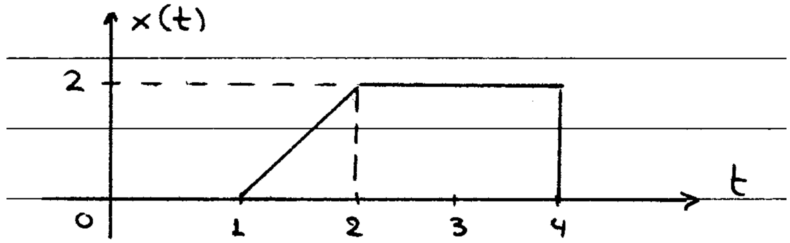
$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} te^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\Big|_0^{\infty} = \Big(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big)\Big|_0^{\infty} \\
&= -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^{\infty} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s^2} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{st}} + \frac{1}{s^2} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{se^{st}} + \frac{1}{s^2} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2},\ \Re\{s\} > 0. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Εδώ και πάλι χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του De L' Hospital, ενώ το πεδίο σύγκλισης προκύπτει κατά τα γνωστά (πλέον :-)).

5. **Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος 1 είναι ο**

$$\mathbf{X(s) = \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s}}$$

Δίνεται ότι $\displaystyle\int \mathbf{te^{-\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\Big(-\alpha t - 1\Big)}$



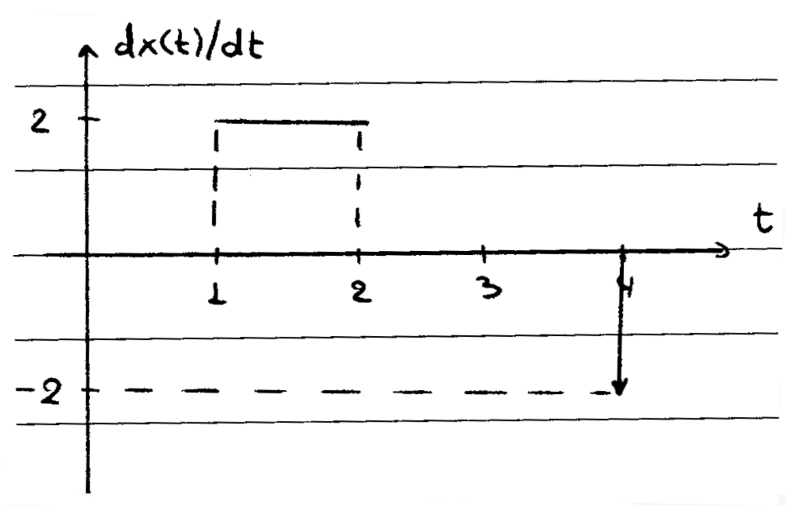
Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 5.5

<u>Λύση:</u>
<u>1ος τρόπος:</u>
Είναι

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_1^2 (2t-2)e^{-st}dt + \int_2^4 2e^{-st}dt = \int_1^2 2te^{-st}dt - \int_1^2 2e^{-st}dt + \int_2^4 2e^{-st}dt \\
&= 2\frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\Big|_1^2 + 2\frac{e^{-st}}{s}\Big|_1^2 - 2\frac{e^{-st}}{s}\Big|_2^4 \\
&= -2\frac{e^{-2s}}{s^2} + 2\frac{e^{-s}}{s^2} - 2\frac{e^{-4s}}{s} \\
&= \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s-επίπεδο, αφού το $x(t)$ είναι πεπερασμένο.

