



Πανεπιστήμιο Κρήτης  
Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

## Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

(Φροντιστηριακές Σημειώσεις)

Γιώργος Π. Καφεντζής

Υποψήφιος Διδάκτωρ Επιστήμης Υπολογιστών Πανεπιστημίου Κρήτης

Ηράκλειο

Ιανουάριος 2013



© 2013 All rights reserved.



Η δουλειά του διδάσκοντα δεν είναι να καλύψει όλα τα θέματα μιας μελέτης, αλλά να τα απο-καλύψει στους μαθητές...



# Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	11
Κατάλογος Σχημάτων	13
<b>1 Μια εισαγωγή στο μάθημα ΗΥ215-Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς</b>	<b>1</b>
1.1 Λίγα λόγια ως εισαγωγή...	1
1.2 Μπαίνοντας στο θέμα...	2
1.3 Εφαρμογές - Μια γρήγορη ματιά	5
1.3.1 Ηλεκτροκαρδιογραφήματα	5
1.3.2 Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα	6
1.3.3 Σεισμικά σήματα	7
1.3.4 Σήματα Φωνής	8
1.3.5 Σήματα Ήχου/Μουσικής	11
1.3.6 Χρονοσειρές	12
1.3.7 Εικόνες	13
1.3.8 Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα	15
1.4 I.T.E - Ινστιτούτο Πληροφορικής - Συνεργασίες	17
1.5 Κλείνοντας...	17
1.6 Επίλογος	18
<b>2 Εισαγωγή στα Σήματα και τα Συστήματα</b>	<b>19</b>
2.1 Σήματα	19
2.2 Συστήματα	19
2.3 Μέγεθος Σήματος	20
2.3.1 Ενέργεια Σήματος	20
2.3.2 Ισχύς Σήματος	20
2.4 Ταξινόμηση Σημάτων	24
2.4.1 Συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου σήματα	24
2.4.2 Αναλογικά και ψηφιακά σήματα	25

2.4.3	Περιοδικά και απεριοδικά σήματα . . . . .	25
2.4.4	Σήματα Ισχυος και Ενέργειας . . . . .	26
2.4.5	Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά σήματα . . . . .	26
2.5	Χρήσιμες απλές ιδιότητες σημάτων . . . . .	26
2.5.1	Χρονική Ολίσθηση . . . . .	26
2.5.2	Χρονική Κλιμάκωση . . . . .	28
2.5.3	Χρονική Αντιστροφή . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Σειρές Fourier</b>	<b>33</b>
3.1	Εισαγωγικά . . . . .	33
3.1.1	Γιατί Σειρές Fourier; . . . . .	33
3.1.2	Ένα απλό παράδειγμα . . . . .	37
3.1.3	Μόνο ημίτονα; . . . . .	40
3.2	Ανάλυση σε Σειρές Fourier . . . . .	40
3.2.1	Ύπαρξη Σειράς Fourier . . . . .	42
3.2.2	Ιδιότητες Σειρών Fourier . . . . .	43
3.2.3	Μερικές ακόμα παρατηρήσεις . . . . .	43
3.3	Οι σειρές Fourier στην πράξη . . . . .	49
3.4	Όμως... . . . .	53
3.5	Ασκήσεις . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Ο Μετασχηματισμός Fourier</b>	<b>79</b>
4.1	Ο μετασχ. Fourier διαισθητικά . . . . .	79
4.2	Ο μετασχ. Fourier . . . . .	81
4.2.1	Ύπαρξη του μετασχ. Fourier . . . . .	81
4.2.2	Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος . . . . .	85
4.2.3	Ιδιότητες και ζεύγη μετασχ. Fourier . . . . .	90
4.3	Όμως... . . . .	90
4.4	Ασκήσεις . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Συνέλιξη</b>	<b>109</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	109
5.2	Η συνέλιξη αναλυτικά . . . . .	109
5.3	Πίνακας Συνέλιξης . . . . .	113
5.4	Συστήματα . . . . .	113
5.4.1	Ιδιότητες Συστημάτων . . . . .	114
5.4.2	Συνέλιξη και συστήματα - I . . . . .	115
5.4.3	Συνέλιξη και Συστήματα - II . . . . .	116
5.4.4	Φίλτρα . . . . .	120



5.5	Σύγκριση σημάτων - Συσχέτιση . . . . .	122
5.5.1	Περιοδική Συσχέτιση . . . . .	123
5.5.2	Συσχέτιση για μη περιοδικά σήματα . . . . .	124
5.5.3	Συσχέτιση για σήματα ισχύος . . . . .	126
5.5.4	Εφαρμογές . . . . .	126
5.5.5	Παρατηρήσεις . . . . .	128
5.6	Ασκήσεις . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Ο μετασχηματισμός Laplace</b>	<b>147</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	147
6.1.1	Ο μετασχηματισμός Laplace . . . . .	148
6.1.2	Διαισθητική κατανόηση του μετασχ. Laplace . . . . .	149
6.1.3	Ύπαρξη του μετασχ. Laplace . . . . .	151
6.1.4	Συνοψίζοντας... . . . .	152
6.2	Είδη σημάτων . . . . .	152
6.3	Περιοχή Σύγκλισης . . . . .	154
6.4	Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier . . . . .	159
6.5	Ιδιότητες και ζεύγη του μετασχ. Laplace . . . . .	160
6.6	Μετασχ. Laplace και Συστήματα . . . . .	161
6.7	Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής . . . . .	162
6.8	Ασκήσεις . . . . .	164
<b>7</b>	<b>Δειγματοληψία</b>	<b>181</b>
7.1	Εισαγωγή . . . . .	181
7.2	Θεωρία . . . . .	182
7.3	Παρατηρήσεις . . . . .	188
7.4	Συνοψίζοντας... . . . .	189
7.5	Ασκήσεις . . . . .	190
<b>8</b>	<b>Επαναληπτικά/Προχωρημένα Θέματα</b>	<b>195</b>
<b>A'</b>	<b>Μαθηματικό Υπόβαθρο</b>	<b>219</b>
A'.1	Μιγαδικοί Αριθμοί . . . . .	219
A'.2	Άλγεβρα Μιγαδικών Αριθμών . . . . .	221
A'.2.1	Ο τύπος του Euler . . . . .	222
A'.2.2	Κατανόηση μερικών χρήσιμων ιδιοτήτων . . . . .	223
A'.2.3	Αριθμητικές Πράξεις, Δυνάμεις, και Ρίζες Μιγαδικών Αριθμών . . . . .	224
A'.3	Ημίτονα . . . . .	225
A'.4	Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα . . . . .	228

A'.4.1	Απλές ρίζες . . . . .	229
A'.4.2	Ρίζες πολλαπλότητας $r$ . . . . .	229
A'.5	Χρήσιμο Τυπολόγιο . . . . .	231
A'.5.1	Κανόνας του De L' Hospital . . . . .	231
A'.5.2	Σειρές Taylor - Maclaurin . . . . .	231
A'.5.3	Δυναμοσειρές . . . . .	231
A'.5.4	Μιγαδικοί Αριθμοί . . . . .	232
A'.5.5	Παραγωγή . . . . .	232
A'.5.6	Τριγωνομετρικές Ταυτότητες . . . . .	233
A'.5.7	Αόριστα Ολοκληρώματα . . . . .	234
A'.6	Ασκήσεις . . . . .	235

# Κατάλογος Πινάκων

3.1	Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier . . . . .	44
4.1	Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier . . . . .	90
4.2	Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier . . . . .	91
5.1	Πίνακας ζευγών συνελιζεων . . . . .	113
6.1	Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Laplace . . . . .	160
6.2	Πίνακας ζευγών μετασχ. Laplace . . . . .	161
A'.1	Πίνακας Χρήσιμων τιμών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων . . . . .	224



# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Στοιχεία Ηλεκτροκαρδιογραφήματος . . . . .	5
1.2	Στοιχεία Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος . . . . .	7
1.3	Οι τρεις τύποι ελαστικών κυμάτων . . . . .	8
1.4	Το σήμα φωνής Should we chase . . . . .	9
1.5	Παράδειγμα Συμπίεστικής Δειγματοληψίας: (a) Αρχικό σήμα. (b) Αναπαράσταση του σήματος στο χώρο των wavelets, όπου το σήμα είναι αραιό. Οι σημαντικές τιμές στο χώρο αυτό είναι σχετικά λίγες, όπως φαίνεται απ'το σχήμα. (c) Η ανακατασκευή του σήματος με χρήση των 25000 σημαντικότερων απ'τις $10^6$ συνολικά τιμές του σήματος στο χώρο των wavelets . . . . .	11
1.6	Φωτογραφίες από τον Άρη . . . . .	14
1.7	Αφαίρεση θορύβου (πριν και μετά) . . . . .	15
1.8	Μια απλή τηλεφωνική κλήση: η επεξεργασία στα blocks γίνεται ψηφιακά ενώ η μεταφορά μεταξύ των blocks γίνεται αναλογικά . . . . .	16
2.1	Παράδειγμα Σημάτων Ενέργειας - Ισχύος . . . . .	22
2.2	Παράδειγματα σημάτων: a) αναλογικό, συνεχούς χρόνου, b) ψηφιακό, συνεχούς χρόνου, c) αναλογικό, διακριτού χρόνου, d) ψηφιακό, διακριτού χρόνου . . . . .	24
2.3	Περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0$ . . . . .	25
2.4	Χρονική ολίσθηση ενός σήματος . . . . .	27
2.5	Παράδειγμα χρονικής ολίσθησης ενός σήματος: a) σήμα $f(t)$ , b) $f(t)$ καθυστερημένο κατά 1 δευτερόλεπτο, c) $f(t)$ προηγούμενο κατά 1 δευτερόλεπτο . . . . .	27
2.6	Χρονική κλιμάκωση ενός σήματος . . . . .	28
2.7	Παράδειγμα χρονικής κλιμάκωσης ενός σήματος . . . . .	30
2.8	Χρονικής αντιστροφής ενός σήματος . . . . .	31
2.9	Παράδειγμα χρονικής αντιστροφής ενός σήματος . . . . .	31
3.1	Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου . . . . .	34
3.2	Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου με προστιθέμενο ημίτονο στα 500 Hz . . . . .	34
3.3	Σήμα Φωνής στο πεδίο των συχνοτήτων . . . . .	35
3.4	Αλλοιωμένο σήμα Φωνής στο πεδίο των συχνοτήτων . . . . .	35

3.5	Καθαρισμένο Σήμα Φωνής . . . . .	36
3.6	Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης . . . . .	37
3.7	Απλό παράδειγμα ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους . . . . .	38
3.8	Παράδειγμα ανάλυσης σήματος . . . . .	39
3.9	Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων . . . . .	41
3.10	Ανάλυση πραγματικού σήματος σε ημίτονα . . . . .	45
3.11	Προσέγγιση τετραγωνικού περιοδικού παλμού από 49 ημίτονα . . . . .	47
3.12	Φάσμα πλάτους (πάνω) και φάσμα φάσης (κάτω) ενός περιοδικού σήματος . . . . .	48
3.13	Τέσσερις περίοδοι ενός περιοδικού σήματος . . . . .	50
3.14	Συνημίτονα που συνθέτουν το περιοδικό σήμα - 1 . . . . .	51
3.15	Συνημίτονα που συνθέτουν το περιοδικό σήμα - 2 . . . . .	51
3.16	Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 1 . . . . .	52
3.17	Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 2 . . . . .	52
3.18	Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 3 . . . . .	53
3.19	Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 4 . . . . .	53
3.20	Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.1 . . . . .	55
3.21	Σήμα σειράς Άσκησης 2.13 . . . . .	68
3.22	Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.14 . . . . .	70
4.1	Διαισθητική απόδειξη της σχέσης μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχ. Fourier. . . . .	79
4.2	Βασιστείτε στη διαίσθησή σας!! . . . . .	80
4.3	(α) Σήμα τετραγωνικού παραθύρου (β) Μετασχ. Fourier . . . . .	83
4.4	Προσεγγίσεις της συνάρτησης Δέλτα . . . . .	86
4.5	Σήμα προσήμου $sgn(t)$ . . . . .	88
4.6	Σχήμα Άσκησης 3.1 . . . . .	92
4.7	Σχήμα Άσκησης 3.1 - Σπασμένο σήμα . . . . .	92
4.8	Σήμα Άσκησης 3.3 . . . . .	94
4.9	Σχήμα Άσκησης 3.4 . . . . .	95
4.10	Διάσπαση Άσκησης 3.4 - δεύτερος τρόπος . . . . .	96
4.11	Διάσπαση Άσκησης 3.4 - τρίτος τρόπος . . . . .	96
4.12	Σχήμα Άσκησης 3.5 . . . . .	97
4.13	Παράγωγος βηματικής συνάρτησης . . . . .	98
4.14	Παραγωγή σήματος Άσκησης 3.5 . . . . .	98
4.15	Σήμα Άσκησης 3.6 . . . . .	100
4.16	Σήμα Άσκησης 3.15 . . . . .	105
4.17	Παράγωγος σήματος Άσκησης 3.15 . . . . .	105
5.1	Διαδικασία συνέλιξης . . . . .	110
5.2	Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη... . . . .	112

5.3	Συστήματα σε σειρά . . . . .	115
5.4	Παράλληλα συστήματα . . . . .	116
5.5	Ιδανικά Φίλτρα . . . . .	121
5.6	Πραγματοποιήσιμα Φίλτρα . . . . .	122
5.7	Ερμηνεία της συσχέτισης . . . . .	127
5.8	Σχήμα Άσκησης 4.1 . . . . .	130
5.9	Μετατόπιση και ανάκλαση για Άσκηση 4.1 . . . . .	130
5.10	Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - I . . . . .	131
5.11	Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - II . . . . .	131
5.12	Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - III . . . . .	131
5.13	Σχήμα Άσκησης 4.2 . . . . .	132
5.14	Ανάκλαση και μετατόπιση του σήματος Άσκησης 4.2 . . . . .	132
5.15	Περιπτώσεις Άσκησης 4.2 - I . . . . .	133
5.16	Περιπτώσεις Άσκησης 4.2 - II . . . . .	133
5.17	Ανακλασμένο και μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 4.3 . . . . .	133
5.18	Σχήμα Άσκησης 4.4 . . . . .	134
5.19	Σήμα συνέλιξης $h(t) * x(t)$ Άσκησης 4.4 . . . . .	135
5.20	Σήματα Άσκησης 4.5 . . . . .	135
5.21	Μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 4.5 . . . . .	135
5.22	Περιπτώσεις Άσκησης 4.5 . . . . .	136
5.23	Σήμα Άσκησης 4.6 . . . . .	136
5.24	Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 1 . . . . .	137
5.25	Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 2 . . . . .	137
5.26	Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 3 . . . . .	137
5.27	Αποτέλεσμα Άσκησης 4.6 . . . . .	138
5.28	Άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα . . . . .	142
6.1	Ο μετασχ. Fourier στο μιγαδικό $s$ -επίπεδο . . . . .	147
6.2	Δεν αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς όλοι με τον ίδιο τρόπο... :-)	148
6.3	Εκθετικά σήματα . . . . .	149
6.4	Ημίτονα των δυο μετασχηματισμών . . . . .	150
6.5	Είδη σημάτων . . . . .	153
6.6	Αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα . . . . .	154
6.7	Τα αντι-αιτιατά συστήματα μπορούν να γίνουν πραγματοποιήσιμα με χρονική καθυστέρηση!	154
6.8	Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!! . . . . .	163
6.9	Σχήμα Άσκησης 5.5 . . . . .	167
6.10	Παράγωγος Άσκησης 5.5 . . . . .	168
6.11	Σχήμα Άσκησης 5.6 . . . . .	168

6.12	Παράγωγος σχήματος Άσκησης 5.6 . . . . .	169
6.13	1ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8 . . . . .	171
6.14	2ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8 . . . . .	171
6.15	3ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8 . . . . .	172
7.1	Αναλογικό σήμα . . . . .	183
7.2	Φάσμα αναλογικού σήματος . . . . .	183
7.3	Συνάρτηση Δειγματοληψίας . . . . .	184
7.4	Δειγματοληψία . . . . .	184
7.5	Δειγματοληπτημένο σήμα . . . . .	185
7.6	Μη επικαλυπτόμενο φάσμα . . . . .	185
7.7	Φίλτρο ανακατασκευής . . . . .	186
7.8	Φάσμα με ξένες συχνότητες . . . . .	187
7.9	Διάταξη ανάκτησης σήματος . . . . .	188
8.1	Τραπεζοειδές σήμα Άσκησης 7.1 . . . . .	195
8.2	Παράγωγος του τραπεζοειδούς σήματος Άσκησης 7.1 . . . . .	196
8.3	Σήματα συστήματος Άσκησης 7.2 . . . . .	197
8.4	Σύστημα Άσκησης 7.2 . . . . .	197
8.5	Το φάσμα του σήματος $U(f)$ Άσκησης 7.2 . . . . .	198
8.6	Το φάσμα του σήματος $H(f)U(f)$ Άσκησης 7.2 . . . . .	198
8.7	Το φάσμα του σήματος $W(f)$ Άσκησης 7.2 . . . . .	199
8.8	Voice Scrambler Άσκησης 7.8 . . . . .	205
8.9	Φάσμα $x(t) * \cos(2\pi f_1 t)$ Άσκησης 7.8 . . . . .	206
8.10	Φάσμα $Y(f)$ Άσκησης 7.8 . . . . .	206
8.11	Φάσμα $y(t) * \cos(2\pi f_2 t)$ Άσκησης 7.8 . . . . .	206
8.12	Ζητούμενο φάσμα $y(t) * \cos(2\pi f_2 t)$ Άσκησης 7.8 . . . . .	207
8.13	Φάσμα $Z(f)$ Άσκησης 7.8 . . . . .	207
8.14	Δειγματοληπτημένο φάσμα Άσκησης 7.9 . . . . .	208
8.15	Δειγματοληπτημένο φάσμα για $f_s = 60kHz$ Άσκησης 7.9 . . . . .	208
8.16	Δειγματοληπτημένο φάσμα για $f_s = 45kHz$ Άσκησης 7.9 . . . . .	208
8.17	Δειγματοληπτημένο φάσμα για $f_s = 20kHz$ Άσκησης 7.9 . . . . .	208
8.18	Περιοδικό Τριγωνικό Σήμα Άσκησης 7.11 . . . . .	210
8.19	Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 7.13 . . . . .	212
8.20	Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 7.14 . . . . .	214
8.21	Φιλτραρισμένο σήμα Άσκησης 7.14 . . . . .	215
A'1	Αναπαράσταση αριθμού $z$ στο μιγαδικό επίπεδο . . . . .	222



# Κεφάλαιο 1

## Μια εισαγωγή στο μάθημα ΗΥ215-Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

### 1.1 Λίγα λόγια ως εισαγωγή...

Καλωσήρθατε στο μάθημα *ΗΥ215-Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς!* Το μικρό αυτό εισαγωγικό κεφάλαιο προσδοκά να σας δώσει μια γενική ιδέα σχετικά με το μάθημα, αλλά και σχετικά με τον πολύ ενδιαφέρων ευρύτερο τομέα της Επεξεργασίας Σήματος (στον οποίο ανήκει το μάθημα - αλλά όχι μόνο σε αυτόν).