<u>2ος τρόπος:</u>
Είναι



Σχήμα 2: Παράγωγος Άσκησης 5.5

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= 2rect\Big(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\Big) - 2\delta(t-4) \Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\} = \frac{2}{s}e^{-\frac{3}{2}s}(e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}) - 2e^{-4s} \\
&= \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-2s} - 2e^{-4s} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Ισχύει ότι

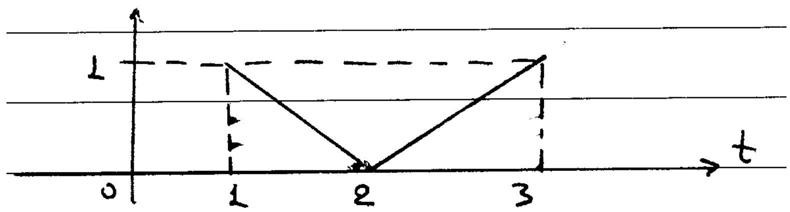
$$Ł\{\frac{dx(t)}{dt}\} = sX(s) - x(0^-) = sX(s)$$

Άρα

$$\frac{2}{s}(e^{-s} - e^{-2s}) - 2e^{-4s} = sX(s) - x(0^-) \Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s} \tag{11}$$

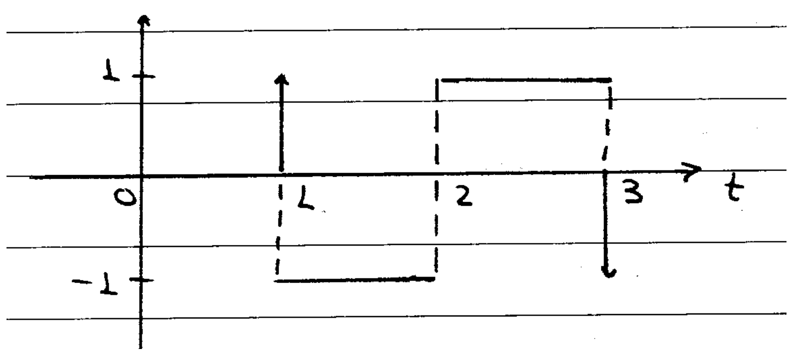
Ο δεύτερος τρόπος λύσης είναι πιο εύκολος, με την προϋπόθεση ότι θα παραγωγιστεί σωστά το σχήμα και θα εφαρμόσετε σωστά την ιδιότητα.

6. **Να υπολογιστεί ο μετασχ. Laplace του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 3.**



Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 5.6

<u>Λύση:</u>
Παραγωγίζοντας, έχουμε το σήμα του σχήματος 4. Είναι



Σχήμα 4: Παράγωγος σχήματος Άσκησης 5.6

$$\begin{aligned}
sX(s) - x(0^-) &= Ł\{\frac{dx(t)}{dt}\} = Ł\{\delta(t-1) - rect\Big(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\Big)\} + rect\Big(\frac{t-\frac{5}{2}}{1}\Big) - \delta(t-3)\} \\
&= e^{-s} - \frac{1}{s}(1-e^{-s}) + \frac{1}{s}(1-e^{-s})e^{-2s} - e^{-3s} \Leftrightarrow \\
sX(s) &= e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} - e^{-3s} \\
&= e^{-s}\Big(1 - \frac{1}{s}\Big) + e^{-2s}\Big(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\Big) - e^{-3s}\Big(\frac{1}{s} + 1\Big) \Leftrightarrow \\
X(s) &= \frac{e^{-s}(s-1)}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}(s+1)}{s^2}
\end{aligned} \tag{12}$$

Το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, άρα το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το s-επίπεδο.

7. **Έστω**

$$\mathbf{X}(\mathrm{s}) = \frac{\mathbf{3s+5}}{\mathbf{s^2+3s+2}}$$

με ROC : $\mathbf{-2 < \Re\{s\} < -1}$. **Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace,** $\mathbf{x(t)}$.