Ένας άλλος σκοπός είναι να αποτινάξει από πάνω σας (όσο αυτό είναι εφικτό :-)) το φόβο ενός “μαθηματοειδούς” μαθήματος. Η εμπειρία τόσων χρόνων, κυρίως του διδάσκοντα, αλλά και των βοηθών, καταδεικνύει ότι οι φοιτητές “φοβούνται” και δυσκολεύονται αρκετά στο μάθημα αυτό, πράγμα που οφείλεται περισσότερο στα αρκετά - αλλά σχετικά “αθώα” - μαθηματικά που περιέχει, και λιγότερο στην αντικειμενική δυσκολία του. Φυσικά ο φόβος αυτός δε θα εξαλειφθεί από ένα μικρό εισαγωγικό κείμενο, αλλά σίγουρα μπορεί να σας προκαλέσει να δείτε κάποια πράγματα από διαφορετική οπτική γωνία. Πολλές φορές το ενδιαφέρον ενός φοιτητή για ένα επιστημονικό αντικείμενο αυξάνεται όταν του αποκαλυφθεί η “μεγαλύτερη εικόνα”, κομμάτι της οποίας αποτελεί ένα εισαγωγικό μάθημα όπως το ΗΥ215. Δεν είναι λίγες οι φορές που έχουμε ακούσει από φοιτητές τη φράση “τι τα χρειαζόμαστε αυτά; Εμείς Πληροφορική ήρθαμε να σπουδάσουμε, όχι Μαθηματικά!”. Σίγουρα η χρησιμότητα ενός τέτοιου μαθήματος δεν είναι προφανής, όπως για παράδειγμα του ΗΥ120-Ψηφιακή Σχεδίαση, ή του ΗΥ150-Προγραμματισμός. Ιδέα της δημιουργίας αυτού που διαβάζετε τώρα είναι να σας δείξει τι κρύβεται πίσω, στο background, στα παρασκήνια, ενός τέτοιου μαθήματος, και να σας δείξει ότι αποτελεί τη βάση για πολύ όμορφα, διαφορετικά, και ενδιαφέροντα πράγματα (ναι, σε ένα τμήμα Η/Υ υπάρχουν κι άλλα πράγματα να δει κανείς εκτός από software και hardware :-)), που ίσως νομίζετε ότι δεν έχουν καμία σχέση με Μαθηματικά. Αν θα πετύχουμε αυτό το σκοπό, θα φανεί στο τέλος του εξαμήνου ή στη

συνέχεια των σπουδών σας. Προς το παρόν, θέλουμε απλά να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον σας. :-)

## 1.2 Μπαίνοντας στο θέμα...

Ο τίτλος, λοιπόν, του μαθήματος είναι *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς*. Ομολογούμενως εντυπωσιακός! :-P Στα πανεπιστήμια του εξωτερικού, το αντίστοιχο μάθημα συνηθίζεται να λέγεται *Σήματα και συστήματα* (Signals and Systems), και η αντίστοιχη βιβλιογραφία τιτλοφορείται παρόμοια. Ακόμα ένας άλλος τίτλος θα μπορούσε να είναι *Αναλογική Επεξεργασία Σήματος* (Analog Signal Processing). Παίρνοντας αφορμή από τους εναλλακτικούς αυτούς τίτλους, ας δούμε πρώτα τι είναι ένα σήμα. Ο όρος σήμα ορίζει γενικά κάτι που μεταφέρει πληροφορία. Σήματα, για παράδειγμα, μπορούν να φέρουν πληροφορία για την κατάσταση ή τη συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος. Σήματα χρησιμοποιούνται για την μεταφορά πληροφορίας μεταξύ ανθρώπων ή μεταξύ ανθρώπου και μηχανής. Ναι, σωστά φανταστήκατε, η φωνή είναι ένα σήμα. Όπως και ο ήχος, το βίντεο, η εικόνα (αυτά θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο), τα σήματα καπνού, οι χειρονομίες, και το άρωμα των λουλουδιών. Το ανθρώπινο σώμα καθοδηγείται από χημικά σήματα. Οι μέλισσες επικοινωνούν μέσω ενός “προτύπου χορού”. Η μεταβολή της έντασης του φωτός σε μια οπτική ίνα είναι επίσης ένα σήμα. Σκεφτείτε το λίγο. Όλοι μας “επιπλέουμε” σε μια θάλασσα από σήματα. Από τον πιο μικρό ζωντανό οργανισμό, μέχρι τον πιο περίπλοκο, όλοι μας δεχόμαστε και επεξεργαζόμαστε σήματα. Αν και, όπως βλέπετε, τα σήματα μπορούν να πάρουν διάφορες “μορφές”, σε όλες τις περιπτώσεις η πληροφορία περιέχεται σε ένα σχήμα από μεταβολές (μεταβολή του ήχου, της εικόνας, της έντασης, κλπ). Τα σήματα εκφράζονται με μαθηματική μορφή ως συναρτήσεις μιας (μονοδιάστατα σήματα: ήχος, φωνή) μεταβλητής ή περισσότερων (πολυδιάστατα σήματα: εικόνα, βίντεο). Για παράδειγμα, ένα σήμα φωνής αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια συνάρτηση του χρόνου, και μια φωτογραφική εικόνα αναπαρίσταται ως μια συνάρτηση φωτεινότητας σε ένα χώρο δυο διαστάσεων - μήκος και πλάτος.

Περισσότερα για τα σήματα θα δείτε στα σχετικά μαθήματα - την πρώτη όμως “κρυάδα” θα την πάρετε στο ΗΥ215. :) Αυτό το μάθημα αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία θα “χτίσετε” για να μάθετε -όσοι επιθυμείτε- περισσότερα σχετικά με την Επεξεργασία Σήματος, τα Δίκτυα, τις Τηλεπικοινωνίες, και πολλά άλλα. Καταλαβαίνετε λοιπόν το πόσο σημαντικό είναι ένα τέτοιο μάθημα, καθώς αποτελεί το σκελετό επιστημών που σχετίζονται με πράγματα που τα βλέπουμε στην καθημερινότητά μας! Ας πούμε όμως μερικά ακόμα πράγματα σχετικά, για να μπαίνετε περισσότερο στο πνεύμα. :-)

Το μάθημα λοιπόν περιλαμβάνει επιγραμματικά τα εξής:

1. **Σειρές Fourier - Ιδιότητες:** Μετά από λίγες εισαγωγικές έννοιες, που θα σας θυμίσουν τους όρους “συχνότητα”, “πλάτος”, “φάση”, τις οποίες πρωτακούσατε στη Φυσική του Λυκείου, μαθαίνετε πως να γράφετε μια περιοδική συνάρτηση ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων. Περιοδική λέγεται μια άπειρης διάρκειας συνάρτηση του χρόνου η οποία επαναλαμβάνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Αν μια οποιαδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιαδήποτε - για να μη λέμε και ψέμματα :-)) περιοδική συνάρτηση  $x(t)$  μπορεί να γραφεί ως άθροισμα κάποιων ημιτόνων ή συνημιτόνων με συγκεκριμένα πλάτη και συχνότητες, τότε μπορεί κανείς να πει ότι το σήμα

$x(t)$  (τις συναρτήσεις θα τις λέμε *σήματα* στα πλαίσια του μαθήματος) **αποτελείται από ή περιέχει** αυτά τα ημίτονα ή συνημίτονα, άρα ουσιαστικά **περιέχει** αυτές τις συχνότητες! Το εργαλείο που θα σας δώσει την αναπαράσταση αυτή λέγεται **Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier**. Αν το σκεφτείτε λίγο, ίσως αντιληφθείτε ότι η χρησιμότητα μιας τέτοιας διαδικασίας έγκειται στο ότι περιγράφει ένα περιοδικό σήμα με λίγους μόνο αριθμούς (συχνότητες, πλάτη, και φάσεις των ημιτόνων). Δεν είναι λάθος μια τέτοια σκέψη, αλλά το σημαντικότερο είναι ότι η αναπαράσταση σε σειρά Fourier μας δίνει πληροφορία για μια άλλη αναπαράσταση του σήματος, την αναπαράσταση στο χώρο της συχνότητας! Γνωρίζετε ασφαλώς όλοι σας για την αναπαράσταση ενός σήματος (δηλ. συνάρτησης) στο χώρο του χρόνου. Γνωρίζετε, για παράδειγμα, τον κυματισμό που κάνει η γραφική παράσταση ενός ημιτόνου  $\sin(t)$ , όταν το αναπαριστούμε ως προς  $t$ . Στα πλαίσια του μαθήματος, θα μάθετε μια νέα αναπαράσταση, στην οποία ο οριζόντιος άξονας θα είναι οι συχνότητες και ο κατακόρυφος τα πλάτη (ή η φάσεις) των ημιτόνων που αποτελούν το σήμα. Η αναπαράσταση αυτή λέγεται “φάσμα” και θα σας φανεί πολύ χρήσιμη! Ας σημειωθεί ότι αυτές οι συχνότητες των ημιτόνων που συζητάμε, δεν είναι τυχαίες: είναι όλες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας συγκεκριμένης, η οποία λέγεται και “θεμελιώδης” συχνότητα και σχετίζεται άμεσα με την περίοδο του περιοδικού σήματος.

2. **Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες:** Στην πράξη όμως, περιοδικά σήματα με την αυστηρή έννοια του όρου δεν υπάρχουν. Μάλιστα, τα περισσότερα σήματα που υπάρχουν στη φύση είναι μη περιοδικά. Κάπως πρέπει να μπορούμε να βρίσκουμε το συχνοτικό περιεχόμενο και τέτοιων σημάτων. Μέσα από μια πολύ όμορφη επέκταση των σειρών Fourier, μαθαίνετε το **Μετασχηματισμό Fourier**, που αφορά μη περιοδικά σήματα (αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για περιοδικά σήματα, όπως θα δείτε). Ανάλογα, ο μετασχηματισμός Fourier δίνει την ίδια πληροφορία που δίνει η σειρά Fourier για τα περιοδικά σήματα: αποκαλύπτει ποιές συχνότητες περιέχονται στα μη περιοδικά σήματα. Η χρησιμότητα του μετασχηματισμού Fourier βρίσκεται πραγματικά ΠΑΝΤΟΥ, από την Αστροφυσική, την Οικονομία, και τη Χημεία, μέχρι τις Βάσεις Δεδομένων, τα Ραντάρ, και τη Σχεδίαση Κεραιών! :-)
3. **Μετασχηματισμός Laplace - Ιδιότητες:** Στην πορεία του μαθήματος, θα δείτε ότι υπάρχουν σήματα για τα οποία ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει. Αυτό το κενό έρχεται να συμπληρώσει ο **μετασχηματισμός Laplace**, ο οποίος έχει σημαντικές εφαρμογές στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και στη Σχεδίαση Ψηφιακών-από-Αναλογικά Φίλτρων (μεταξύ άλλων). Ο μετασχηματισμός Laplace δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια επέκταση του μετασχηματισμού Fourier, ή αλλιώς, ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια υποπερίπτωση του μετασχηματισμού Laplace.
4. **Τυχαία Σήματα:** Μια μικρή εισαγωγή στα **τυχαία σήματα**, που ουσιαστικά είναι σήματα που δεν έχουν πραγματοποιηθεί ακόμα. Ίσως σας ξενίζει το γεγονός ότι ασχολούμαστε με κάτι που δεν έχει πραγματοποιηθεί ακόμα, με κάτι που ουσιαστικά δεν υπάρχει! Όμως και οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν - αν έχει κανείς 1000 + i500 ευρώ στην τράπεζα, να μας το πει! :-) - αλλά

τόσα βιβλία έχουν γραφτεί, ενώ και οι εφαρμογές τους είναι αμέτρητες. Έτσι και με τα τυχαία σήματα, μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα μελετώντας τα, χρησιμοποιώντας φυσικά τις *στατιστικές ιδιότητές τους*. Για παράδειγμα, η τηλεπικοινωνιακή διαδικασία είναι μια καθαρά στατιστική διαδικασία. Το γιατί, είναι προφανές όταν σκεφτείτε ότι ΔΕΝ μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ΟΛΑ τα σήματα που θα μεταδοθούν μέσω ενός καναλιού. Μπορούμε όμως, κάνοντας εύλογες υποθέσεις, να βγάλουμε συμπεράσματα μέσω των στατιστικών ιδιοτήτων τους (μέση τιμή, διασπορά, τυπική απόκλιση, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κλπ). Ουσιαστικά, το κεφάλαιο αυτό είναι μια πολύ μικρή εισαγωγή στα Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα και στον τρόπο που δουλεύουν - κι ας μην του φαίνεται! ;-)

5. **Δειγματοληψία:** Κλείνετε μελετώντας τη μετατροπή του αναλογικού σήματος σε σήμα διακριτού χρόνου (ΟΧΙ ψηφιακό!). Για να μπορεί να επεξεργαστεί ένας Η/Υ ένα σήμα, πρέπει να μπορεί να μετατραπεί από σήμα αναλογικού χρόνου σε διακριτού χρόνου. Η μετατροπή αυτή γίνεται με τη διαδικασία της **Δειγματοληψίας** και αποτελεί την εισαγωγή στην **Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος**. Κεντρικό ρόλο στο θέμα της Δειγματοληψίας παίζει το γνωστό (όχι ακόμα σε σας :-)) **Θεώρημα του Shannon**. Σε αδρές γραμμές, το θεώρημα αυτό μας πληροφορεί για το πόσο συχνά πρέπει να παίρνουμε δείγματα (τιμές) από μια συνεχή συνάρτηση-σήμα, ώστε να την κάνουμε διακριτή, αλλά να μπορούμε μετά να την ανακατασκευάσουμε από τα δείγματά της. Με άλλα λόγια, μας περιγράφει το γιατί μπορούμε να ακούμε μουσική από ένα CD Player! :-)) Τέλος, για όσους αναρωτήθηκαν, η Δειγματοληψία σε συνδυασμό με τις διαδικασίες του Κβαντισμού (Quantization) και της Κατανομής Bit (Bit Allocation), μετατρέπουν ένα σήμα από αναλογικό σε πλήρως ψηφιακό. :-)

Όλα αυτά λοιπόν συνιστούν το “εναρκτήριο λάκτισμα” για έναν τομέα ιδιαίτερα ενδιαφέρον, που όπως προείπαμε, λέγεται *Επεξεργασία Σήματος - Signal Processing*. Η πλούσια ιστορία και οι μελλοντικές υποσχέσεις του τομέα της Επεξεργασίας Σήματος προέρχονται από μια δυνατή συνεργασία μεταξύ αυξανόμενα περίπλοκων εφαρμογών, νέων θεωρητικών εξελίξεων, και συνεχώς αναδυόμενων νέων αρχιτεκτονικών στον τομέα του υλικού (hardware). Εφαρμογές της Επεξεργασίας Σήματος περιλαμβάνουν έναν αχανή χώρο ο οποίος περιλαμβάνει τους τομείς της διασκέδασης (entertainment), των επικοινωνιών (communications), της εξερεύνησης του διαστήματος (space exploration), της ιατρικής (medicine), της αρχαιολογίας (archaeology), της γεωφυσικής (geophysics), απλά για να αναφέρουμε μερικούς. Αλγόριθμοι και υλικό επεξεργασίας σήματος κυριαρχούν σε ένα ευρύ πεδίο συστημάτων, από υψηλής εξειδίκευσης στρατιωτικά συστήματα και βιομηχανικές εφαρμογές, μέχρι χαμηλού κόστους, υψηλής κατανάλωσης ηλεκτρονικά συστήματα του εμπορίου.

Αν και συνήθως παίρνουμε ως δεδομένη την εκπληκτική επίδοση των συστημάτων πολυμέσων, όπως το βίντεο υψηλής ποιότητας (high definition video), ο ήχος υψηλής πιστότητας (high fidelity audio), και τα διαδραστικά παιχνίδια (interactive games), αυτά τα συστήματα πάντα βασίζονταν σε μεγάλο βαθμό σε τελευταίας τεχνολογίας επεξεργασία σήματος. Εξελιγμένοι επεξεργαστές ψηφιακού σήματος βρίσκονται στον πυρήνα όλων των μοντέρνων κινητών τηλεφώνων. Το πρότυπο εικόνας και ήχου MPEG, καθώς

και το πρότυπο συμπίεσης εικόνας JPEG βασίζονται πολύ σε γνωστές αρχές και τεχνικές επεξεργασίας σήματος. Συσκευές αποθήκευσης υψηλής πυκνότητας και οι νέες μνήμες στερεάς κατάστασης (solid state memories) δουλεύουν επειδή ακριβώς υπάρχουν τεχνικές επεξεργασίας σήματος που επιτρέπουν την παροχή συνέπειας και ευρωστίας σε, κατά τα άλλα, εύθραυστες τεχνολογίες. Καθώς κοιτάζουμε προς το μέλλον, είναι εμφανές ότι ο ρόλος της Επεξεργασίας Σήματος επεκτείνεται, οδηγούμενος εν μέρει από τη σύγκλιση των Τηλεπικοινωνιών, των Υπολογιστών, και της Επεξεργασίας Σήματος, τόσο στην καταναλωτική αρένα όσο και στις προχωρημένες βιομηχανικές και κυβερνητικές εφαρμογές.

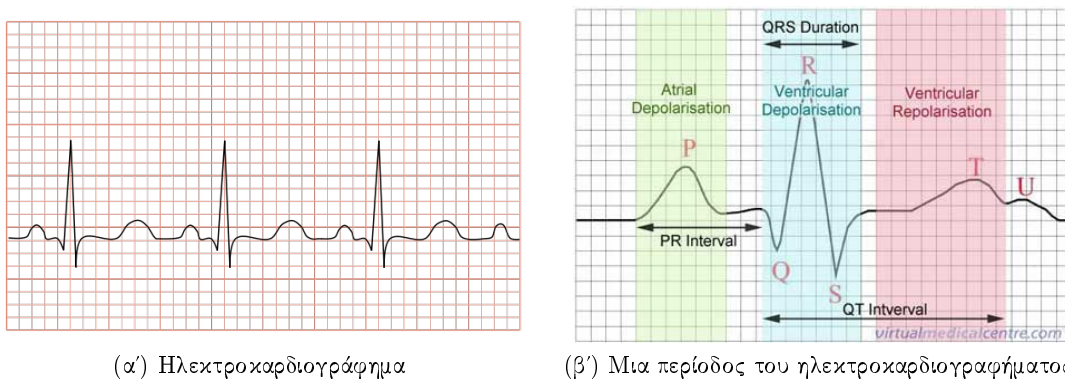
### 1.3 Εφαρμογές - Μια γρήγορη ματιά

Ο αυξανόμενος αριθμός των εφαρμογών και η απαίτηση για εξελιγμένους αλγορίθμους πάνε χέρι-χέρι με την ταχύτατη ανάπτυξη τεχνολογικών συσκευών για υλοποίηση συστημάτων επεξεργασίας σήματος. Σύμφωνα με εκτιμήσεις, η ικανότητα επεξεργασίας τόσο των εξειδικευμένων μικροεπεξεργαστών σήματος όσο και τον προσωπικών υπολογιστών πιθανότατα θα αυξηθεί κατά πολλές τάξεις μεγέθους στα επόμενα 10 χρόνια. Ξεκάθαρα, ο ρόλος και η σημασία της Επεξεργασίας Σήματος θα συνεχίσει να επεκτείνεται σε αυξανόμενους ρυθμούς στο μέλλον.

Η Επεξεργασία Σήματος έχει να κάνει με την αναπαράσταση, το μετασχηματισμό, και τη χειραγώγηση σημάτων και της πληροφορίας που αυτά περιέχουν. Εδώ θα δούμε μερικά παραδείγματα, για να καταλάβετε καλύτερα περί τίνος πρόκειται - φυσικά δε θα επεκταθούμε σε βάθος...

#### 1.3.1 Ηλεκτροκαρδιογραφήματα

Ας ξεκινήσουμε από τα λεγόμενα βιολογικά σήματα. Η ηλεκτρική δραστηριότητα της καρδιάς αναπαρίσταται από το Ηλεκτροκαρδιογράφημα (Electrocardiography (ECG) Signal). Ένα τυπικό ηλεκτροκαρδιογράφημα φαίνεται στο Σχήμα 1.1α'. Το ηλεκτροκαρδιογράφημα είναι (προσεγγιστικά) ένα



Σχήμα 1.1: Στοιχεία Ηλεκτροκαρδιογραφήματος

περιοδικό σήμα - θυμηθείτε την έννοια της περιοδικότητας: περιοδικό λέγεται ένα σήμα που επαναλαμβάνεται ανά ταχτά διαστήματα. Μια τέτοια περίοδος του ηλεκτροκαρδιογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 1.1β', και αναπαριστά έναν κύκλο μεταφοράς του αίματος από την καρδιά στις αρτηρίες. Αυτό το τμήμα

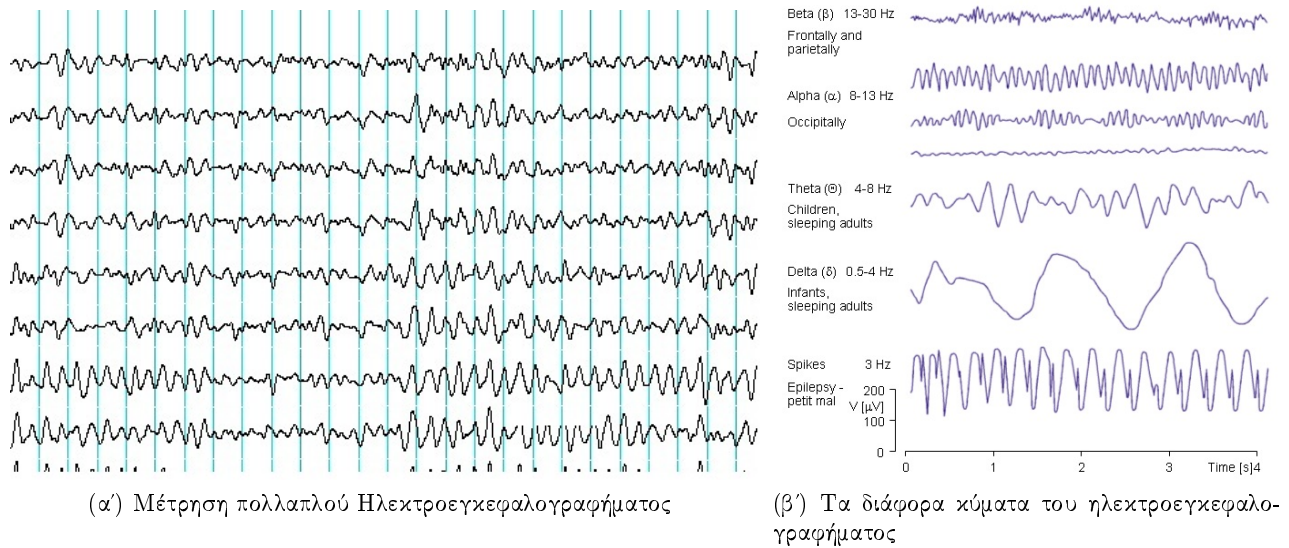
του σήματος παράγεται απο μια ηλεκτρική διέγερση που προέρχεται από το φλεβόκομβο, στο δεξιό κόλπο της καρδιάς (ναι, χρειάζεται και λίγο Καρδιολογία για να τα μελετήσετε αυτά :-). Η διέγερση αυτή προκαλεί συστολή των κόλπων, που ωθεί το αίμα σε κάθε κόλπο στις κοιλίες. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα ως το κύμα-P (P-wave). Ο κολποκοιλιακός κόμβος καθυστερεί τη διέγερση μέχρι να ολοκληρωθεί η μεταφορά του αίματος από τους κόλπους στις κοιλίες, με αποτέλεσμα το διάστημα P-R στο ηλεκτροκαρδιογράφημα. Η διέγερση μετά προκαλεί συστολή των κοιλιών, που προωθούν το αίμα στις αρτηρίες. Αυτή η διαδικασία παράγει το τμήμα QRS στο ηλεκτροκαρδιογράφημα. Κατα τη διάρκεια αυτής της φάσης, οι κόλποι χαλαρώνουν και γεμίζουν με αίμα. Το κύμα-T (T-wave) της κυματομορφής αναπαριστά τη χαλάρωση των κοιλιών. Όλη αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται περιοδικά, ξανά και ξανά. Κάθε τμήμα του ηλεκτροκαρδιογραφήματος φέρει διάφορες πληροφορίες για τον ιατρό που αναλύει την κατάσταση της καρδιάς του ασθενούς. Για παράδειγμα, το πλάτος και ο χρόνος που συμβαίνει το κύμα-P και το τμήμα QRS δείχνουν την κατάσταση της καρδιακής μυικής μάζας.