Λύση:
Προφανώς δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για να βρούμε τον αντιστρ. μετασχ. Laplace, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε ήδη γνωστά μας ζεύγη μετασχηματισμών, σπάζοντας το μεγάλο κλάσμα σε μικρότερα. Ισχύει ότι η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη απ' την αντίστοιχη του παρονομαστή, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.
Είναι:

$$X(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$
$$A_1 = X(s)(s+1)\Big|_{\sigma=-1} = \frac{3s+5}{s+2}\Big|_{\sigma=-1} = 2$$
$$A_2 = X(s)(s+2)\Big|_{\sigma=-2} = \frac{3s+5}{s+1}\Big|_{\sigma=-2} = 1$$

Άρα θα είναι

$$X(s) = 2\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

Το πεδίο σύγκλισης δίδεται ότι είναι

$$ROC : -2 < \Re\{s\} < -1 \Leftrightarrow \Re\{s\} > -2 \cap \Re\{s\} < -1$$

Άρα, γνωρίζοντας ότι το $X(s)$ είναι άθροισμα δυο σημάτων της παραπάνω μορφής, με πεδία σύγκλισης τα δυο παραπάνω, θέλουμε να βρούμε τα δυο σήματα στο χρόνο. Από τους πίνακες των ζευγών μετασχηματισμών, έχουμε ότι:

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2},\ \ \Re\{s\} > -2$$
$$-e^{-t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1},\ \ \Re\{s\} < -1$$

Άρα τελικά

$$x(t) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(-t) \tag{13}$$

είναι το σήμα που ψάχνουμε.

8. **Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace του σήματος**

$$\mathbf{X}(\mathrm{s}) = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{(s+2)(s-1)}}$$

όταν:

(α′) **ROC** : $\mathbf{-2 < \Re\{s\} < 1}$

(β′) **ROC** : $\mathbf{\Re\{s\} > 1}$

(γ′) $\mathbf{ROC}: \Re\{\mathbf{s}\} < -\mathbf{2}$

Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε την περιοχή σύγκλισης.

Λύση:
Είναι

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s-1}$$

με

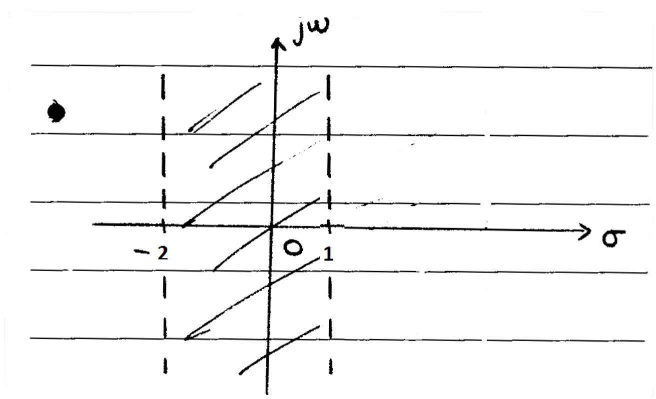
$$\begin{aligned} A_1 &= X(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{-3}{s-1}\Big|_{s=-2} = 1 \\ A_2 &= X(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{-3}{s+2}\Big|_{s=1} = -1 \end{aligned}$$

Ανάλογα με τα πεδία σύγκλισης που δίνονται, θα καθοριστεί και το σήμα στο χρόνο που θα προκύψει.

(α′) Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[L^{-1}]{-2<\Re\{s\}<1=\{-2<\Re\{s\}\}\cap\{\Re\{s\}<1\}} x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{t}u(-t) \quad (14)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5: 1ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

(β′) Άρα

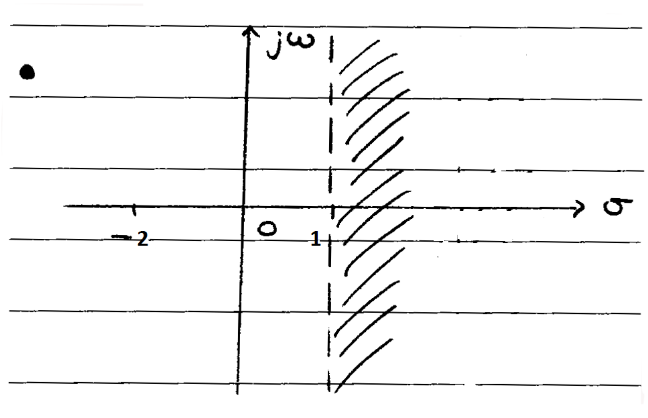
$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[L^{-1}]{\Re\{s\}>1=\{\Re\{s\}>-2\}\cap\{\Re\{s\}>1\}} x(t) = e^{-2t}u(t) - e^{t}tu(t) \quad (15)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 6.