Απώλεια πλάτους δείχνει μυική ζημιά, ενώ αυξημένο πλάτος είναι ένδειξη μη ομαλών καρδιακών ρυθμών. Μεγάλη καθυστέρηση του κολποκοιλιακού κόμβου καταδεικνύεται από ένα μακρύ διάστημα P-R. Παρόμοια, μερική ή ολική διακοπή των διεγέρσεων συστολής αντανακλάται από διακοπτόμενο συγχρονισμό μεταξύ των κυμάτων R και QRS. Οι περισσότερες από αυτές τις ανωμαλίες μπορούν να θεραπευτούν με διάφορα φάρμακα, και η αποτελεσματικότητα αυτών μπορεί να εποπτευθεί με την παρακολούθηση του νέου ηλεκτροκαρδιογραφήματος, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

Στην πράξη, υπάρχουν διαφόρων ειδών εξωτερικές παρεμβολές που αλλοιώνουν το ηλεκτροκαρδιογραφικό σήμα. Αν αυτές οι παρεμβολές δεν αφαιρεθούν, είναι δύσκολο για έναν ιατρό να κάνει σωστή διάγνωση. Μια κοινή πηγή θορύβου είναι οι γραμμές ρεύματος των 60 Hz που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του καρδιογραφήματος. Άλλες πηγές παρεμβολών είναι τα ηλεκτρομυογραφικά σήματα, που είναι διαφορές δυναμικού που αναπτύσσονται με τη συστολή των μυών. Αυτές όλες οι παρεμβολές μπορούν να αφαιρεθούν με διάφορες τεχνικές επεξεργασίες σήματος. Μπορείτε να τις διδαχθείτε στο σχετικό μεταπτυχιακό (στην ώρα του) μάθημα ΗΥ528-Βιοϊατρική Τεχνολογία.

### 1.3.2 Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα

Το σύνολο της ηλεκτρικής δραστηριότητας, που προκαλείται από την τυχαία εκपुरσοκρότηση δισεκατομμυρίων ανεξάρτητων νευρώνων στον εγκέφαλο, αναπαρίσταται από το *ηλεκτροεγκεφαλογράφημα* - Electroencephalographic Signal - EEG. Σε πολλαπλές εγγραφές ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων, ηλεκτρόδια τοποθετούνται σε διάφορες θέσεις στο κρανίο, με δυο κοινά ηλεκτρόδια να βρίσκονται στους λοβούς των αυτιών, και οι διαφορές δυναμικού ανάμεσα στα διάφορα ηλεκτρόδια καταγράφονται. Ένα τυπικό εύρος ζώνης (θα μάθετε τι είναι αυτό :- ) τέτοιων εγκεφαλογραφημάτων κυμαίνεται από 0.5 ως 100Hz, και τα πλάτη κυμαίνονται από 2 ως 100mV. Ένα παράδειγμα πολλαπλής μέτρησης εγκεφαλογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 1.2α'. Τεχνικές ανάλυσης τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και στο χώρο της συχνότητας έχουν αναπτυχθεί για τη διάγνωση της επιληψίας, διαταραχές του ύπνου, ψυχιατρικές διαταραχές, κλπ. Γι' αυτό το σκοπό, το φάσμα (κι αυτό θα μάθετε τι είναι :- ) του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος χωρίζεται στις ακόλουθες πέντε περιοχές: (1) την περιοχή Δέλτα, που



Σχήμα 1.2: Στοιχεία Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

καλύπτει το εύρος από 0.5 ως 4Hz, (2) την περιοχή Θήτα, που καλύπτει το εύρος από 4 ως 8Hz, (3) την περιοχή Άλφα, που καλύπτει το εύρος από 8 ως 13Hz, (4) την περιοχή Βήτα, που καλύπτει το εύρος από 13 ως 22Hz, και (5) την περιοχή Γάμμα, που καλύπτει το εύρος από 22 ως 30Hz. Τα σήματα στο χρόνο που αντιστοιχούν σε αυτές τις περιοχές φαίνονται στο Σχήμα 1.2β'. Το σήμα Δέλτα εμφανίζεται κανονικά σε παιδιά και ενήλικες κατά τη διάρκεια του ύπνου. Αν εμφανιστεί σε ενήλικα σε άγρυπνη κατάσταση, είναι ένδειξη συγκεκριμένων εγκεφαλικών ασθενειών. Το σήμα Θήτα συνήθως απαντάται σε παιδιά, αν και έχει εμφανιστεί και σε άγρυπνους ενήλικες. Το σήμα Άλφα είναι κοινό σε όλους τους φυσιολογικούς ανθρώπους και είναι περισσότερο εμφανές σε χαλαρούς, άγρυπνους ενήλικες με κλειστά μάτια.

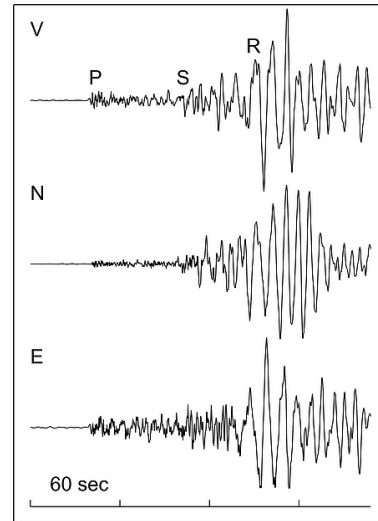
Παρόμοια, το σήμα Βήτα είναι παρατηρήσιμο σε φυσιολογικούς ενήλικες. Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα παρουσιάζει ταχεία, χαμηλής έντασης κύματα, που λέγονται κύματα REM - Rapid Eye Movement, σε ένα άτομο που ονειρεύεται όταν κοιμάται. Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα ενός επιληπτικού ασθενούς παρουσιάζει διάφορων ειδών ανωμαλίες, ανάλογα με τον τύπο της επιληψίας που προκαλείται από μη ελεγχόμενες νευρικές διαταραχές. Όπως καταλαβαίνετε, κάποιος που έχει την ικανότητα να εξάγει τα διάφορα σήματα με ακρίβεια, παρουσία θορύβου ή άλλων παρεμβολών, μέσα από την επεξεργασία τους, είναι ιδιαίτερα χρήσιμος! :-). Όπως προαναφέρθηκε, υπάρχει σχετικό μεταπτυχιακό μάθημα που ασχολείται με τα βιολογικά σήματα (ΗΥ528).

### 1.3.3 Σεισμικά σήματα

Τα σεισμικά σήματα προκαλούνται από την κίνηση των πετρωμάτων ως αποτέλεσμα κάποιου σεισμού, μιας ηφαιστειακής έκρηξης, ή μιας υπόγειας έκρηξης. Η κίνηση του εδάφους προκαλεί ελαστικά κύματα που διαδίδονται μέσα από το σώμα της Γης σε όλες τις κατευθύνσεις ξεκινώντας από την πηγή της

κίνησης. Τρεις βασικοί τύποι ελαστικών κυμάτων παράγονται από την κίνηση του εδάφους. Δυο από αυτά διαδίδονται στο σώμα της Γης, με το ένα να είναι ταχύτερο από το άλλο. Το ταχύτερο αυτό σήμα λέγεται πρωτεύον κύμα (P-wave), ενώ το πιο αργό λέγεται δευτερεύον κύμα (S-wave). Το τρίτο κύμα είναι γνωστό ως κύμα επιφάνειας, που κινείται κατά μήκος της επιφάνειας του εδάφους (σχήμα 1.3). Αυτά τα σεισμικά κύματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά σήματα από ένα σειсмоγράφο και καταγράφονται σε ένα χαρτί ή σε μαγνητική ταινία.

Λόγω της τρισδιάστατης κίνησης του εδάφους, ο σειсмоγράφος συνήθως αποτελείται από τρεις ξεχωριστές συσκευές καταγραφής που παρέχουν πληροφορίες για την κίνηση στις δυο οριζόντιες κατευθύνσεις και στη μια κάθετη. Κάθε μια τέτοια εγγραφή είναι ένα μονοδιάστατο σήμα. Από τις εγγραφές αυτές, είναι δυνατόν να καθορίσει κανείς την ένταση του σεισμού ή μιας πυρηνικής έκρηξης, καθώς και το επίκεντρο του σεισμού. Τα σεισμικά σήματα επίσης παίζουν σημαντικό ρόλο στη γεωφυσική εξερεύνηση για πετρέλαιο και αέρια. Σε αυτές τις εφαρμογές, γραμμικές διατάξεις από σεισμικές πηγές, όπως εκρηκτικά υψηλής ενέργειας, τοποθετούνται ανά τακτά διαστήματα στην επιφάνεια του εδάφους. Τα εκρηκτικά παράγουν σεισμικά κύματα που διαδίδονται μέσω των υποεπιφανειακών γεωλογικών δομών, και αντανακλώνται πίσω στην επιφάνεια. Τα ανακλώμενα κύματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά με μια διάταξη γεωφώνων τοποθετημένα σε συγκεκριμένους σχηματισμούς και απεικονίζονται ως δισδιάστατα σήματα σε συνάρτηση του χώρου και του χρόνου. Πριν αναλυθούν αυτά τα σήματα, γίνονται κάποιες διορθώσεις στα πλάτη και στους χρονισμούς. Χωρίς να θέλουμε να σας στεναχωρήσουμε, το τμήμα μας δεν ασχολείται ερευνητικά με θέματα όπως αυτό. Ποτέ δεν είναι αργά όμως... :-)



Σχήμα 1.3: Οι τρεις τύποι ελαστικών κυμάτων

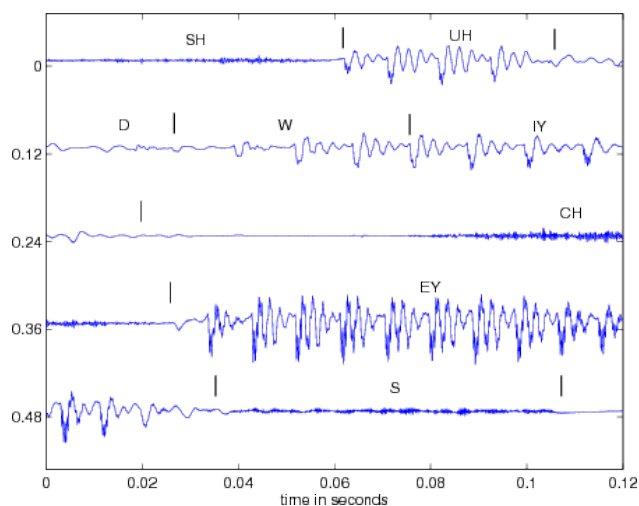
#### 1.3.4 Σήματα Φωνής

Η γραμμική ακουστική θεωρία της παραγωγής φωνής έχει οδηγήσει σε μαθηματικά μοντέλα για την αναπαράσταση των σημάτων φωνής. Ένα σήμα φωνής σχηματίζεται από τη διέγερση της φωνητικής οδού και συνίσταται από δυο είδη ήχων: έμφωνους και άφωνους. Οι έμφωνοι ήχοι, που περιλαμβάνουν τα φωνήεντα και έναν αριθμό από σύμφωνα, όπως τα B, D, L, M, N, R, διεγείρονται από ένα κύμα αέρα που παράγεται από τους πνεύμονες και διαμορφώνεται από τις ανοιγοκλειόμενες φωνητικές χορδές. Από την άλλη, οι άφωνοι ήχοι παράγονται από την ελεύθερη διέλευση του αέρα μέσα από τις χαλαρές φωνητικές χορδές, διαμορφώνονται κυρίως από τη στοματική κοιλότητα, και περιλαμβάνουν ήχους όπως οι F, S, SH. Ένα σήμα φωνής φαίνεται στο Σχήμα 1.4, το οποίο εικονίζει τη φράση *Should we*



*chase*, σε διαδοχικές γραφικές παραστάσεις. Η συνολική διάρκεια του σήματος είναι 0.6 δευτερόλεπτα. Μπορείτε να παρατηρήσετε το φώνημα SH, στην αρχή της πρότασης, το οποίο έχει ακανόνιστη, “θορυβώδη” μορφή, και είναι σήμα υψηλής συχνότητας (αλλάζει πολύ γρήγορα στη μονάδα του χρόνου). Επίσης, δείτε το φώνημα I, το οποίο είναι χαμηλής συχνότητας σήμα (αλλάζει αργά στη μονάδα του χρόνου), με κάποια περιοδικότητα και ομοιομορφία. Το ίδιο ισχύει και για το φώνημα EY, όπως και όμοιο με το αρχικό φώνημα SH φαίνεται και το φώνημα CH και το φώνημα S. Η χρονική δομή τους είναι τέτοια που μας επιτρέπει να χωρίζουμε τα φωνήματα σε (σχεδόν) περιοδικά (quasi-periodic) και απεριοδικά (aperiodic). Έχει δειχθεί ότι τα σχεδόν περιοδικά σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα άθροισμα πεπερασμένου αριθμού συνημιτόνων - ναι, τα γνωστά συνημίτονα που γνωρίζετε από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ξαναείδατε στον Απειροστικό Λογισμό 1! Η χαμηλότερη συχνότητα ταλάντωσης αυτών των σημάτων λέγεται *θεμελιώδης συχνότητα* και η εύρεσή της με ακρίβεια αποτελεί ακόμα hot θέμα στην Επεξεργασία Φωνής. :-) Τα απεριοδικά σήματα δεν έχουν σταθερή χρονική δομή και μοιάζουν περισσότερο με θόρυβο, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Εν γένει, μπορούμε να πούμε ότι στην Επεξεργασία Φωνής υπάρχουν δυο τάσεις, δυο “στρατόπεδα”:



Σχήμα 1.4: Το σήμα φωνής Should we chase

το πρώτο εξετάζει το σήμα φωνής με βάση το ανθρώπινο σύστημα παραγωγής φωνής: μια διέγερση που περνάει από τις φωνητικές χορδές, διατρέχει τη φωνητική οδό, φτάνει στη στοματική κοιλότητα, και διαμορφώνεται τελικά από τα χείλη. Βάση αυτής της διαδικασίας είναι το γνωστό μοντέλο Πηγής - Φίλτρου (source-filter model). Η χρήση αυτού του μοντέλου είναι άκρως χρήσιμη στην Ανάλυση Φωνής, στην Ανίχνευση Παθολογιών, στη μελέτη του ανθρώπινου συστήματος παραγωγής φωνής, και αλλού. Το άλλο “στρατόπεδο” βλέπει το σήμα της φωνής ως μια απλή χρονοσειρά, χωρίς να πολυενδιαφέρεται για τον τρόπο παραγωγής της. Έτσι, το σήμα φωνής συνήθως μοντελοποιείται από ένα άθροισμα ημιτόνων με πλάτη και συχνότητες που μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Τέτοια μοντέλα περιλαμβάνουν το Ημιτονοειδές μοντέλο (Sinusoidal Model, SM), το Αρμονικό+Θόρυβος Μοντέλο (Harmonic Plus Noise Model, HNM - έχει αναπτυχθεί το 1995 από τον καθηγητή του τμήματος, κ. Στυλιανού), και

το πρόσφατο Σχεδόν Αρμονικό Μοντέλο (Quasi-Harmonic Model, QHM - έχει αναπτυχθεί από τον πρώην διδακτορικό φοιτητή του τμήματος, κ. Πανταζή), το οποίο είναι πιθανότατα απ'τα καλύτερα που κυκλοφορούν παγκοσμίως σε ανάλυση σημάτων πολλαπλών συνιστωσών (multi-component signals), όπως είναι η φωνή.

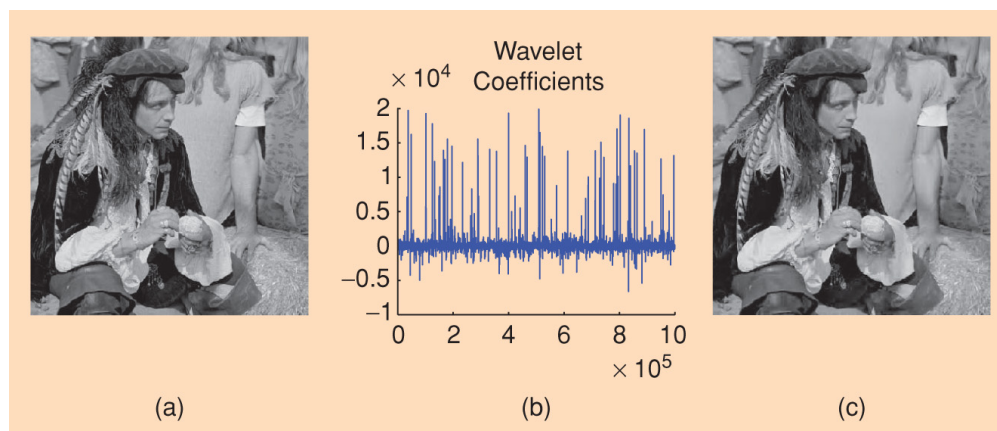
Όπως καταλάβατε, μια από τις σπουδαιότερες εφαρμογές στην Επεξεργασία Σήματος είναι στη γενική περιοχή της Επεξεργασίας Φωνής (και είστε τυχεροί, έχουμε τέτοιο μάθημα στο πρόγραμμα σπουδών μας - ΗΥ578). Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην περιοχή αυτή χωρίζονται εν γένει σε τρεις κατηγορίες: (1) Ανάλυση Φωνής, (2) Σύνθεση Φωνής, και (3) Ανάλυση και Σύνθεση Φωνής. Μέθοδοι Ανάλυσης Φωνής χρησιμοποιούνται στην Αυτόματη Αναγνώριση Ομιλίας (Automatic Speech Recognition), στην Ταυτοποίηση Ομιλητή (Speaker Verification), και στην Αναγνώριση Ομιλητή (Speaker Identification). Επίσης σχετικά πρόσφατα υπάρχουν εφαρμογές στην Ιατρική και στη διάγνωση παθήσεων του συστήματος παραγωγής φωνής. Εφαρμογές της Σύνθεσης Φωνής παρουσιάζονται στη Μετατροπή Κειμένου σε Ομιλία (Text-to-Speech Synthesis), και στην Εξόρυξη Δεδομένων από Υπολογιστές σε μορφή ομιλίας (Data Retrieval), μεταξύ άλλων. Ένα παράδειγμα Ανάλυσης και Σύνθεσης Φωνής (3η κατηγορία) είναι η Κρυπτογράφηση Φωνής για ασφαλείς επικοινωνίες (Voice Scrambling for Secure Transmission). Ένα ακόμα παράδειγμα είναι η Συμπύεση Φωνής (Speech Compression), που χρειάζεται για τη γρήγορη και αποτελεσματική μετάδοση μέσω ενός μέσου. Ένα τρίτο παράδειγμα είναι η Βελτίωση Φωνής (Speech Enhancement), που αποσκοπεί στη βελτίωση της ποιότητας του σήματος της φωνής, με την έννοια του ότι γίνεται πιο αντιληπτό στο αυτί μας. Ένα τέταρτο, πολύ δημοφιλές παράδειγμα, είναι η Τροποποίηση Φωνής (Speech Modification), και η Μετατροπή Φωνής (Voice Conversion). Τροποποίηση φωνής ορίζεται ως η αλλαγή των διάφορων χαρακτηριστικών της φωνής ενός ατόμου, όπως η τονικότητα, ο ρυθμός άρθρωσης, η ένταση, και άλλα. Μετατροπή φωνής ορίζεται ως η αλλαγή των χαρακτηριστικών της φωνής ενός ομιλητή (source speaker) ώστε να φαίνεται ότι η φωνή προέρχεται από κάποιον άλλο, συγκεκριμένο, ομιλητή (target speaker). Μπορείτε εδώ να βρείτε και να ακούσετε παραδείγματα τροποποίησης φωνής (στην παράγραφο VTLN-Based Voice Conversion), που έχουν δημιουργηθεί με μια πολύ απλή τεχνική, που λέγεται Κανονικοποίηση του Μήκους της Φωνητικής Οδού (Vocal Tract Length Normalization). Μερικά από αυτά είναι αρκετά αστεία. :- ) Φυσικά, τέτοιες τεχνικές, που βασίζονται σε αλλαγή ενός μόνο χαρακτηριστικού, δεν έχουν ιδιαίτερη ευελιξία, ούτε ιδιαίτερα καλή απόδοση. Το Ημιτονοειδές Μοντέλο, που ήδη αναφέραμε, έχει χρησιμοποιηθεί για τροποποίηση φωνής, με αρκετά καλά αποτελέσματα. Ακόμα καλύτερα αποτελέσματα στο πεδίο της τροποποίησης φωνής έχει το Αρμονικό+Θόρυβος Μοντέλο, ενώ έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς και για μετατροπή φωνής. Ελπίζουμε ότι το πρόσφατο Σχεδόν Αρμονικό Μοντέλο θα δώσει ακόμα καλύτερα αποτελέσματα (αυτό εξαρτάται κυρίως απ'τον υπογράφοτα :- ) ).

Το Εργαστήριο Πολυμέσων που διαθέτει το τμήμα, σε συνεργασία με το Εργαστήριο Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων του Ι.Τ.Ε, ασχολούνται ερευνητικά με θέματα όπως τα παραπάνω. Έχουμε την τύχη να διαθέτουμε στο τμήμα καθηγητές με σπουδαίο και διεθνώς αναγνωρισμένο ερευνητικό έργο στους τομείς αυτούς, και ειδικότερα στον τομέα της Ανάλυσης Φωνής, έχουμε κατασκευάσει state-of-the-art αλγόριθμους με εξαιρετικά αποτελέσματα.

### 1.3.5 Σήματα Ήχου/Μουσικής

Το ηλεκτρονικό συνθεσάιζερ είναι ένα παράδειγμα της χρήσης σύγχρονων τεχνικών επεξεργασίας σήματος στη μουσική. Ο φυσικός ήχος που παράγεται από τα περισσότερα μουσικά όργανα παράγεται, εν γένει, από μηχανικές δονήσεις που προκαλούνται από κάποιου είδους ταλαντωτή. Όλες αυτές οι δονήσεις μαζί σε ένα μουσικό όργανο παράγουν τη μουσική. Για παράδειγμα, σε ένα βιολί, ο κύριος ταλαντωτής είναι οι χορδές. Όταν κινούνται, κάνουν το ξύλινο σώμα του βιολιού να δονείται, το οποίο μετέπειτα προκαλεί δονήσεις στα μόρια του αέρα μέσα και έξω από το βιολί. Ο ήχος των οργάνων μπορεί να χωριστεί σε δυο κατηγορίες: σχεδόν περιοδικό και απεριοδικό ήχοι. Οι σχεδόν περιοδικό ήχοι μπορούν να αναπαρασταθούν ως ένα άθροισμα από πεπερασμένου πλήθους συνημίτονα με μεταβαλλόμενα πλάτη και συχνότητες. Οι απεριοδικό ήχοι συνηθίζεται να μοντελοποιούνται με κατάλληλη επεξεργασία λευκού θορύβου. Αρκετά μοντέλα ανάλυσης ήχου που χρησιμοποιούν παρόμοιο διαχωρισμό έχουν αναπτυχθεί στο παρελθόν, με αρκετή επιτυχία. Γνωστότερο όλων είναι το Ημιτονοειδές Μοντέλο (SM), που αναφέραμε και στην παράγραφο σχετικά με τη φωνή.

Ένας άλλος τομέας με αρκετό ερευνητικό ενδιαφέρον είναι η Συμπίεση Ήχου (Audio Compression).



Σχήμα 1.5: Παράδειγμα Συμπιεστικής Δειγματοληψίας: (a) Αρχικό σήμα. (b) Αναπαράσταση του σήματος στο χώρο των wavelets, όπου το σήμα είναι αραιό. Οι σημαντικές τιμές στο χώρο αυτό είναι σχετικά λίγες, όπως φαίνεται απ'το σχήμα. (c) Η ανακατασκευή του σήματος με χρήση των 25000 σημαντικότερων απ'τις  $10^6$  συνολικά τιμές του σήματος στο χώρο των wavelets

Ένα παράδειγμα που είναι γνωστό σε όλους σας είναι το πρότυπο ήχου MPEG-Layer III, το γνωστό MP3. Η συμπίεση ήχου στο MP3 επιτυγχάνεται με τη μείωση ή εξάλειψη συγκεκριμένων τμημάτων του ήχου, που θεωρείται ότι είναι εκτός της ακουστικής εμβέλειας των περισσότερων ανθρώπων. Αυτή η μέθοδος λέγεται Ψυχοακουστική Κωδικοποίηση (Perceptual Coding), και χρησιμοποιεί ψυχοακουστικά μοντέλα για να απορρίψει ή να μειώσει την ακρίβεια κομματιών ήχου που είναι λιγότερο αντιληπτά από την ανθρώπινη ακοή, και τα τμήματα που απομένουν καταγράφονται και κωδικοποιούνται με αποτελεσματικό τρόπο, επιτυγχάνοντας συμπίεση που φτάνει μέχρι και 11 φορές το μέγεθος του αρχικού σήματος (ένα CD ήχου περιέχει μουσική που έχει 44100 δείγματα ανά δευτερόλεπτο, με 16 bit ακρίβεια, σε 2 κανάλια, άρα απαιτούνται 1411200 bit/sec. Το ίδιο αρχείο μουσικής, κωδικοποιημένο με MP3 στα

128 kb/sec, απαιτεί 128000 bit/sec. Ο λόγος των δυο είναι  $1411200/128000 = 11.025$ , άρα το MP3 αρχείο είναι 11 φορές μικρότερο σε μέγεθος).

Επίσης, μια πολύ πρόσφατη, ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, και ραγδαίως αναπτυσσόμενη ερευνητική περιοχή είναι αυτή της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας (Compressive Sampling - C.S). Αξίζει να αναφέρουμε λίγα πράγματα, πολύ συνοπτικά. Πρόκειται λοιπόν για μια θεωρία που αναφέρει ότι ένα σήμα (ήχος, φωνή, εικόνα, οποιοδήποτε σήμα) μπορεί να ανακατασκευαστεί από πολύ λιγότερα δείγματα απ'όσα χρησιμοποιούν οι παραδοσιακές τεχνικές που βασίζονται στο θεώρημα του Shannon - το οποίο και θα μάθετε στο μάθημα! Το θεώρημα του Shannon θέτει ένα κάτω όριο στο πόσα δείγματα (τιμές) πρέπει να πάρουμε από μια συνεχή συνάρτηση (αναλογικό σήμα) για να μπορούμε να το ανακατασκευάσουμε τέλεια από αυτά τα δείγματα. Φυσικά η θεωρία της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας δεν παραβιάζει αυτό το όριο για την τέλεια ανακατασκευή του σήματος, απλά χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές “αναπλήρωσης” των δειγμάτων που λείπουν, και φυσικά η ανακατασκευή του σήματος δεν είναι τέλεια, όπως αυτή που υπακούει στο θεώρημα του Shannon. Όμως, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.5, η διαφορά μεταξύ του αυθεντικού και του ανακατασκευασμένου σήματος-εικόνας είναι πολύ δύσκολα διακριτή (προσέξτε τα μαλλιά του εικονιζόμενου για να δείτε τη διαφορά). Κύρια προϋπόθεση για την “καλή” ανακατασκευή του σήματος είναι αυτό να είναι *αραιό* (sparse) σε κάποιο χώρο. Το τι σημαίνει αυτό, αν και μπορείτε να κάνετε εύλογες υποθέσεις, θα το μάθετε όταν έρθει η ώρα. :-)

Άλλες εφαρμογές περιλαμβάνουν τον Τρισδιάστατο Ήχο (3D Audio), τον Εικονικό Ήχο (Virtual Audio), τα Πολυκαναλικά Συστήματα Ήχου (Multichannel Audio Systems), το Τυφλό Διαχωρισμό Πηγών Ήχου (Blind Source Separation), την Αποθορυβοποίηση Ήχου (Audio Denoising), και πολλά άλλα. Ένα διασκεδαστικό παράδειγμα μπορείτε να βρείτε εδώ, όπου χρησιμοποιείται η πολύ απλή τεχνική της Φασματικής Αφαίρεσης (Spectral Subtraction) για την αφαίρεση του ενοχλητικότερου ήχου από τις βουβουζέλες στις μεταδόσεις του Παγκοσμίου Κυπέλλου Ποδοσφαίρου, που έγινε στη Νότια Αφρική, το 2010! :-) Ακούστε τη διαφορά! Να σημειωθεί ότι ο κώδικας που υλοποιεί τον αλγόριθμο δεν ξεπερνά τις 200-250 γραμμές.

Η Επεξεργασία Ήχου είναι αρκετά ενεργή ερευνητικά στο τμήμα μας, με αρκετά δυνατό group από ερευνητές, σε μεταπτυχιακό και διδακτορικό επίπεδο, ενώ δίνεται και ως σχετικό μεταπτυχιακό μάθημα (ΗΥ572-Ψηφιακή Επεξεργασία Ήχου), όπου και θα έχετε την ευκαιρία -πιθανότατα- να σχεδιάσετε τη δική σας εκδοχή του MP3, σε σχετική εργασία (project) του μαθήματος! :-)

### 1.3.6 Χρονοσειρές

Τα σήματα που έχουμε περιγράψει ως τώρα είναι συνεχή στο χρόνο, δηλ. ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή. Σε πολλές περιπτώσεις, τα σήματα που μας ενδιαφέρουν είναι διακριτού χρόνου, δηλ. ορίζονται μόνο σε ακέραιες χρονικές στιγμές (φυσικά, και τα σήματα ήχου, φωνής, εγκεφάλου, και καρδιάς είναι και αυτά διακριτού χρόνου όταν τα επεξεργαζόμαστε στον Η/Υ. Από τη φύση τους όμως είναι συνεχή στο χρόνο - πρακτικά, κάθε σήμα επεξεργάσιμο σε Η/Υ αποτελεί μια χρονοσειρά). Συχνά αυτά τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας. Για παράδειγμα, τέτοια σήματα είναι οι ημερήσιες κινήσεις των μετοχών, ο ετήσιος πληθυσμός ανά πεντηκονταετία, οι επιβάτες αεροπορικών εταιριών ανά έτος, και

άλλα. Αυτού του είδους τα σήματα, που συνήθως αποκαλούνται *χρονοσειρές*, εμφανίζονται συχνά στις επιχειρήσεις, στα οικονομικά, σε φυσικές επιστήμες, κοινωνικές επιστήμες, στη μηχανική, στην ιατρική, και σε πολλά άλλα πεδία. Υπάρχουν πολλοί λόγοι που η ανάλυση χρονοσειρών είναι σημαντική. Σε μερικές εφαρμογές, προκύπτει η ανάγκη ανάπτυξης ενός μοντέλου για τον προσδιορισμό της φύσης της εξάρτησης των δεδομένων από μια ανεξάρτητη μεταβλητή, και η χρήση αυτού του μοντέλου για μελλοντικές προβλέψεις. Παράδειγμα, στον επιχειρηματικό σχεδιασμό, οι προβλέψεις πωλήσεων είναι απαραίτητες. Κάποιου είδους σειρές έχουν περιοδικές συνιστώσες, και είναι σημαντικό να μπορούμε να εξάγουμε αυτές τις συνιστώσες. Η μελέτη των ηλιακών κηλίδων είναι, για παράδειγμα, σημαντική για την πρόβλεψη των κλιματικών αλλαγών. Ένα σημαντικό στοιχείο είναι ότι τα δεδομένα χρονοσειρών είναι θορυβώδη, και η αναπαράστασή τους απαιτεί μοντέλα που είναι βασισμένα σε στατιστικές ιδιότητες. Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων θα δείτε -όσοι επιθυμείτε- στο μάθημα ΗΥ570-Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων.

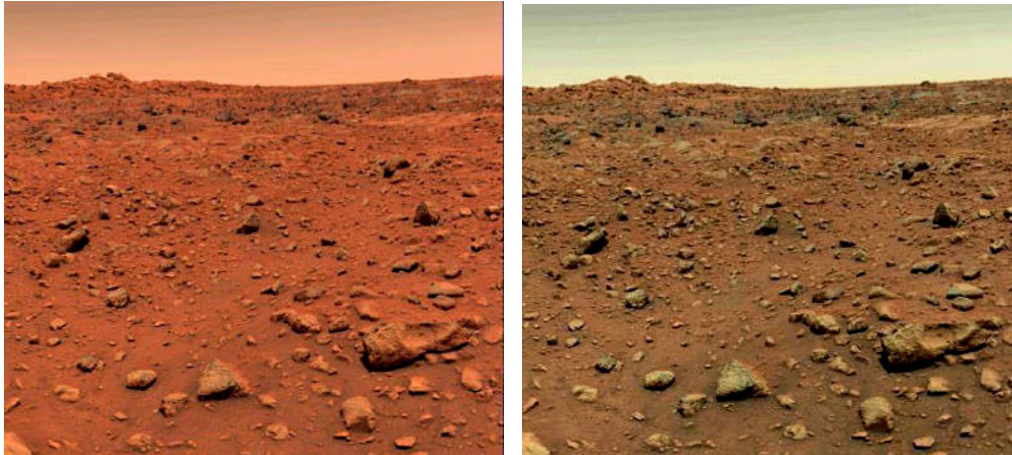
### 1.3.7 Εικόνες

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η εικόνα είναι ένα δισδιάστατο σήμα, του οποίου η ένταση σε κάθε σημείο είναι μια συνάρτηση δυο χωρικών μεταβλητών. Παραδείγματα αποτελούν η φωτογραφία, η ακίνητη εικόνα βίντεο, εικόνες από ραντάρ και σόναρ, καθώς και ακτινογραφίες στήθους ή οδοντοστοιχείας. Μια ακολουθία εικόνων, όπως αυτές που βλέπετε στην τηλεόραση, είναι ουσιαστικά ένα τρισδιάστατο σήμα για το οποίο η ένταση της εικόνας σε κάθε σημείο είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών: δυο χωρικών μεταβλητών, και μια τρίτης - του χρόνου.

Τα βασικά προβλήματα στην Επεξεργασία Εικόνας είναι η Αναπαράσταση και Μοντελοποίηση σήματος εικόνας (Image Signal Representation and Modeling), η Βελτίωση Εικόνας (Image Enhancement), η Ανακατασκευή Εικόνας από προβολές (Image Reconstruction from projections), η Αποκατάσταση Εικόνας (Image Restoration), η Ανάλυση Εικόνας (Image Analysis), και η Κωδικοποίηση Εικόνας (Image Coding). Κάθε στοιχείο μιας εικόνας αναπαριστά μια φυσική ποσότητα - ο χαρακτηρισμός του στοιχείου λέγεται *αναπαράσταση εικόνας*. Για παράδειγμα, μια φωτογραφία αναπαριστά τη φωτεινότητα ενός αντικειμένου όπως αυτό φαίνεται στην κάμερα. Μια εικόνα υπερύθρων παρμένη από δορυφόρο ή αεροπλάνο αναπαριστά τη θερμοκρασία μιας τοποθεσίας. Ανάλογα του είδους της εικόνας και των εφαρμογών της, διάφορα μοντέλα εικόνας ορίζονται. Τέτοια μοντέλα βασίζονται επίσης στην αντίληψη, και σε τοπικά ή καθολικά χαρακτηριστικά. Η φύση και η απόδοση των αλγορίθμων επεξεργασίας εικόνας εξαρτώνται από το μοντέλο εικόνας που χρησιμοποιείται. Ένα παράδειγμα επεξεργασίας εικόνας φαίνεται στο Σχήμα 1.6, όπου στα αριστερά και δεξιά φαίνεται μια εικόνα που στάλθηκε από τον πλανήτη Άρη, στην προσεδάφιση του οχήματος Viking, στις 20 Ιουλίου 1976, στα πλαίσια του προγράμματος του κέντρου ερευνών JPL - Jet Propulsion Laboratory της NASA. Η αριστερή φωτογραφία δείχνει τον Άρη όπως έχουμε συνηθίσει να τον βλέπουμε σε φωτογραφίες που έχουν δημοσιευθεί. Η φωτογραφία στα δεξιά δείχνει έναν πλανήτη που μοιάζει περισσότερο με τη Γη - έχει μπλε ουρανό και γκριζοκόκκινο πέτρωμα. Θυλείται ότι αυτή η φωτογραφία ήταν η αυθεντική, η πρώτη που στάλθηκε από τον πλανήτη Άρη, ενώ η φωτογραφία στα αριστερά εμφανίστηκε λίγα λεπτά αργότερα - και φυσικά αυτή δόθηκε

στη δημοσιότητα - μετά από επεξεργασία της πρώτης, επεξεργασία που αποδόθηκε στη “διόρθωση των αρχικών μηχανικών προβλημάτων απόδοσης χρώματος ”. :-)

Αλγόριθμοι *Βελτίωσης Εικόνας* χρησιμοποιούνται για να τονίσουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της



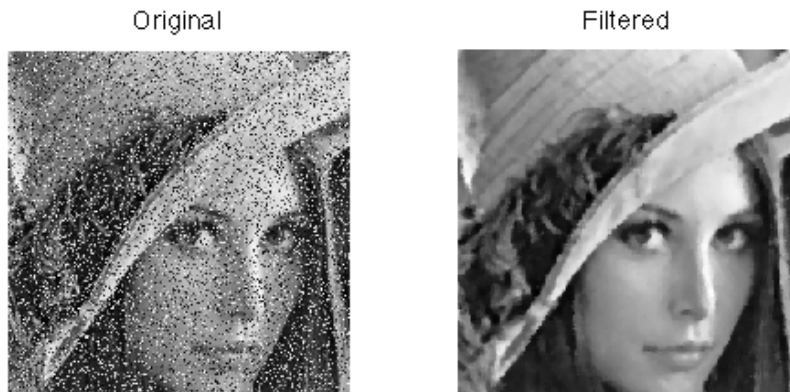
(α') Εικόνα 1

(β') Εικόνα 2

Σχήμα 1.6: Φωτογραφίες από τον Άρη

εικόνας, για να βελτιώσουν την ποιότητα της εικόνας, ή για βοηθήσουν στην ανάλυση της εικόνας για περαιτέρω εξαγωγή χαρακτηριστικών. Αυτοί περιλαμβάνουν μεθόδους για βελτίωση αντίθεσης, ανίχνευση ακμών, “ακόνισμα”, γραμμικό και μη γραμμικό φιλτράρισμα, μεγέθυνση, και αφαίρεση θορύβου. Ένας πολύ απλός αλγόριθμος, που στηρίζεται στο median filter, και μπορεί να αφαιρέσει θόρυβο τύπου “αλατιού και πιπεριού” (salt and pepper noise) φαίνεται στο Σχήμα 1.7. Μπορείτε να κρίνετε οι ίδιοι την απόδοσή του. :-) Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για εξουδετέρωση ή μείωση υποβάθμισης της εικόνας, όπως το θόλωμα (blurring) ή η διαταραχή λόγω του περιβάλλοντος ή του συστήματος καταγραφής, είναι γνωστοί ως *Αποκατάσταση Εικόνας*. Η *Ανακατασκευή Εικόνας από προβολές* αφορά την κατασκευή μιας δισδιάστατης εικόνας - “φέτας ” από ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, λαμβάνοντας υπόψη έναν αριθμό από προβολές που προέρχονται από διαφορετικές γωνίες. Κατασκευάζοντας έναν αριθμό από συνεχόμενες “φέτες ”, μπορεί να δημιουργηθεί μια τρισδιάστατη εικόνα που δείχνει το περιεχόμενο του αντικειμένου. Η *Ανάλυση Εικόνας* αναλαμβάνει να αναπτύξει μια ποσοτική περιγραφή και ταξινόμηση ενός ή περισσότερων αντικειμένων σε μια εικόνα. Η *Κωδικοποίηση Εικόνας* αναλαμβάνει να μειώσει τον συνολικό αριθμό από bits σε μια εικόνα, χωρίς καμιά υποβάθμιση στην ποιότητά της. Ο τομέας *Επεξεργασίας Εικόνας* είναι αρκετά ανεπτυγμένος και στο τμήμα μας, με αρκετά μαθήματα σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο (ΗΥ471, ΗΥ571, ΗΥ576), σε συνδυασμό με μαθήματα Υπολογιστικής Όρασης (Computer Vision). Κλείνοντας, ενα μικρό, ενδιαφέρον, παρασκήνιο σχετικά με την εικόνα στο Σχήμα 1.7, είναι το εξής: η φωτογραφία αυτή λήφθηκε το Νοέμβρη του 1972, και έκτοτε δημοσιεύεται τακτικά σε επιστημονικά papers, ως εικόνα πάνω στην οποία εφαρμόζονται διάφοροι αλγόριθμοι, ενώ υπάρχει σε όλα τα κλασικά βιβλία *Επεξεργασίας Εικόνας*, για τον ίδιο λόγο. Το όνομά της κυρίας είναι Lenna. Μια αναζήτηση στο Google σχετικά με *Lenna Story* θα σας εκπλήξει, όσον

αφορά την προέλευσή της - για λόγους που θα σας γίνουν προφανείς όταν το κάνετε, δεν μπορούμε να πουμε εδώ περισσότερα... ;-)



Σχήμα 1.7: Αφαίρεση θορύβου (πριν και μετά)

### 1.3.8 Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

Από τις σημαντικότερες εφαρμογές της Επεξεργασίας Σήματος. Η βάση των τηλεπικοινωνιών, στο χαμηλότερο επίπεδο (το περίφημο physical layer - φυσικό επίπεδο, που θα δείτε στο μάθημα των Δικτύων), στηρίζεται πραγματικά σε όσα μαθαίνετε στο ΗΥ215, ειδικότερα οι αναλογικές (που πλέον δεν είναι πολύ δημοφιλείς :-)) επικοινωνίες. Σίγουρα όλοι έχετε ακούσει για τη ραδιοφωνία AM και FM (κυρίως). Δείτε πόσο απλή είναι η θεωρία πίσω από αυτούς τους τρόπους μετάδοσης.