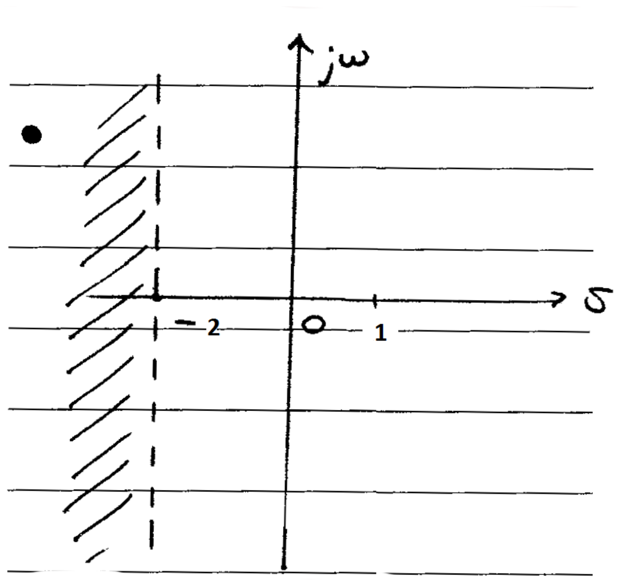
(γ′) Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[L^{-1}]{\Re\{s\}<-2=\{\Re\{s\}<-2\}\cap\{\Re\{s\}<1\}} x(t) = -e^{-2t}u(-t) + e^{t}tu(-t) \quad (16)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 7.



Σχήμα 6: 2ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8



Σχήμα 7: 3ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

9. **Ο μετασχ. Laplace δίνεται από τη σχέση**

$$\mathbf{X(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s - 3}}$$

(α′) **Για όλα τα δυνατά πεδία σύγκλισης, βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace, $\mathbf{x(t)}$.**

(β′) **Σε ποιά περίπτωση υπολογίζεται ο μετασχ. Fourier; Υπολογίστε τον.**

Λύση:
Είναι

(α′) Οι πόλοι του παρονομαστή είναι οι $s_1 = 3, s_2 = -1$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε. Άρα

$$X(s) = \frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A_1}{s-3} + \frac{A_2}{s+1}$$

Τα A_1, A_2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A_1 &= X(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{s+2}{s+1}\Big|_{s=3} = \frac{5}{4} \\ A_2 &= X(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s-3}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{s-3}$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης τα

$$ROC = \begin{cases} \Re\{s\} < -1, \\ \Re\{s\} > 3, \\ -1 < \Re\{s\} < 3 \end{cases}$$

- Για την περίπτωση $\Re\{s\} < -1$, χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $\sigma < -1$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} < -1\}$. Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}e^{-t}u(-t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}<-1} \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}<3} \frac{5}{4}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

  Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(-t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \tag{17}$$

- Για την περίπτωση $\Re\{s\} > 3$, χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $\sigma > 3$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} > 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$. Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}>-1} \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} \\ \frac{5}{4}e^{3t}u(t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}>3} \frac{5}{4}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

  Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{5}{4}e^{3t}u(t) \tag{18}$$

- Για την περίπτωση $-1 < \Re\{s\} < 3$, χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $-1 < \sigma < 3$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$. Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}>-1} \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}<3} \frac{5}{4}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

  Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \tag{19}$$

(β′) Ο μετασχηματισμός Fourier υπολογίζεται μόνο στην περίπτωση $ROC = -1 < \Re\{s\} < 3$, γιατί μόνο σε αυτό το πεδίο περιλαμβάνεται ο άξονας των φανταστικών, $\sigma = 0$.
Άρα για $\sigma = 0$, θα έχουμε

$$X(s)\Big|_{\sigma=0} = \frac{2(j\pi f+1)}{(j2\pi f+1)(j2\pi f-3)} \tag{20}$$

10. **Υπολογίστε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης**

$$\mathbf{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t)}$$

με αρχικές συνθήκες $\mathbf{y(0) = 0}$, $\mathbf{\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0} = -2}$ και $\mathbf{x(t) = u(t)}$.