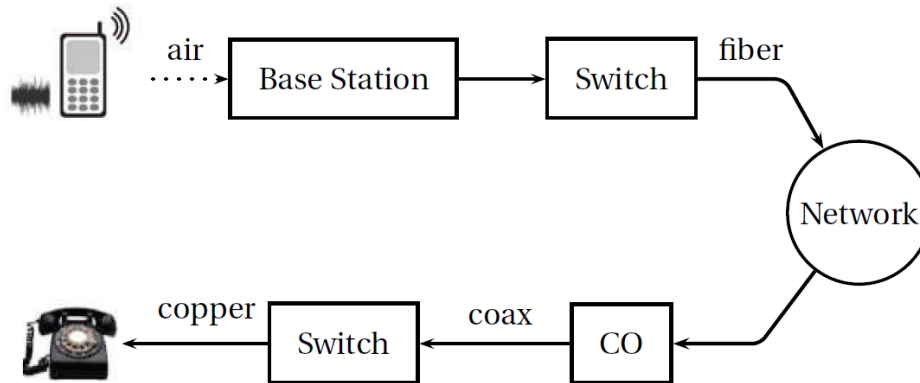
Κατ' αρχάς να πούμε ότι τα αρχικά AM και FM προέρχονται από τις λέξεις Amplitude Modulation-Διαμόρφωση Πλάτους, και Frequency Modulation-Διαμόρφωση Συχνότητας. Έστω  $m(t)$  το σήμα πληροφορίας που θέλουμε να στείλουμε (μπορεί να είναι οτιδήποτε, όχι απαραίτητα τηλεφωνική κλήση). Η μαθηματική αναπαράσταση – δεν ήθελα να γράψω μαθηματικά σε αυτό το εισαγωγικό κείμενο, αλλά ο πειρασμός είναι μεγάλος :-Δ – των δυο αυτών τρόπων μετάδοσης, δηλ. το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης (το ραδιόφωνό σας, εν προκειμένω), δίνεται ως:

$$y_{AM} = (1 + k_{AM}m(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

$$y_{FM} = A_c \cos(2\pi f_c t + k_{PM} \int m(u) du)$$

Οι σταθερές  $k_{AM}$ ,  $k_{PM}$ , και η συχνότητα  $f_c$  ως μη σας απασχολούν εν προκειμένω. Αυτό που αξίζει να δείτε είναι ότι το μήνυμα  $m(t)$  στην πρώτη περίπτωση (AM) “αποθηκεύεται” στο πλάτος του συνημιτόνου, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (FM) “αποθηκεύεται” στη φάση του συνημιτόνου. Όταν λοιπόν ρυθμίζετε το κουμπί στο ραδιόφωνό σας, ουσιαστικά προσπαθείτε να το συντονίσετε στη συχνότητα  $f_c$  που βλέπετε παραπάνω. :-)

Η όλη τηλεπικοινωνιακή διαδικασία είναι αρκετά περίπλοκη στην πράξη. Ας δούμε ένα απλό, αναλογικό (όχι ψηφιακό) παράδειγμα εδώ, για να αποκαλυφθεί πού ακριβώς βοηθά η Επεξεργασία Σήματος στην όλη διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι κάνουμε μια κλήση από το κινητό μας τηλέφωνο σε ένα σταθερό τηλέφωνο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.8. Η ανθρώπινη φωνή είναι αναλογικό σήμα, οπότε πρέπει πρώτα



Σχήμα 1.8: Μια απλή τηλεφωνική κλήση: η επεξεργασία στα blocks γίνεται ψηφιακά ενώ η μεταφορά μεταξύ των blocks γίνεται αναλογικά

να μετατραπεί σε ψηφιακή μορφή απ' το κινητό τηλέφωνο, να γίνει μια επεξεργασία (κωδικοποίηση), και μετά θα σταλεί από τον πομπό ένα *αναλογικό*, ηλεκτρομαγνητικό σήμα στην την κεραία εκπομπής του.

<sup>1</sup> Το ραδιοκύμα θα ταξιδέψει μέσω του αέρα στο σταθμό βάσης, όπου και αποδιαμορφώνεται για να ανακτηθεί το σήμα φωνής (ή οποιοδήποτε σήμα στέλνουμε, εικόνα, βίντεο, κλπ - τα μοντέρνα κινητά έχουν αυτή τη δυνατότητα). Η κλήση, ως ψηφιακό σήμα, συνεχίζει να ταξιδεύει μέσα από ένα διακόπτη ηλεκτρικών σημάτων και μπαίνει ως είσοδος σε μια οπτική ίνα ως *αναλογικό σήμα φωτός*. Το κύμα ταξιδεύει τώρα μέσα στο δίκτυο και η διαδικασία αντιστρέφεται μέχρι να παραχθεί ο αναλογικός ήχος στο ακουστικό του δέκτη.

Τα συστήματα επικοινωνιών είναι αρκετά πιο περίπλοκα στην πράξη, όπως είπαμε. Παράγοντες όπως η εξασθένιση του σήματος, ο θόρυβος του καναλιού μετάδοσης/επικοινωνίας, το είδος του καναλιού, και άλλοι, παίζουν σημαντικό ρόλο στην ευρωστία της επικοινωνίας. Όλα αυτά έχουν μελετηθεί και μοντελοποιηθεί κατάλληλα, έτσι ώστε κάθε επικοινωνία να μπορεί να προσομοιωθεί σε Η/Υ προτού εφαρμοστεί. Μελέτη αλλά και σχεδιασμός τέτοιων συστημάτων μπορείτε να δείτε στα μαθήματα ΗΥ330, ΗΥ430, ΗΥ431, ΗΥ530, όπου και ίσως έχετε την ευκαιρία να σχεδιάσετε το δικό σας σύστημα κυψελοειδούς (κινητής) τηλεφωνίας. :-)

<sup>1</sup>Ναι, καλά (ίσως) το μαντέψατε. :-) Ένα αναλογικό ή ψηφιακό σήμα μπορεί να μεταδοθεί με αναλογικά ή ψηφιακά μέσα. Δεν υπάρχει κάποια δέσμευση του ενός απέναντι στο άλλο.



## 1.4 I.T.E - Ινστιτούτο Πληροφορικής - Συνεργασίες

Όλοι οι παραπάνω θεματικοί τομείς δεν είναι ανεξάρτητοι. Είναι όλοι υπό την αιγίδα του - ήδη αναφερθέντος σε κάποιες παραγράφους - Εργαστηρίου Πολυμέσων (Multimedia Informatics Lab) του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών, πληροφορίες για το οποίο μπορείτε να βρείτε εδώ - λίγο outdated αλλά θα το φτιάξουμε :-). Το εργαστήριο αυτό είναι σε στενή συνεργασία με το Εργαστήριο Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων (Telecommunications and Networks Lab - T.N.L)<sup>2</sup> του Ινστιτούτου Πληροφορικής (Institute of Computer Science - I.C.S), του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας (I.T.E - Foundation for Research and Technology Hellas - FO.R.T.H). Το I.T.E αποτελεί το κορυφαίο ερευνητικό ίδρυμα στην Ελλάδα και ένα από τα πιο αναγνωρισμένα στην Ευρώπη. Μέσω του T.N.L, μπορείτε (σε προχωρημένο προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο) να δουλέψετε σε πραγματικά σπουδαία ερευνητικά projects, Ελληνικής και Ευρωπαϊκής χρηματοδότησης. Επίσης, το I.C.S συνεργάζεται συχνά μέσω των μελών του με εταιρίες του ιδιωτικού τομέα (France Telecom, SAGEM, British Telecom, FORTHnet, GRnet, Google κ.α.), πράγμα ιδιαίτερα ενθαρρυντικό για γνωριμίες και μετέπειτα επαγγελματική σταδιοδρομία. Αλλά προς το παρόν, δεν πρέπει να σας απασχολούν αυτά - πρέπει πρώτα να περάσετε το ΗΥ215 (και να πάρετε και πτυχίο)... :-)

## 1.5 Κλείνοντας...

Η Επεξεργασία Σήματος και οι τεχνικές της έχουν ήδη προκαλέσει επαναστατικές προόδους σε κάποια πεδία εφαρμογών. Ένα εξέχον παράδειγμα είναι στην περιοχή των Τηλεπικοινωνιών, όπου η Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (που θα τη δείτε στο μάθημα ΗΥ370-Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων :-)), σε συνδυασμό με τη Μικροηλεκτρονική, και την μετάδοση δεδομένων μέσω Οπτικών Ινών, άλλαξαν τη φύση των επικοινωνιών. Μια παρόμοια επίδραση μπορεί κανείς να αναμένει και σε άλλους τομείς. Πράγματι, η Επεξεργασία Σήματος ήταν, είναι, και θα είναι ένας τομέας που ευδοκιμεί σε νέες εφαρμογές. Οι ανάγκες ενός νέου πεδίου εφαρμογών μπορούν να καλυφθούν από γνώσεις που προέρχονται από άλλα πεδία, αλλά συχνά οι νέες εφαρμογές χρειάζονται νέους αλγόριθμους και νέα συστήματα υλικού που θα τους υλοποιούν. Για παράδειγμα, παλαιότερα, εφαρμογές της Σεισμολογίας, των Ραντάρ, και των Επικοινωνιών, έδωσαν τη βάση για την ανάπτυξη νέων τεχνικών σε διαφορετικούς τομείς. Σίγουρα, η Επεξεργασία Σήματος θα παραμείνει στην καρδιά των εφαρμογών στην Εθνική Άμυνα, στη διασκέδαση, στις επικοινωνίες, στην ιατρική φροντίδα και διάγνωση. Πρόσφατα, είδαμε εφαρμογές επεξεργασίας σήματος σε τομείς τόσο διαφορετικούς μεταξύ τους όπως τα Οικονομικά και η Ανάλυση Ακολουθιών DNA.

Αν και είναι δύσκολο να προβλέπει κανείς που θα αναπτυχθεί έδαφος για νέες εφαρμογές, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι θα είναι εμφανείς σε αυτούς που θα είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι να τις αναγνωρίσουν. Το κλειδί για την ετοιμότητα κάποιου να λύσει νέα προβλήματα επεξεργασίας σήματος είναι - και πάντα ήταν - η σε βάθος κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών των Σημάτων και Συστημάτων (κάτι μας

<sup>2</sup>Το οποίο πρόσφατα διασπάστηκε σε δυο - μέσα από το TNL προέκυψε το **Εργαστήριο Επεξεργασίας Σήματος** (Signal Processing Laboratory, για το οποίο μπορείτε να διαβάσετε εδώ), όπου και ανήκουμε πια.

θυμίζει έ; :-) ).

## 1.6 Επίλογος

Αυτός είναι και ο σκοπός αυτού του μαθήματος. Να σας δώσει τους θεμέλιους αυτούς λίθους για να σταδιοδρομήσετε στο σχετικό τομέα του ενδιαφέροντός σας! Είναι σίγουρο ότι όλα όσα διαβάσατε σας κάνουν ανυπόμονους να τα δείτε όλα αυτά στην πράξη – εδώ υπάρχει ένα μάλλον όχι τόσο ευχάριστο νέο για σας, που κρατήσαμε επίτηδες για το τέλος: δε θα δείτε σχεδόν τίποτα από όλα τα παραπάνω στο μάθημα αυτό. :- ( Τουλάχιστον όχι σε όσο βάθος και λεπτομέρεια θα θέλατε, παρά μόνο κάποια από αυτά, επιδερμικά. Το μάθημα αυτό είναι το πρώτο σκαλοπάτι. Κοιτάζοντάς το, δεν προμηνύει κάτι τρομερά ενδιαφέρον αλλά χωρίς αυτό δε θα μπορέσετε ΠΟΤΕ να φτάσετε στους “ορόφους”, που διαβάσατε παραπάνω. Κι αυτοί υπάρχουν στο τμήμα, σε μαθήματα επιλογής Ε3 και Ε7 κυρίως. Στο ΗΥ215 κάνετε το πρώτο βήμα, και κάθε ταξίδι ξεκινά με ένα και μόνο βήμα. Καλό ταξίδι λοιπόν στα μονοπάτια των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Μηχανικούς! <sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Από το επόμενο κεφάλαιο και πέρα, θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε –όχι τα ανεξήγητα :- ) – κάποια κομμάτια της ύλης του μαθήματος ΗΥ215 που χρειάζονται προσοχή. Το μάθημα είναι μάθημα μηχανικού, οπότε πρέπει κάποια πράγματα να καταλάβετε ότι δεν είναι ξερά μαθηματικά. Πρέπει να δείτε τι σημαίνουν, πως ερμηνεύονται, πώς επεκτείνονται, και πως συνδέονται μεταξύ τους. Εδώ λοιπόν θα διαβάσετε γι’ αυτά τα θέματα... Να σημειωθεί ότι ΔΕΝ πρόκειται για μια ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ περιγραφή της ύλης, δεν είναι δηλαδή ένα σετ σημειώσεων. Επίσης, δεν περιλαμβάνει ΟΛΑ όσο πρέπει να προσέξετε στο μάθημα (δεν είναι τα SOS δηλαδή :-) ), ούτε μπορεί κανείς να διαβάσει ΜΟΝΟ αυτά και όχι τη θεωρία στο μάθημα. Οι σημειώσεις αυτές έχουν ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ χαρακτήρα και απλά θα βοηθήσουν να κατανοήσετε καλύτερα αυτά που διαβάζετε στο μάθημα. Ας ξεκινήσουμε!! :-)

## Κεφάλαιο 2

# Εισαγωγή στα Σήματα και τα Συστήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε ορισμένα βασικά θέματα των σημάτων. Επιπλέον, θα εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες και ποιοτικές εξηγήσεις του “πώς και γιατί” της θεωρίας συστημάτων, χτίζοντας έτσι ένα στερεό υπόβαθρο κατανόησης της ποσοτικής ανάλυσης που ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια.

### 2.1 Σήματα

Ένα **σήμα** δεν είναι τίποτα άλλο από ένα σύνολο από πληροφορίες ή από δεδομένα. Μερικά παραδείγματα περιλαμβάνουν ένα τηλεφωνικό ή τηλεοπτικό σήμα, τις μηνιαίες πωλήσεις μιας εταιρίας, ή τις ημερήσιες τιμές μιας μετοχής του χρηματιστηρίου. Σε όλα αυτά τα παραδείγματα, τα σήματα είναι συναρτησεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής: του χρόνου. Αυτό δεν είναι κανόνας – όταν ένα ηλεκτρικό σήμα διατρέχει το ανθρώπινο σωμα, το σήμα είναι η πυκνότητα του φορτίου, που είναι συνάρτηση του χώρου παρά του χρόνου. Σε αυτό το μάθημα, θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά σήματα που είναι συναρτησεις του χρόνου.

### 2.2 Συστήματα

Τα σήματα μπορούν να επεξεργαστούν περαιτέρω από **συστήματα**, τα οποία μπορούν να τροποποιήσουν ή να εξάγουν πληροφορία από αυτά. Ένα σύστημα επεξεργάζεται ένα σύνολο από σήματα (είσοδοι) και δίνει ένα σύνολο από άλλα σήματα (έξοδοι). Ένα σύστημα μπορεί να αποτελείται από φυσικά στοιχεία, όπως ηλεκτρικά, μηχανικά, ή υδραυλικά συστήματα (υλοποίηση σε υλικό), ή από έναν αλγόριθμο που υπολογίζει την έξοδο από ένα σήμα εισόδου (υλοποίηση σε λογισμικό).

## 2.3 Μέγεθος Σήματος

Το μέγεθος μιας οντότητας είναι ένας αριθμός που δείχνει τη δύναμη της οντότητας. Εν γένει, το πλάτος ενός σήματος αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Πώς γίνεται ένα σήμα που υπάρχει μόνο σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, και το πλάτος του μεταβάλλεται, να μετρηθεί με έναν αριθμό που θα μας υποδεικνύει το μέγεθός του ή τη δύναμή του; Ένας τέτοιος αριθμός πρέπει να λαμβάνει υπόψη του όχι μόνο το πλάτος αλλά και τη διάρκεια του σήματος. Για παράδειγμα, αν χρειάζεται να επινοήσουμε έναν αριθμό  $V$  ως μέτρο του μεγέθους ενός ανθρώπου, πρέπει όχι μόνο να συμπεριλάβουμε το πλάτος (την περιφέρειά του), αλλά και το ύψος του. Απλοποιώντας τα πράγματα, αν υποθέσουμε ότι το σχήμα ενός ανθρώπου είναι ένας κύλινδρος με μεταβαλλόμενη ακτίνα  $r$  (η οποία μεταβάλλεται με το ύψος  $h$ ), τότε ένας εύλογος αριθμός που μετρά το μέγεθος ενός ανθρώπου ύψους  $H$  είναι ο όγκος του,

$$V = \pi \int_0^H r^2(h) dh \quad (2.1)$$

### 2.3.1 Ενέργεια Σήματος

Σκεφτομενοι με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε την περιοχή κάτω από το σήμα  $f(t)$  ως μια πιθανή μετρική του μεγέθους του σήματος, επειδή λαμβάνει υπόψη του όχι μόνο το πλάτος αλλά και τη διάρκεια του σήματος. Όμως μια τέτοια μετρική θα ήταν ελαττωματική. Γιατί; Διότι ένα μεγάλης διάρκειας σήμα μπορεί να έχει περιοχές πάνω από τον άξονα και περιοχές κάτω από τον άξονα που αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα η μετρική να μας δηλώνει ότι πρόκειται για μικρού μεγέθους σήμα. Αυτή η δυσκολία μπορεί να ξεπεραστεί αν ορίσουμε το μέγεθος του σήματος ως την περιοχή κάτω από την καμπύλη  $f^2(t)$ , η οποία είναι πάντα θετική. Αυτή η μετρική λέγεται **ενέργεια σήματος**,  $E_f$ , και ορίζεται ως

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

για μιγαδικά σήματα, ενώ για πραγματικά σήματα, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (2.3)$$

Κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί και άλλες μετρικές, όπως η περιοχή κάτω από την  $|f(t)|$ . Η μετρική που επιλέξαμε όμως είναι όχι μόνο πιο εύκολη να υπολογιστεί αλλά και έχει περισσότερο νόημα (όπως θα φανεί στη συνέχεια), γιατί είναι ενδεικτική της ενέργειας που μπορεί να εξαχθεί από το σήμα.

### 2.3.2 Ισχύς Σήματος

Η ενέργεια ενός σήματος πρέπει να είναι πεπερασμένος αριθμός ώστε να έχει νόημα. Μια αναγκαία συνθήκη για αυτό είναι το πλάτος του σήματος να τείνει στο 0 όταν  $|t| \rightarrow \infty$ . Αλλιώς, το ολοκλήρωμα 2.3 δε συγκλίνει.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν το πλάτος του σήματος δεν τείνει στο 0 όταν  $|t| \rightarrow \infty$ , η ενέργεια

του σήματος είναι άπειρη. Τότε, μια μετρική με περισσότερο νόημα όσον αφορά το μέγεθος του σήματος θα ήταν η χρονική μέση τιμή της ενέργειας, αν υπάρχει. Αυτή η μετρική λέγεται **ισχύς σήματος**. Για ένα πραγματικό σήμα  $f(t)$ , ορίζουμε την ισχύ,  $P_f$ , ως

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (2.4)$$

και φυσικά μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω σχέση και για μιγαδικά σήματα ως

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (2.5)$$

Παρατηρήστε ότι η ισχύς του σήματος  $P_f$  είναι η μέση τιμή του πλάτους του σήματος στο τετράγωνο. Η μέση τιμή μιας οντότητας σε ένα μεγάλο διάστημα που πλησιάζει το άπειρο υπάρχει αν η οντότητα είναι είτε περιοδική είτε έχει στατιστική κανονικότητα. Αν μια τέτοια συνθήκη δεν ικανοποιείται, η τιμή αυτή μπορεί να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, το σήμα  $f(t) = t$  αυξάνει συνεχώς όσο  $t \rightarrow \infty$ , και ούτε η ενέργεια ούτε η ισχύς ορίζεται για αυτό το σήμα.