Λύση:
Παίρνουμε το μετασχ. Laplace των δυο μερών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}
Ł\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\} + 7Ł\{\frac{dy(t)}{dt}\} + 12Ł\{y(t)\} &= Ł\{x(t)\} \\
s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0) + 7sY(s) - 7y(0^-) + 12Y(s) &= X(s) \\
s^2Y(s) - (-2) + 7sY(s) + 12Y(s) &= X(s) \\
Y(s)(s^2+7s+12) &= X(s) - 2 \\
Y(s) &= \frac{1-2s}{s(s^2+7s+12)} \\
Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+3}
\end{aligned} \tag{21}$$

Θα είναι

$$\begin{aligned}
A &= Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{12} \\
B &= Y(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{9}{4} \\
C &= Y(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{12}\frac{1}{s} + \frac{9}{4}\frac{1}{s+4} - \frac{7}{3}\frac{1}{s+3} \rightarrow \\
y(t) &= \frac{1}{12}u(t) + \frac{9}{4}e^{-4t}u(t) - \frac{7}{3}e^{-3t}u(t) \\
&= \Big(\frac{1}{12} + \frac{9}{4}e^{-4t} - \frac{7}{3}e^{-3t}\Big)u(t)
\end{aligned} \tag{22}$$

Παρατήρηση:
Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$Ł\{\frac{d^nx(t)}{dt^n}\} = s^nX(s) - s^{n-1}x(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-)$$

11. **Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace της**

$$\mathbf{X(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+10}}$$

<u>Λύση:</u>
Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3s+2}{(s-(-1+3j))(s-(-1-3j))} \\ &= \frac{A}{s-(-1+3j)} + \frac{A^*}{s-(-1-3j)} \end{aligned}$$

Τα A, A^* δίνονται από

$$\begin{aligned} A &= X(s)(s-(-1+3j))\Big|_{s=-1+3j} = \frac{3s+2}{s-(-1-3j)}\Big|_{s=-1+3j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{6} \\ A^* &= \frac{3}{2} - j\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Οπότε

$$X(s) = \Big(\frac{3}{2} + j\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{s-(-1+3j)} + \Big(\frac{3}{2} - j\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{s-(-1-3j)}$$

Οι πιθανοί πόλοι είναι οι $s_0 = -1-3j, s_1 = s_0^* = -1+3j$, οι οποίοι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, $\sigma = -1$. Άρα τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $\Re\{\sigma\} > -1, \Re\{\sigma\} < -1$. Ανάλογα με αυτά τα πεδία σύγκλισης, θα έχουμε και τα αντίστοιχα $x(t)$. Βρείτε τα! :-)

12. **Για ένα σήμα και το μετασχ. Laplace του γνωρίζετε ότι:**

   (α′) **το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό και άρτιο**

   (β′) **έχει 4 πόλους και κανένα μηδενικό στο μιγαδικό επίπεδο**

   (γ′) **ένας πόλος βρίσκεται στο** $\mathbf{s = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}$

   (δ′) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(t)dt = 4}$

   Βρείτε το X(s).

<u>Λύση:</u>
Προφανώς το $X(s)$ θα είναι της μορφής:

$$X(s) = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)}$$

Δίδεται όμως ότι το σήμα είναι πραγματικό και άρτιο, άρα θα είναι

$$x(t) = x^*(t) \leftrightarrow X(s) = X^*(s^*) \text{ και } x(t) = x(-t) \leftrightarrow X(s) = X(-s)$$

Άρα αν έχει έναν πόλο στη θέση s_k, θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k$ (από τη σχέση του άρτιου σήματος). Όμοια, αν έχει έναν πόλο στη θέση $-s_k$ θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση $-s_k^*$ (από τη σχέση του πραγματικού σήματος). Γνωρίζουμε ότι έχει έναν πόλο s_1, άρα θα έχει κι έναν $-s_1$, κι έναν $-s_1^*$ και έναν s_1^*. Οπότε το σήμα θα γράφεται:

$$X(s) = \frac{A}{(s-s_1)(s-s_1^*)(s+s_1)(s+s_1^*)}$$

Μένει να βρούμε το A.
Δίνεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned} X(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-0t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4 \Leftrightarrow \\ 4 &= \frac{A}{(0-s_1)(0-s_1^*)(0+s_1)(0+s_1^*)} = \frac{A}{|s_1|^2|s_1|^2} = \frac{A}{\frac{1}{4}\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{1}{16}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα που ψάχνουμε είναι το

$$X(s) = \frac{\frac{1}{4}}{(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(s+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})} \tag{23}$$

13. **Σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία για ένα πραγματικό σήμα $\mathbf{x(t)}$ και το μετασχ. Laplace του.**

    (α′) **Το $\mathbf{X(s)}$ έχει ακριβώς δυο πόλους**

    (β′) **Το $\mathbf{X(s)}$ δεν έχει κανένα μηδενικό**

    (γ′) **Το $\mathbf{X(s)}$ έχει πόλο στο $\mathbf{s = -1 + j}$**

    (δ′) **Το $\mathbf{e^{2t}x(t)}$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο**

    (ε′) $\mathbf{X(0) = 8}$

    Βρείτε το $\mathbf{X(s)}$ και την περιοχή σύγκλισης.

    Λύση:
    Λύστε το! :-)
    Hint: Βρείτε πρώτα τη μαθηματική μορφή του $X(s)$. Βρείτε τα πιθανά πεδία σύγκλισης. Τέλος, το (δ′) στοιχείο αξιοποιήστε το για να βρείτε το πεδίο σύγκλισης. Ερμηνεύστε σωστά τι σημαίνει *το $e^{2t}x(t)$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.*

14. **Αποδείξτε ότι ένα αντι-αιτιατό σήμα είναι ευσταθές αν και μόνο αν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Γενικεύστε για ένα μη-αιτιατό σύστημα, αποδεικνύοντας ότι το πεδίο σύγκλισής του πρέπει να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα.**

    Λύση:
    Για ένα αντι-αιτιατό σύστημα θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k} \longleftrightarrow h(t) = -\sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(-t) \tag{24}$$

όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}|A_k||e^{s_k t}u(-t)|dt \\ &= \sum_{k=1}^{N}|A_k|\int_{-\infty}^{0}|e^{\sigma_k t}||e^{j2\pi f t}|dt \\ &= \sum_{k=1}^{N}|A_k|\int_{-\infty}^{0}|e^{\sigma_k t}|dt \end{aligned} \tag{25}$$

το οποίο και σημαίνει ότι το σύστημα είναι ευσταθές μόνο αν $\sigma_k > 0$. Άρα όλοι οι πόλοι του αντι-αιτιατού συστήματος πρέπει να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Γενικεύοντας για ένα οποιοδήποτε σήμα, θα έχουμε

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}+\sum_{k=1}^{L}\frac{B_k}{s-\lambda_k}\longleftrightarrow h(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k t}u(t)-\sum_{k=1}^{L}B_k e^{\lambda_k t}u(-t) \tag{26}$$