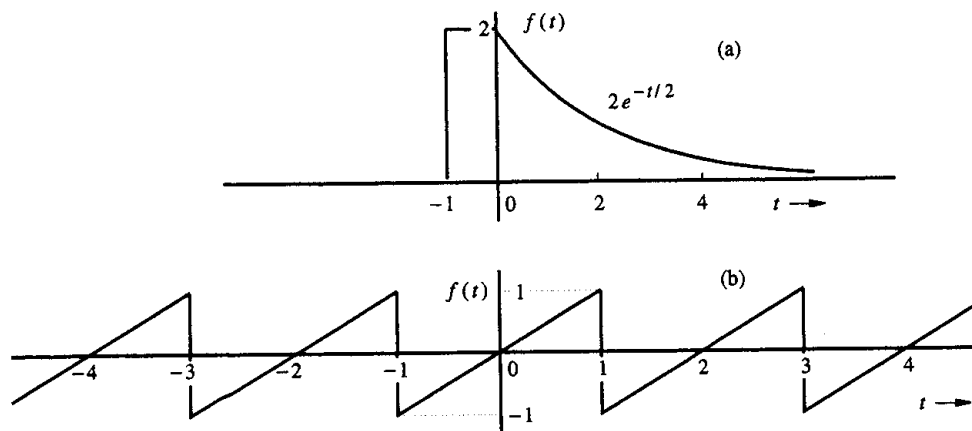
Προσέξτε, οι μετρικές της ενέργειας και της ισχύος που ορίσαμε δεν έχουν μονάδα μέτρησης (όπως ίσως θα περιμένατε), γιατί δεν τις ορίσαμε με βάση την έννοια που γνωρίζετε από τη Φυσική. Οι μονάδες ενέργειας και ισχύος, όπως ορίστηκαν εδώ, εξαρτώνται από τη φύση του σήματος  $f(t)$ . Αν το  $f(t)$  είναι ένα σήμα τάσης, προφανώς η ενέργεια έχει μονάδες μέτρησης  $V^2s$  (Volts στο τετράγωνο επί seconds), και η ισχύς του έχει μονάδες μέτρησης  $V^2$  (Volt στο τετράγωνο). Αν το σήμα  $f(t)$  είναι σήμα έντασης, οι μονάδες αυτές θα είναι  $A^2s$  (Ampere στο τετράγωνο επί seconds) και  $A^2$  (Ampere στο τετράγωνο), αντίστοιχα. Στα πλαίσια του μαθήματος δε θα μας απασχολήσουν τόσο οι μονάδες μέτρησης, μια και η ενέργεια και η ισχύς ενός σήματος θα έχουν την πιο... αφηρημένη :- ) έννοια που ορίσαμε παραπάνω.

#### Παράδειγμα:

Βρείτε τις κατάλληλες μετρικές μεγέθους των σημάτων που φαινόνται στο Σχήμα 2.1. Στο σχήμα 2.1(α), το πλάτος του σήματος τείνει στο μηδέν, όσο  $|t| \rightarrow \infty$ . Έτσι, μια κατάλληλη μετρική του μεγέθους του είναι η ενέργειά του.

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-1}^0 2^2 dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8 \quad (2.6)$$

Στο σχήμα 2.1(β), το πλάτος του σήματος ΔΕΝ τείνει στο μηδέν, όσο το  $|t| \rightarrow \infty$ . Όμως είναι περιοδικό, και έτσι υπάρχει η ισχύς του. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 2.4 για να βρούμε την ισχύ του, αλλά μπορούμε να απλοποιήσουμε τη διαδικασία για περιοδικά σήματα, απλά παρατηρώντας ότι ένα περιοδικό σήμα επαναλαμβάνεται περιοδικά (κάθε 2 δευτερολεπτα, εν προκειμένω). Έτσι, το να βρούμε τη μέση τιμή του  $f^2(t)$  σε ένα άπειρο διάστημα είναι όμοιο με το να βρούμε τη μέση τιμή σε μια



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα Σημάτων Ενέργειας - Ισχύος

μόνο περίοδο. Έτσι,

$$P_f = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \quad (2.7)$$

που είναι και το ζητούμενο.

#### Παράδειγμα:

Βρείτε την ισχύ των παρακάτω σημάτων:

1.  $f(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$
2.  $f(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$
3.  $f(t) = D e^{j\omega_0 t}$

Θα είναι

1. Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Η πιο βολική μετρική για αυτό το σήμα είναι η ισχύς του. Επειδή το σήμα είναι περιοδικό, μπορούμε να υπολογίσουμε την ισχύ του μετρώντας την ενέργειά του σε μια περίοδο  $T_0$ . Όμως, θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τον ορισμό, για να δείτε πως δουλεύει. Είναι

$$\begin{aligned} P_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με  $C^2/2$ . Επίσης, ο δεύτερος όρος είναι μηδέν, γιατί το ολοκλήρωμα αναπαριστά ένα εμβαδό κάτω από το ημίτονο σε πολύ ένα μεγάλο διάστημα  $T$ , με  $T \rightarrow \infty$ . Αυτό το εμβαδό είναι το πολύ ίσο με το εμβαδό της μισής περιόδου, λόγω των ακυρώσεων μεταξύ

των θετικών και αρνητικών περιοχών του ημιτόνου. Ο δεύτερος ορος είναι αυτό το εμβαδό πολλαπλασιασμένο με  $C^2/2T$ , με  $T \rightarrow \infty$ . Είναι ξεκάθαρο ότι αυτός ο ορος είναι μηδέν, άρα

$$P_f = \frac{C^2}{2} \quad (2.9)$$

Αυτό μας δείχνει ότι ένα ημίτονο με πλάτος  $C$  έχει ισχύ  $C^2/2$ , άσχετα με την τιμή της συχνότητας  $\omega_0$  (φυσικά πρέπει  $\omega_0 \neq 0$ ) και της φάσης  $\theta$ . Σε περίπτωση που  $\omega_0 = 0$ , δείξτε εσείς – εξάσκηση! :- ) – ότι η ισχύς είναι ίση με  $C^2$ .

2. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} P_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)]^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \theta_2) dt \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2C_1 C_2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2) dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

Τα δυο πρώτα ολοκληρώματα είναι οι ισχείς των δυο συνημιτόνων, άρα είναι ίσα με  $C_1^2/2$  και  $C_2^2/2$ , μια και το δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Όμοια με το πρώτο ερώτημα, βλέπουμε ότι το τρίτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, άρα<sup>1</sup>

$$P_f = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} \quad (2.11)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευτεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων με διακριτές συχνότητες

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \theta_n) \quad (2.12)$$

και τότε η ισχύς θα είναι

$$P_f = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \quad (2.13)$$

3. Σε αυτήν την περίπτωση, το σήμα είναι μιγαδικό, και άρα θα έχουμε

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |De^{j\omega_0 t}|^2 dt \quad (2.14)$$

Όμως ισχύει ότι  $|e^{j\omega_0 t}| = 1$ , και έτσι  $|De^{j\omega_0 t}|^2 = |D|^2$  και τέλος

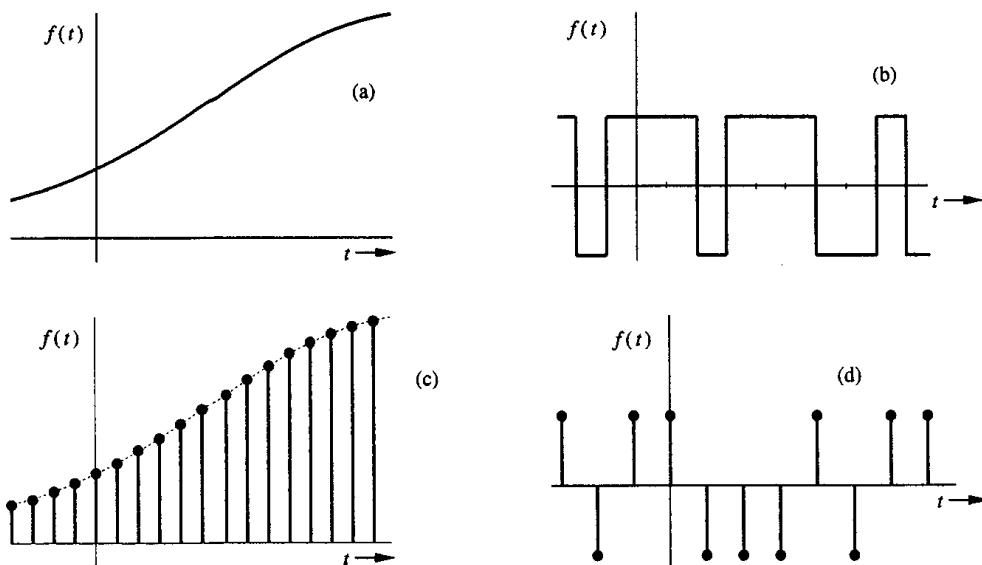
$$P_f = |D|^2 \quad (2.15)$$

<sup>1</sup> Αυτό ισχύει μόνον αν  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Τι συμβαίνει όταν  $\omega_1 = \omega_2$ ; :-)

## 2.4 Ταξινόμηση Σημάτων

Υπάρχουν πολλές κατηγορίες σημάτων. Εδώ θα θεωρήσουμε μόνο τις παρακάτω κατηγορίες, που μας ενδιαφέρουν άμεσα:

1. Συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά και ψηφιακά σήματα
3. Περιοδικά και απεριοδικά σήματα
4. Σήματα ισχύος και ενέργειας
5. Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά σήματα



Σχήμα 2.2: Παρδειγματα σημάτων: a) αναλογικό, συνεχούς χρόνου, b) ψηφιακό, συνεχούς χρόνου, c) αναλογικό, διακριτού χρόνου, d) ψηφιακό, διακριτού χρόνου

### 2.4.1 Συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου σήματα

Ένα σήμα που ορίζεται για κάθε τιμή του  $t$  είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου, και ένα σήμα που ορίζεται μόνο για διακριτές τιμές του  $t$  είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου. Το τηλεφωνικό σήμα, το σήμα μιας βιντεοκάμερας, καθώς και το τηλεοπτικό σήμα<sup>2</sup> είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Το ετήσιο ΑΕΠ σε μια εικοσαετία, οι μηνιαίες πωλήσεις μιας επιχείρησης, και οι ημερήσιες διακυμάνσεις των μετοχών είναι σήματα διακριτού χρόνου.

<sup>2</sup>Πριν τη Digea :-)



### 2.4.2 Αναλογικά και ψηφιακά σήματα

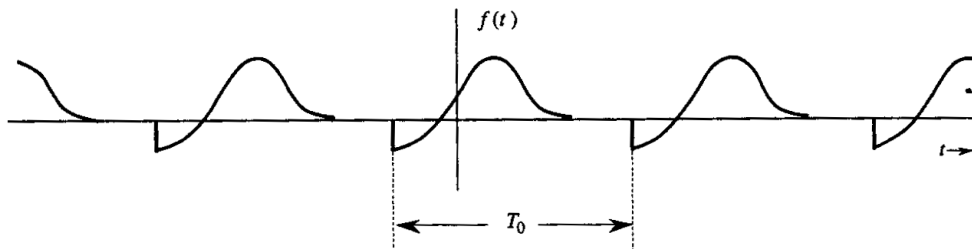
Η έννοια του αναλογικού σήματος συχνά μπερδεύεται με αυτήν του συνεχούς χρόνου. Ένα σήμα του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε ένα συνεχές διάστημα είναι ένα *αναλογικό* σήμα. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος ενός αναλογικού σήματος μπορεί να πάρει άπειρες τιμές. Ένα *ψηφιακό* σήμα, απ' την άλλη, είναι εκείνο του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών. Ένα ψηφιακό σήμα του οποίου το πλάτος μπορεί να πάρει από  $M$  τιμές, ονομάζεται  $M$ -αδικό σήμα. Το δυαδικό σήμα ( $M = 2$ ) είναι μια υποπερίπτωση του  $M$ -αδικού σήματος. Οι όροι σήμα συνεχούς χρόνου και διακριτού χρόνου διακρίνουν τη φύση του σήματος κατά μήκος του οριζώντιου άξονα (χρόνος). Οι όροι αναλογικό και ψηφιακό σήμα διακρίνουν τη φύση του σήματος κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα (πλάτος). Έτσι, είναι ξεκάθαρο ότι ένα αναλογικό σήμα δεν είναι απαραίτητα διακριτού χρόνου, και ένα ψηφιακό σήμα δεν είναι απαραίτητα διακριτού χρόνου. Το σχήμα 2.2 δείχνει μερικά ενδεικτικά σήματα διαφόρων κατηγοριών. Στα πλαίσια του μαθήματος θα μας απασχολήσουν κατά κανόνα σήματα συνεχούς χρόνου.

### 2.4.3 Περιοδικά και απεριοδικά σήματα

Ένα σήμα  $x(t)$  λέγεται *περιοδικό* αν για μια σταθερά  $T_0$  ισχύει

$$x(t) = x(t + T_0), \quad \forall t \quad (2.16)$$

Η μικρότερη τιμή του  $T_0$  που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται *περίοδος* του σήματος. Ένα σήμα είναι απεριοδικό όταν δεν είναι περιοδικό. Εξ' ορισμού, ένα περιοδικό σήμα παραμένει αμετάβλητο όταν μετακινηθεί στο χρόνο κατά  $T_0$ . Γι' αυτό, ένα περιοδικό σήμα πρέπει να ξεκινάει από το  $-\infty$ . Έτσι, εξ' ορισμού ένα περιοδικό σήμα πρέπει να ξεκινάει από το  $t = -\infty$  και να συνεχίζεται για πάντα. Προφανώς, τέτοια σήματα δεν υπάρχουν στη φύση ούτε μπορούν να δημιουργηθούν τεχνητά. Ένα περιοδικό σήμα φαίνεται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Περιοδικό σήμα με περίοδο  $T_0$

#### 2.4.4 Σήματα Ισχύος και Ενέργειας

Ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια λέγεται *σήμα ενέργειας*, ενώ ένα σήμα με πεπερασμένη και μη μηδενική ισχύ λέγεται *σήμα ισχύος*. Παρατηρήστε ότι ένα σήμα δεν μπορεί να είναι και σήμα ενέργειας και σήμα ισχύος ταυτόχρονα. Ένα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ και ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια (προκύπτει απ' τους ορισμούς που έχουμε δώσει). Όμως, υπάρχουν και σήματα που δεν είναι ούτε σήματα ενέργειας ούτε σήματα ισχύος. Το σήμα  $x(t) = t$  είναι ένα τέτοιο σήμα. Φυσικά, στην πράξη δεν υπάρχουν σήματα ισχύος, όλα τα σήματα που μπορούμε να δημιουργήσουμε είναι σήματα ενέργειας.

#### 2.4.5 Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά σήματα

Ένα σήμα του οποίου η φυσική περιγραφή είναι πλήρως γνωστή, είτε σε μαθηματική μορφή είτε σε γραφική μορφή, λέγεται *ντετερμινιστικό* σήμα. Ένα σήμα που δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς αλλά είναι γνωστό μόνο μέσω πιθανοτικής περιγραφής, όπως η μέση τιμή, η διασπορά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κλπ, λέγεται *στοχαστικό* ή *τυχαίο* σήμα.

### 2.5 Χρήσιμες απλές ιδιότητες σημάτων

Εδώ θα συζητήσουμε τρεις χρήσιμες ιδιότητες των σημάτων: ολίσθηση, κλιμάκωση, και αντιστροφή.

#### 2.5.1 Χρονική Ολίσθηση

Θεωρήστε το σήμα  $f(t)$  του σχήματος 2.4 και το ίδιο σήμα καθυστερημένο κατά  $T$  δευτερόλεπτα, το οποίο συμβολίζουμε με  $\phi(t)$ . Ό,τι συμβαίνει στο σήμα  $f(t)$ , συμβαίνει και στο σήμα  $\phi(t)$  με καθυστέρηση  $T$  δευτερόλεπτα. Άρα

$$\phi(t + T) = f(t) \quad (2.17)$$

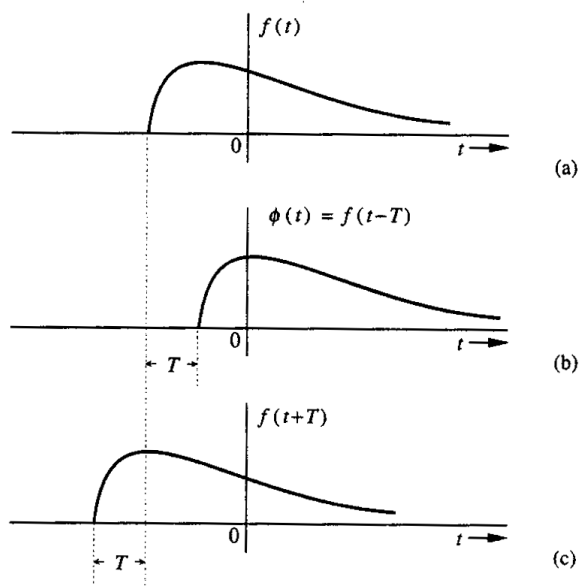
και

$$\phi(t) = f(t - T) \quad (2.18)$$

Έτσι, για να ολισθήσουμε χρονικά ένα σήμα κατά  $T$ , αντικαθιστούμε το  $t$  με το  $t - T$ . Έτσι, το  $f(t - T)$  αντιπροσωπεύει το  $f(t)$ , έχοντας υποστεί ολίσθηση κατά  $T$  δευτερόλεπτα. Αν το  $T$  είναι θετικό, η ολίσθηση είναι προς τα δεξιά (καθυστέρηση), αλλιώς η ολίσθηση είναι προς τα αριστερά (προήγηση). Έτσι, το  $f(t - 2)$  είναι το  $f(t)$  καθυστερημένο κατά 2 δευτερόλεπτα, και το  $f(t + 2)$  είναι το  $f(t)$  που προηγείται 2 δευτερόλεπτα. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

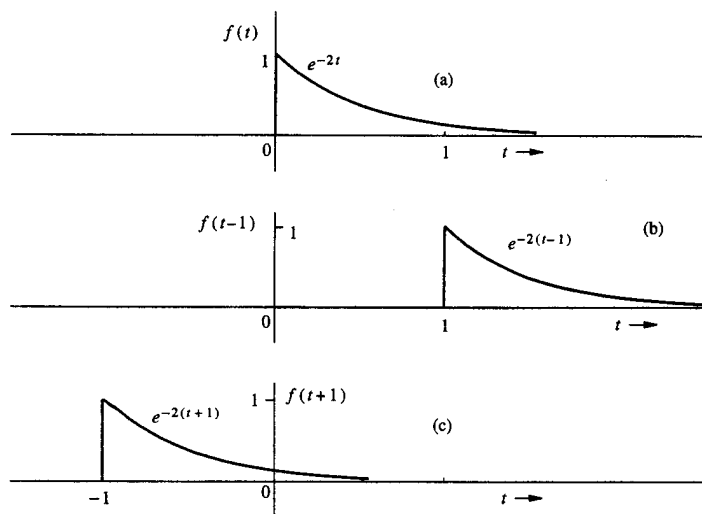
Παράδειγμα:

Μια εκθετική συνάρτηση  $f(t) = e^{-2t}$  που φαίνεται στο σχήμα 2.5 καθυστερεί κατά 1 δευτερόλεπτο. Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά την ολισθημένη συνάρτηση. Επαναλάβετε αν η  $f(t)$  προηγείται



Σχήμα 2.4: Χρονική ολίσθηση ενός σήματος

κατά 1 δευτερόλεπτο.



Σχήμα 2.5: Παράδειγμα χρονικής ολίσθησης ενός σήματος: a) σήμα  $f(t)$ , b)  $f(t)$  καθυστερημένο κατά 1 δευτερόλεπτο, c)  $f(t)$  προηγούμενο κατά 1 δευτερόλεπτο

Η συνάρτηση του σήματος μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά ως

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Έστω ότι  $f_d(t) = f(t - 1)$  είναι η καθυστερημένη συνάρτηση (μετατοπισμένη προς τα δεξιά) κατά 1 δευτερόλεπτο, όπως στο σχήμα 2.5. Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστώντας όπου  $t$  το  $t - 1$ . Άρα

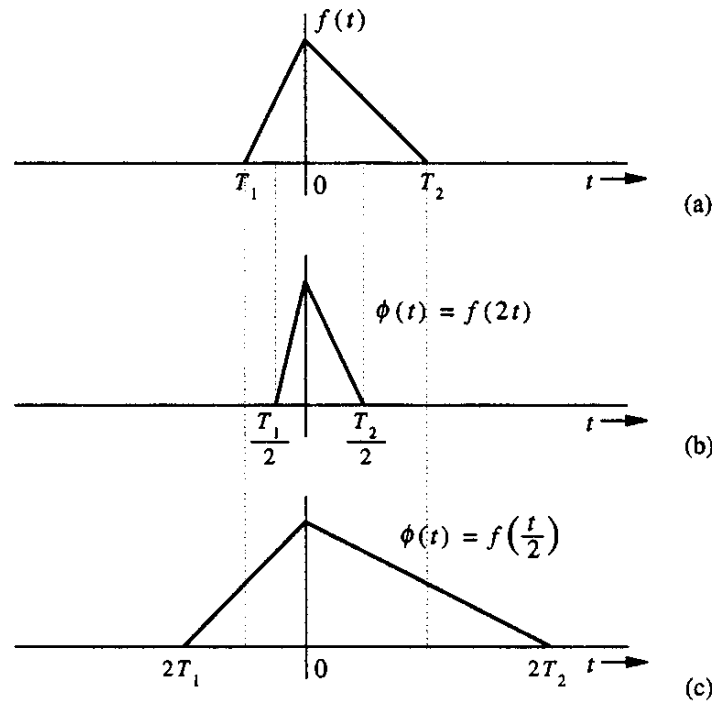
$$f(t) = \begin{cases} e^{-2(t-1)}, & t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \\ 0, & t - 1 < 0 \Leftrightarrow t < 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Έστω ότι  $f_a(t) = f(t + 1)$  είναι η συνάρτηση που προηγείται (μετατόπιση προς τα αριστερά) κατά 1 δευτερόλεπτο, όπως στο σχήμα 2.5. Η μαθηματική της περιγραφή προκύπτει αντικαθιστώντας το  $t$  με το  $t + 1$ . Άρα

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2(t+1)}, & t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1 \\ 0, & t + 1 < 0 \Leftrightarrow t < -1 \end{cases} \quad (2.21)$$

### 2.5.2 Χρονική Κλιμάκωση

Η συμπίεση ή η διαστολή ενός σήματος στο χρόνο είναι γνωστή ως χρονική κλιμάκωση. Θεωρήστε το σήμα  $f(t)$  του σχήματος 2.6. Το σήμα  $\phi(t)$  είναι το  $f(t)$  συμπιεσμένο στο χρόνο με παράγοντα 2.



Σχήμα 2.6: Χρονική κλιμάκωση ενός σήματος

Έτσι, ό,τι συμβαίνει στο σήμα  $f(t)$  σε κάποιο χρόνο  $t$ , επίσης συμβαίνει στο  $\phi(t)$  αλλά σε χρόνο  $t/2$ , έτσι ώστε

$$\phi(t/2) = f(T) \quad (2.22)$$

και

$$\phi(t) = f(2t) \quad (2.23)$$

Παρατηρήστε ότι επειδή  $f(t) = 0$  στο  $t = T_1$  και  $T_2$ , πρέπει να έχουμε επίσης  $\phi(t) = 0$  στο  $t = T_1/2$  και  $T_2/2$ , όπως στο σχήμα 2.6(b). Αν το  $f(t)$  ήταν γραμμένο σε μια μαγνητοταινία, την οποία παίζαμε σε διπλάσια ταχύτητα, τότε θα είχαμε το  $f(2t)$ . Εν γένει, αν το  $f(t)$  είναι συμπιεσμένο στο χρόνο κατά ένα παράγοντα  $a > 1$ , το αποτέλεσμα θα είναι ένα  $\phi(t)$  τέτοιο ώστε

$$\phi(t) = f(at) \quad (2.24)$$

Με παρόμοιο συλλογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι το  $f(t)$  αν επεκταθεί στο χρόνο κατά έναν παράγοντα  $a > 1$  δίνεται ως

$$\phi(t) = f\left(\frac{t}{a}\right) \quad (2.25)$$

Το σχήμα 2.6(c) δείχνει το  $f(t)$  διασταλμένο κατά ένα παράγοντα 2. Παρατηρήστε ότι κατά τη χρονική κλιμάκωση, η αρχή των αξόνων  $t = 0$  είναι το σημείο αναφοράς, που παραμένει αμετάβλητο, γιατί στο  $t = 0$  ισχύει  $f(t) = f(at) = f(0)$ .

Συνοψίζοντας, για να κάνουμε χρονική κλιμάκωση ενός σήματος κατά ένα παράγοντα  $a$ , αντικαθιστούμε το  $t$  με το  $at$ . Αν  $a > 1$ , η κλιμάκωση μετατρέπεται σε χρονική συμπίεση, ενώ αν  $a < 1$ , η κλιμάκωση γίνεται χρονική διαστολή.

#### Παράδειγμα:

Το σχήμα 2.7(a) δείχνει ένα σήμα  $f(t)$ . Σχεδιάστε και περιγράψτε μαθηματικά το συμπιεσμένο κατά παράγοντα 3 σήμα. Επαναλάβετε για το διεσταλμένο κατά παράγοντα 2 σήμα.

Το σήμα  $f(t)$  μπορεί να περιγραφεί ως

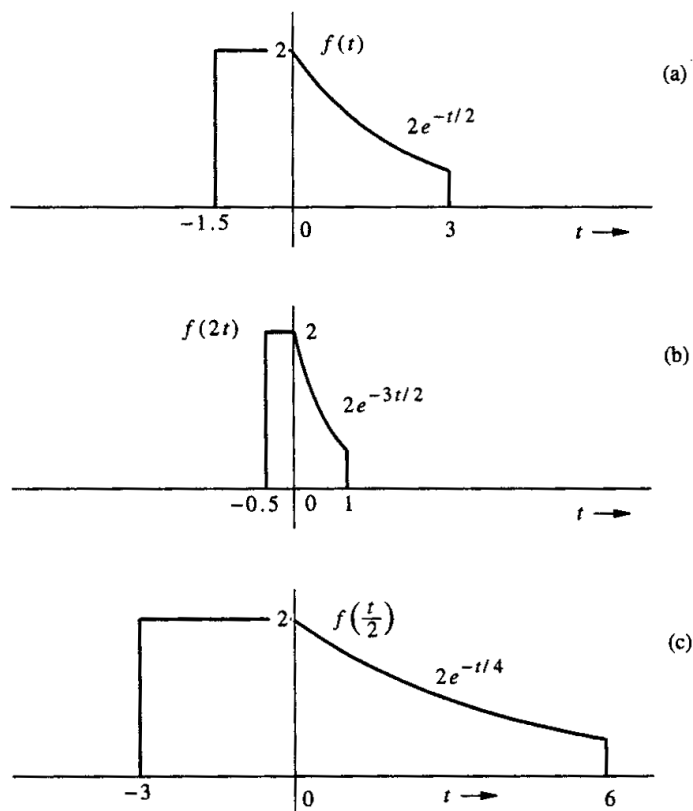
$$f(t) = \begin{cases} 2, & -1.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2}, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.26)$$

Το σχήμα 2.7(b) δείχνει το σήμα  $f_c(t)$ , που είναι συμπιεσμένο κατά παράγοντα 3. Κατά συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως  $f(3t)$ , που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το  $t$  με το  $3t$ , έτσι:

$$f_c(t) = \begin{cases} 2, & -1.5 \leq 3t < 0 \Leftrightarrow -0.5 \leq t < 0 \\ 2e^{-3t/2}, & 0 \leq 3t < 3 \Leftrightarrow 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.27)$$

Παρατηρήστε ότι τις χρονικές στιγμές  $t = -1.5$  και  $t = 3$  στο  $f(t)$  ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές  $t = -0.5$  και  $t = 1$  στο συμπιεσμένο σήμα  $f(3t)$ .

Το σχήμα 2.7(c) δείχνει το σήμα  $f_e(t)$ , που είναι το  $f(t)$  με χρονική διαστολή κατά παράγοντα 2. Κατά συνέπεια, μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως  $f(t/2)$ , που προκύπτει αντικαθιστώντας το  $t$  με



Σχήμα 2.7: Παράδειγμα χρονικής κλιμάκωσης ενός σήματος

το  $t/2$ . Έτσι:

$$f_e(t) = f(t/2) = \begin{cases} 2, & -1.5 \leq t/2 < 0 \Leftrightarrow -3 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/4}, & 0 \leq t/2 < 3 \Leftrightarrow 0 \leq t < 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.28)$$

Παρατηρήστε ότι τις χρονικές στιγμές  $t = -1.5$  και  $t = 3$  στο  $f(t)$  ανταποκρίνονται στις χρονικές στιγμές  $t = -3$  και  $t = 6$  στο συμπιεσμένο σήμα  $f(t/2)$ .

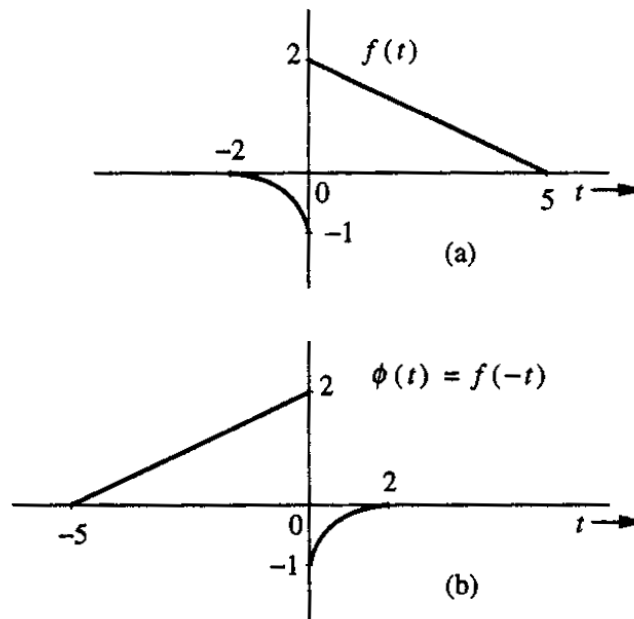
### 2.5.3 Χρονική Αντιστροφή

Θεωρήστε το σήμα  $f(t)$  του σχήματος 2.8(a). Για να αντιστρέψουμε χρονικά το  $f(t)$ , περιστρέψουμε κατά 180 μοίρες γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Αυτή η αντιστροφή μας δίνει το  $\phi(t)$  του σχήματος 2.8(b). Παρατηρήστε ότι ό,τι συμβαίνει στο σχήμα 2.8(a) σε ένα χρονικό σημείο  $t$  συμβαίνει στο σχήμα 2.8(b) στο χρονικό σημείο  $-t$ . Έτσι

$$\phi(-t) = f(t) \quad (2.29)$$

και

$$\phi(t) = f(-t) \quad (2.30)$$

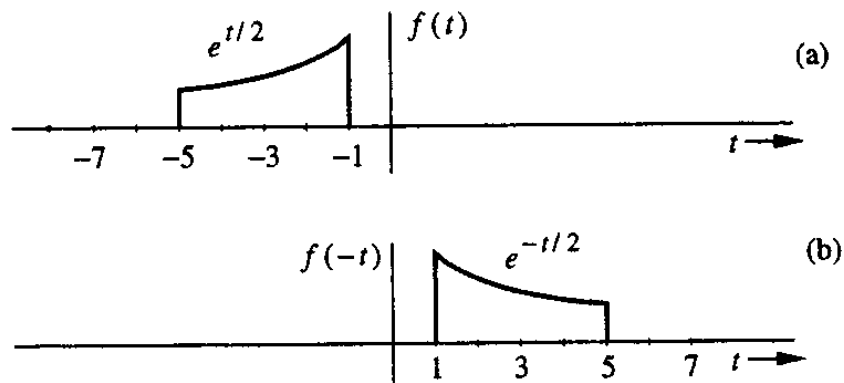


Σχήμα 2.8: Χρονικής αντιστροφής ενός σήματος

Άρα, για να αντιστρεφουμε χρονικά ένα σήμα, αντικαθιστούμε το  $t$  με το  $-t$ . Έτσι, η αντιστροφή χρόνου του  $f(t)$  μας δίνει το  $f(-t)$ .

Παράδειγμα:

Για το σήμα του σχήματος 2.9(a), σχεδιάστε το  $f(-t)$ , που είναι το ανεστραμμένο  $f(t)$ .



Σχήμα 2.9: Παράδειγμα χρονικής αντιστροφής ενός σήματος

Τις χρονικές στιγμές  $-1$  και  $-5$  του  $f(t)$  αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές  $1$  και  $5$  στο  $f(-t)$ . Επειδή  $f(t) = e^{t/2}$ , έχουμε  $f(-t) = e^{-t/2}$ . Το σήμα  $f(-t)$  φαίνεται στο σχήμα 2.9(b). Μπορούμε να

περιγράψουμε τα σήματα ως μαθηματικά ως

$$f(t) = \begin{cases} e^{t/2}, & -1 \leq t < 5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.31)$$

και η αντεστραμμένη έκδοση του  $f(t)$ , δηλ. το  $f(-t)$  προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το  $t$  με το  $-t$  στο  $f(t)$  ως

$$f(-t) = \begin{cases} e^{-t/2}, & -1 \leq -t < 5 \Leftrightarrow 1 \leq t < 5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (2.32)$$



## Κεφάλαιο 3

# Σειρές Fourier

### 3.1 Εισαγωγικά

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο που (πρέπει να :-)) διαβάσατε πριν φτάσετε εδώ, αναφερθήκαμε σε πολλά πράγματα. Είδαμε το “δένδρο” της επεξεργασίας σήματος, με αυτό το μάθημα ως “ρίζα” και “κορμό” (αν και θα μπορούσαμε να πούμε ότι το επόμενο του, το ΗΥ370, είναι ο κορμός – σίγουρα πάντως το ΗΥ215 είναι η ρίζα :-)), και τους διάφορους τομείς που αναφέρθηκαν ως “κλαδιά”, που στα άκρα τους φέρουν πολύχρωμα “φρούτα”, τις πρακτικές εφαρμογές.

#### 3.1.1 Γιατί Σειρές Fourier;

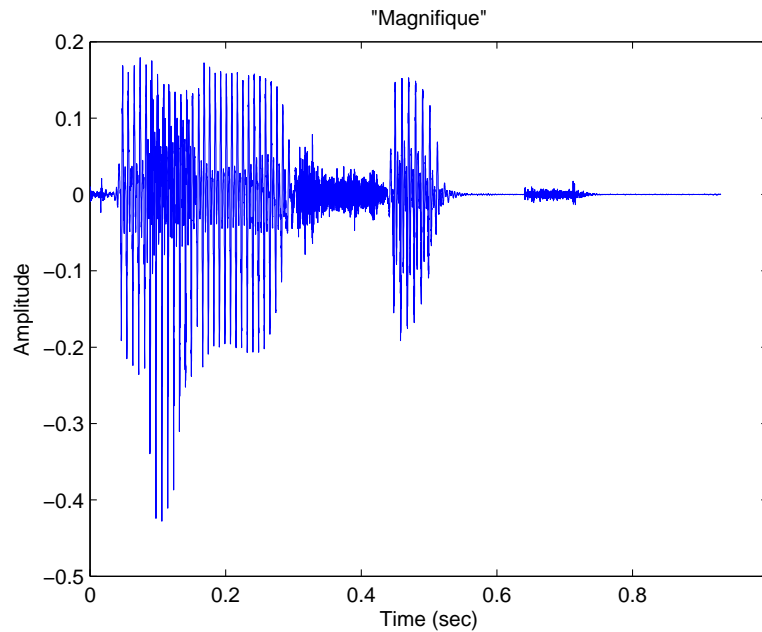
Ένα ερώτημα όμως που ΔΕΝ απαντήσαμε είναι ΓΙΑΤΙ χρησιμοποιούμε “βαριά” (λέμε τώρα :-P) μαθηματικά για να φτάσουμε σε όλες αυτές τις εφαρμογές. Αφ’ ενός, γιατί δεν έχουμε βρει κανένα πιο εύκολο τρόπο (δεν έχουμε κανένα βίτσιο να ασχολούμαστε με ολοκληρώματα σώνει και καλά :-)), αφ’ ετέρου γιατί η χρήση τους παρέχει ένα πανίσχυρο πλαίσιο ανάλυσης και “τυποποίησης” των μεθόδων που χρησιμοποιούνται. Δεν πειστήκατε; Θα σας δώσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. :-)

Μόλις λίγες σελίδες μετά, θα διαβάσετε για την *ανάλυση σε Σειρές Fourier*, που – αν δεν το έχετε ήδη ακούσει στο μάθημα – είναι απλά μια μέθοδος αλλαγής οπτικής γωνίας :-). Ναι, τόσο απλά! Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δούμε ένα σήμα, μια κυματομορφή, σε έναν διαφορετικό χώρο, το χώρο των *συχνοτήτων*. Το πώς, θα το διαβάσετε παρακάτω. Το ΓΙΑΤΙ όμως είναι το ερώτημα, όπως προείπαμε, και το παρακάτω παράδειγμα πιστεύω θα σας πείσει.

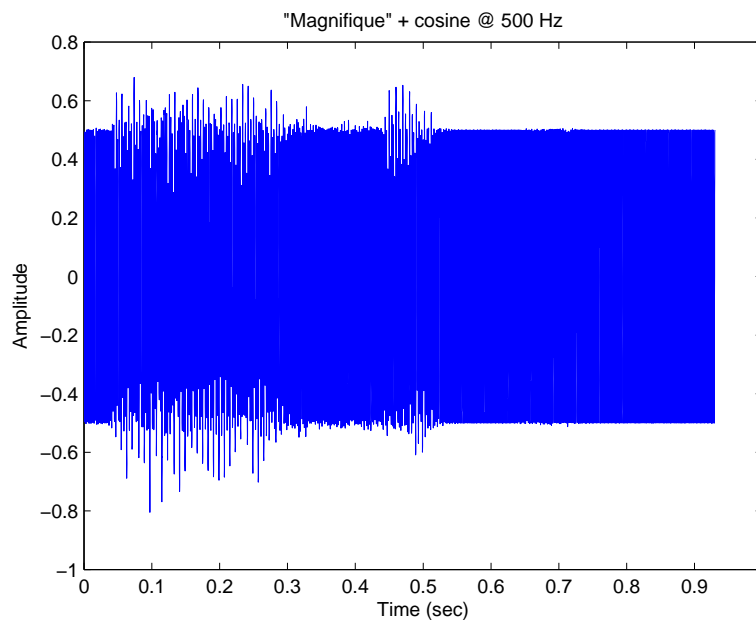
Έστω ότι έχουμε ένα σήμα φωνής όπως αυτό του σχήματος 3.1. Πρόκειται για τη Γαλλική λέξη *magnifique*. :-) Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο λόγο, ένα ισχυρό ημίτονο πλάτους 0.5, των 500 Hz (θυμηθείτε, 500 Hz σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο, το ημίτονο έχει επαναλάβει τη βασική του περίοδο 500 φορές) προστίθεται στο σήμα φωνής, και το οποίο ημίτονο θεωρείται ως ανεπιθύμητο, δηλαδή ως “θόρυβος”<sup>1</sup>. Το αποτέλεσμα στο χώρο του χρόνου φαίνεται στο σχήμα 3.2. Όπως μπορείτε να δείτε,

---

<sup>1</sup>Το παράδειγμα αυτό δεν απέχει απ’ την πραγματικότητα – στα αεροπλάνα, όταν βγαίνει μια ανακοίνωση από τα μικρόφωνα του πιλοτηρίου, ακούγεται πάνω στη φωνή του πιλότου ένα ημίτονο στα 400 Hz, λόγω του ότι η ηλεκτρική ισχύς είναι στα 400 Hz, εν αντιθέσει με τα σπίτια μας, που είναι 50 – 60 Hz... φαντάζομαι ότι μέχρι σήμερα βέβαια θα



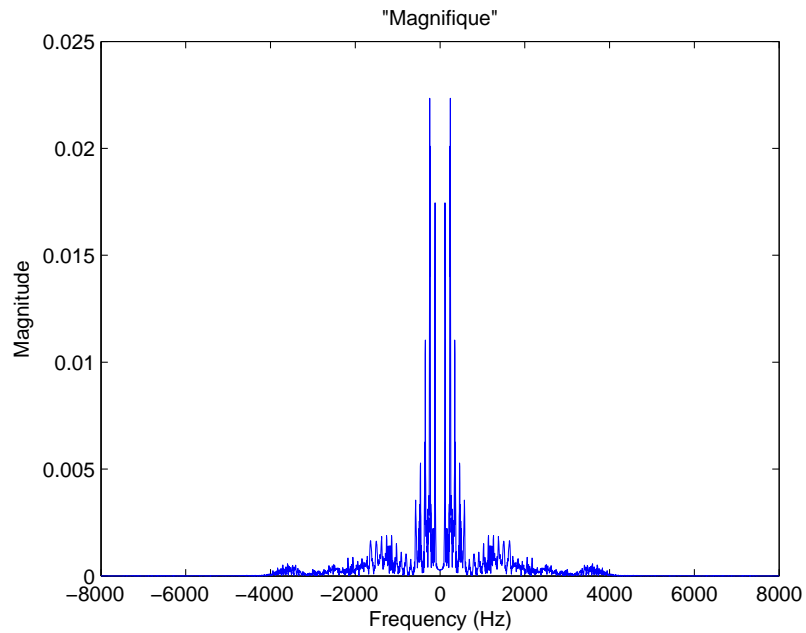
Σχήμα 3.1: Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου



Σχήμα 3.2: Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου με προστιθέμενο ημίτονο στα 500 Hz