όπου s_k, λ_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}|A_k||e^{s_k t}u(t)|+\sum_{k=1}^{L}|-B_k||e^{\lambda_k t}u(-t)|\Big)dt \\ &< \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}|A_k||e^{s_k t}u(t)|dt+\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{L}|B_k||e^{\lambda_k t}u(-t)|dt \\ &= \sum_{k=1}^{N}|A_k|\int_{0}^{\infty}|e^{\sigma_k t}||e^{j2\pi f t}|dt+\sum_{k=1}^{L}|B_k|\int_{-\infty}^{0}|e^{\zeta_k t}||e^{j2\pi f t}|dt \\ &= \sum_{k=1}^{N}|A_k|\int_{0}^{\infty}|e^{\sigma_k t}|dt+\sum_{k=1}^{L}|B_k|\int_{-\infty}^{0}|e^{\zeta_k t}|dt \end{aligned} \tag{27}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν $\Re\{s_k\}=\sigma_k<0$ και το δεύτερο όταν $\Re\{\lambda_k\}=\zeta_k>0$. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι πόλοι s_k του αιτιατού τμήματος του σήματος βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, ενώ όλοι οι πόλοι λ_k του αντι-αιτιατού τμήματος του σήματος βρίσκονται στο δεξιό μεγαδικό ημιεπίπεδο. Έστω s_r ο δεξιότερος πόλος του συνόλου των πόλων s_k και λ_l ο αριστερότερος πόλος του συνόλου των πόλων λ_k. Το πεδίο σύγκλισης θα είναι $\sigma_r<\Re\{s\}<\zeta_l$, και αφού $\sigma_r<0$ και $\zeta_l>0$, το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

Άρα κριτήριο ευστάθειας για τα συστήματα είναι η περίληψη του φανταστικού άξονα μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace που το περιγράφει.

15. **Δίνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης:**

$$\mathbf{\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=x(t)}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{y(0^-)=2,\ \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0^-}=1}$$

και

$$\mathbf{x(t) = e^{-t}u(t)}$$

Βρείτε το $y(t)$.

Λύση:
Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &\longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \\
\frac{d^2x(t)}{dt^2} &\longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)
\end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) &= x(t) \longleftrightarrow \\
s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) &= X(s) \\
s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) &= X(s) \\
Y(s)(s^2 + 5s + 6) &= X(s) + 2s + 11 \\
Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \\
Y(s) &= \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)}
\end{aligned}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα (μπορούμε κατευθείαν, γιατί η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη αυτής του παρονομαστή):

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

με

$$\begin{aligned}
A &= (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \\
B &= (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+3)}\Big|_{s=-2} = 6 \\
C &= (s+3)Y(s)\Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=-3} = -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + 6\frac{1}{s+2} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+3} \longleftrightarrow \\
y(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 6e^{-2t}u(t) - \frac{9}{2}e^{-3t}u(t) \qquad (28)
\end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

16. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t)}$$

(α′) **Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace**

(β′) **Να βρεθεί η αρχική συνθήκη $\mathbf{x(0^+)}$ μέσω του μετασχ. Laplace**

(γ′) **Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{\mathbf{t\to\infty}} \mathbf{x(t)}$ μέσω του μετασχ. Laplace**

(δ′) **Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των παραπάνω δυο ερωτημάτων υπολογίζοντας αναλυτικά τα όρια**

Λύση:

(α′)

$$X(s) = \text{Ł}\{e^{-2t}u(t)\} + \text{Ł}\{e^{-t}\cos(3t)u(t)\} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+9},\ \Re\{s\} > -1$$

και κάνοντας λίγες πράξεις, έχουμε

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20}$$

(β′)

$$\begin{aligned}
x(0^+) &= \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20} \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{2s^3+5s^2+12s}{s^3+5s^2+14s+20} \\
\text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s\to\infty} \frac{6s^2+10s+12}{3s^2+10s+14} \\
\text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s\to\infty} \frac{12s+10}{6s+10} \\
\text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s\to\infty} \frac{12}{6} = 2 \Longleftrightarrow \\
x(0^+) &= 2
\end{aligned} \tag{29}$$

(γ′)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s^3+5s^2+12s}{s^3+5s^2+14s+20} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

(δ′) Δικό σας. :-)