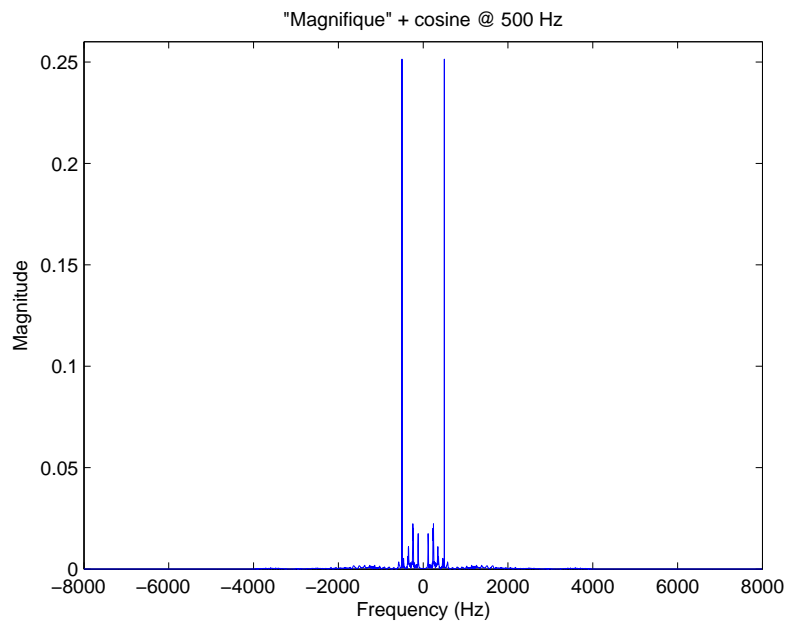
είναι τρομερά δύσκολο στην πράξη να ξεχωρίσουμε/ανακτήσουμε το σήμα μας στο πεδίο του χρόνου, μια και φαίνεται να έχει θαφτεί μέσα στο “θόρυβο” του συνημιτόνου. ΟΜΩΣ, αν χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που θα μάθετε στο μάθημα, δηλαδή την όψη του πεδίου της συχνότητας, τότε για το καθαρό το έχουν φτιάξει... :-P

σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του σχήματος 3.3 ενώ για το “αλλοιωμένο” σήμα, θα έχετε το διάγραμμα



Σχήμα 3.3: Σήμα Φωνής στο πεδίο των συχνοτήτων

του σχήματος 3.4. Παρατηρήστε δυο πράγματα:



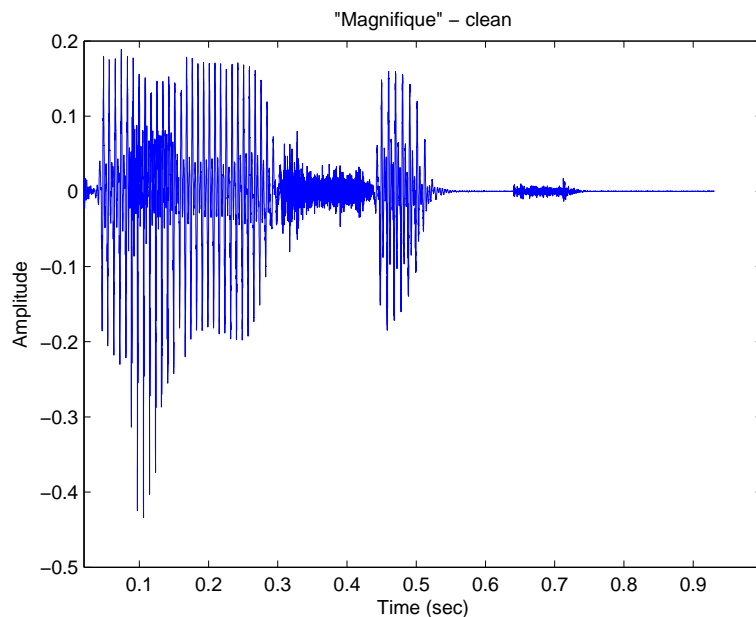
Σχήμα 3.4: Αλλοιωμένο σήμα Φωνής στο πεδίο των συχνοτήτων

1. Ο οριζόντιος άξονας είναι πλέον η συχνότητα στα διαγράμματα 3.3, 3.4, και όχι πια ο χρόνος.

Πρόκειται για ΑΚΡΙΒΩΣ τα ίδια σήματα των διαγραμμάτων 3.1, 3.2, μόνο που τα βλέπουμε σε έναν άλλο χώρο, αυτόν των συχνοτήτων. Το γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν αυτό το σχήμα, όπως επίσης και γιατί έχουμε αυτές τις “εξωτικές ” αρνητικές συχνότητες :-), θα το μάθετε στην πορεία.

2. Προσέξτε επίσης την αλλαγή της κλίμακας στα διαγράμματα αυτά. Επιπλέον, στο διάγραμμα 3.4 παρατηρούμε ότι γύρω στα  $\pm 500$  Hz υπάρχει μια ισχυρή συνιστώσα, η οποία μοιάζει εκτός της ομαλότητας που παρατηρούμε στο σχήμα 3.3. Σίγουρα λοιπόν αυτή η μεγάλη κατακόρυφη “γραμμή” οφείλεται στο ημίτονο που προστεθηκε μετά. ;- ) Το υπόλοιπο σήμα είναι το ίδιο ανάμεσα στα δυο γραφήματα, απλά έχει αλλάξει η κλίμακα για να “χωρέσουν” στο σχήμα οι συνιστώσες των 500 Hz.

Βλέπουμε λοιπόν τώρα ότι αυτός ο νέος χώρος, ο χώρος των συχνοτήτων είναι πολύ πιο βοηθητικός στην προσπάθειά μας να ανακτήσουμε το σήμα μας. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να μηδενίσουμε την τιμή 0.25 που φαίνεται στα  $\pm 500$  Hz. Έτσι, θα μπορέσουμε να εξαφανίσουμε το ενοχλητικό σήμα, και να κρατήσουμε μόνο το “χρήσιμο” σήμα. Πράγματι, αν μηδενίσουμε αυτή τη συχνότητα, και αντιστρέψουμε τη διαδικασία πίσω στο χρόνο, θα πάρουμε το σχήμα 3.5!



Σχήμα 3.5: Καθαρισμένο Σήμα Φωνής

Ποιός ήταν ο σκοπός όλου αυτού του – υπεραπλουστευμένου, είναι η αλήθεια – παραδείγματος; Ο σκοπός συνοψίζεται στην εξής παρατήρηση: *Αν μπορούσαμε να έχουμε ένα μαθηματικό εργαλείο που μας μετατρέπει ένα οποιοδήποτε σήμα στο χώρο του χρόνου σε ένα αντίστοιχο στο χώρο των συχνοτήτων, δηλ. θα μπορούσε να μας γράψει το όποιο σήμα  $x(t)$  ως συνάρτηση ημιτόνων κάποιων συγκεκριμένων συχνοτήτων (η οποία μπορεί να παρασταθεί γραφικά όπως στο σχήμα 3.3 ή στο σχήμα 3.4), τότε πολύ*

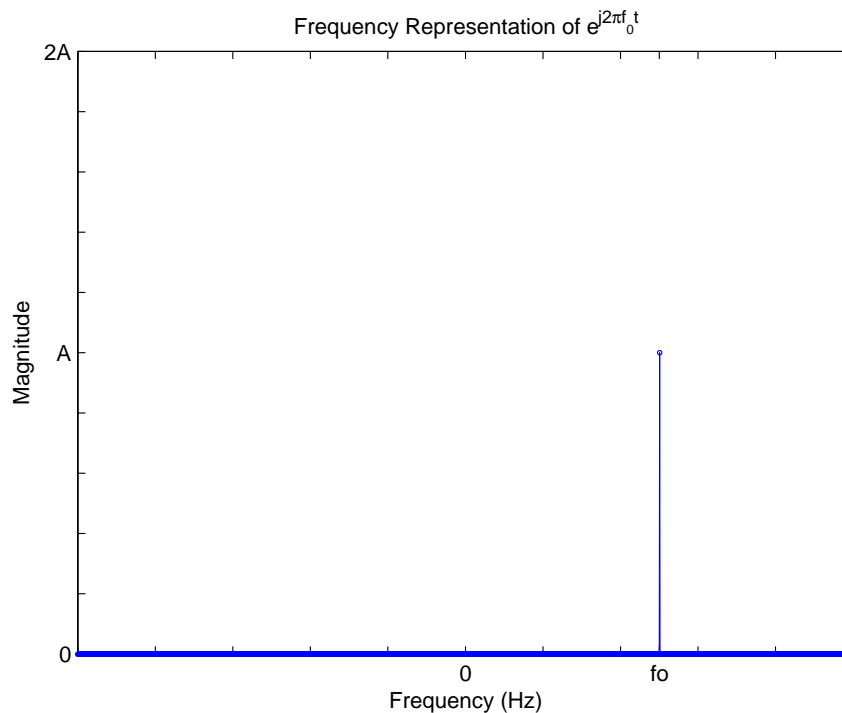
εύκολα θα μπορούσαμε να κάνουμε πράγματα που στο πεδίο του χρόνου θα ήταν αδύνατα! Το παραπάνω παράδειγμα, όπου απλά μηδενίζουμε μια συχνότητα (δηλ. μηδενίζουμε το πλάτος του αντίστοιχου ημιτόνου) η οποία είναι ανεπιθύμητη, είναι ΕΝΑ μόνο από τα χιλιάδες, όπου η αλλαγή χώρου μας λύνει τα χέρια. Ε, αυτό το μαθηματικό εργαλείο μας είναι ήδη γνωστό εδώ και πολλά χρόνια και δεν είναι άλλο από την **Ανάλυση Fourier**...<sup>2</sup>

### 3.1.2 Ένα απλό παράδειγμα

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να έχουμε μια γραφική παρασταση ενός σήματος στο χώρο των συχνοτήτων; Αυτό το ερώτημα είπαμε ότι ισοδυναμεί με το πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια μαθηματική έκφραση στο χώρο των συχνοτήτων ενός σήματος που μας δίδεται στο χρόνο. Η πιο απλή τέτοια αναπαράσταση φυσικά δεν είναι άλλη από του απλού μιγαδικού εκθετικού συχνοτήτας  $f_0$ :

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t} \quad (3.1)$$

Είναι ένα σήμα που ορίζεται στο χρόνο, με πλάτος  $A$ , και με συχνότητα  $f_0$ , η οποία είναι σταθερή. Οπότε, γι' αυτό το σήμα, το διάγραμμα στο χώρο της συχνότητας θα είναι όπως στο σχήμα 3.6. Δυο άξονες,



Σχήμα 3.6: Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης

με οριζόντιο τον άξονα των συχνοτήτων και κατακόρυφο τον άξονα του πλάτους, με μια κατακόρυφη

<sup>2</sup>Επειδή ίσως το σκεφτήκατε... αν το σήμα  $x(t)$  έχει από μόνο του πληροφορία στη συχνότητα  $\pm 500$  Hz πριν την πρόσθεση του ημιτόνου, τότε προφανώς αυτή η πληροφορία θα χαθεί με την παραπάνω διαδικασία, και άρα το σήμα που θα πάρουμε δε θα είναι ακριβώς ίδιο με το αρχικό.

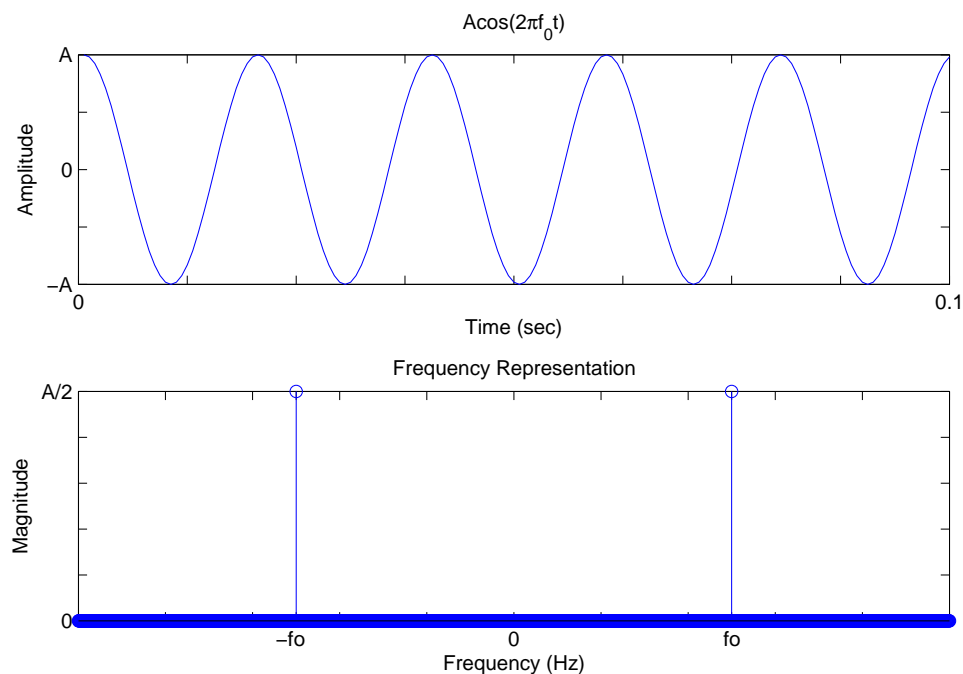
γραμμή στη συχνότητα  $f_0$ , ύψους  $A$ . Αυτή είναι η αναπαράσταση που ζητάμε! :-) Φυσικά το σήμα που επιλέξαμε μπορεί να είναι το απλούστερο που μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά δεν παύει να είναι ένα μιγαδικό σήμα! Αν είχαμε ένα πραγματικό σήμα όπως το

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (3.2)$$

τότε πώς θα σχεδιάζαμε αυτή τη γραφική αναπαράσταση; Πολύ απλά, γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \quad (3.3)$$

σύμφωνα με τους τύπους του Euler. Να λοιπόν που τώρα έχουμε ένα άθροισμα από δυο εκθετικά, οπότε θα έχουμε ένα διάγραμμα με δυο κατακόρυφες γραμμές. Μια στη συχνότητα  $-f_0$  και μια στη συχνότητα  $f_0$  Hz, με πλάτη  $A/2$ . Ας δούμε αυτά τα σχήματα μαζί, τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα, στο σχήμα 3.7. Θα θέλαμε φυσικά η πληροφορία που μας δίνεται από τη συχνοτική αναπαράσταση του



Σχήμα 3.7: Απλό παράδειγμα ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους

σήματος να είναι ισοδύναμη με αυτή του χρόνου. Στο παράδειγμά μας, είναι; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη συχνοτική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα ημίτονο; Η απάντηση είναι όχι. Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (3.4)$$

Άρα χρειάζεται με κάποιο τρόπο να αναπαριστούμε και τη φάση  $\phi$  ως συνάρτηση της συχνότητας. Οπότε, η πλήρης περιγραφή ενός ημιτόνου στο χώρο της συχνότητας περιλαμβάνει δυο διαγράμματα: ένα που αφορά το πλάτος ως συνάρτηση της συχνότητας (αυτό που έχουμε δει ως τώρα) ΚΑΙ ένα που αφορά τη φάση ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτές οι δυο αναπαραστάσεις λέγονται **φάσμα πλάτους** και **φάσμα φάσης**, αντίστοιχα. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Έστω το σήμα

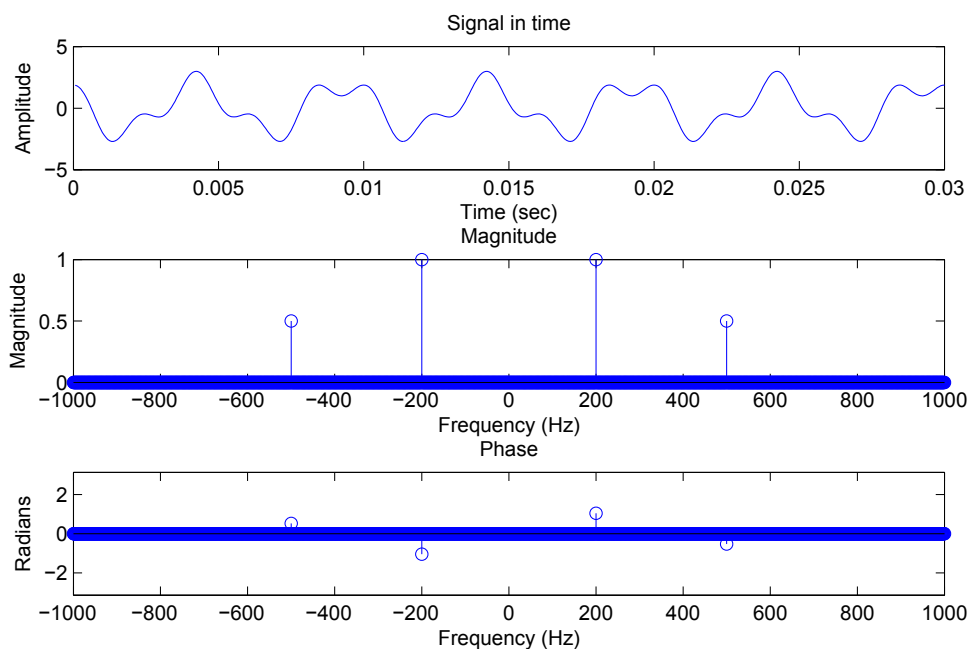
$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (3.5)$$

Προτού σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα, ας δούμε πως αναλύεται αυτό το σήμα. Είναι

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \quad (3.6)$$

$$= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/6} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/6} \quad (3.7)$$

Από αυτήν την αναπαράσταση, μας είναι ξεκάθαρο πώς να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης. Δείτε το σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Παράδειγμα ανάλυσης σήματος

Προφανώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης οποιωνδήποτε ημιτόνων ή συνδυασμού τους. Δεν καταλήγουν, προφανώς, όμως όλοι οι συνδυασμοί ημιτόνων σε περιοδικό σήμα. Για παράδειγμα, το παραπάνω σήμα  $x(t)$  είναι περιοδικό με θεμελιώδη συχνότητα  $f_0 = \text{M.K.}\Delta\{200, 500\} = 100 \text{ Hz}$ , και άρα περίοδο  $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$  δευτερόλεπτα. Όμως, το σήμα  $y(t) = \cos(2\pi 50t) - \sin(5t - \pi/4)$  ΔΕΝ είναι περιοδικό, γιατί δεν υπάρχει ο Μ.Κ.Δ των δυο συχνοτήτων. Εμείς όμως ενδιαφερο-

μαστε ιδιαίτερα για τα περιοδικά σήματα, σε πρώτη φάση. Όταν το σήμα που μας δίνεται είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου ημιτόνων, τότε μπορούμε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων του Euler, να το γράψουμε σε μορφή αθροίσματος ημιτόνων ή εκθετικών και να σχεδιάσουμε φάσματα πλάτους και φάσης σημάτων, όπως παραπάνω, άσχετα αν είναι το σήμα περιοδικό ή όχι.

### 3.1.3 Μόνο ημίτονα;

Όμως τα περιοδικά σήματα, όπως αυτό της σχέσης 3.5, έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα όταν τα αναπτύσουμε σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Αυτά τα εκθετικά έχουν συχνότητες που είναι ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας του σήματος! Είδατε ότι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος 3.5 είναι 100 Hz. Οι συχνότητες του σήματος είναι ακέραιες πολλαπλάσιες του 100, δηλ.  $\pm 200, \pm 500$ . Αυτό ακριβώς αντικατοπτρίζεται και στο φάσμα πλάτους και φάσης.

Τι γίνεται όμως αν το περιοδικό σήμα που μας δίνεται ΔΕΝ είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου/πηλίκου ημιτόνων; Αν είναι ένας περιοδικός τριγωνικός ή τετραγωνικός παλμός, πώς θα ενεργήσουμε; Πώς θα το αναλύσουμε σε εκθετικά σήματα, ώστε να δούμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο; Εδώ έρχεται η θεωρία της Ανάλυσης σε σειρές Fourier!

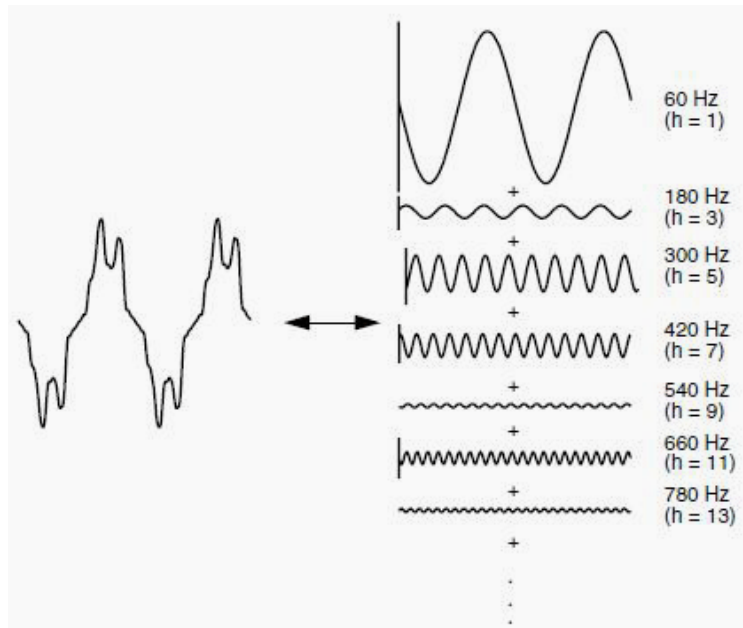
## 3.2 Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Η Ανάλυση Fourier είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το συχνοτικό τους περιεχόμενο, δηλ. για το ΠΟΙΕΣ συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το ΠΟΣΑ και ΠΟΙΑ ημίτονα (δηλ. με ποιο πλάτος, συχνότητα, και φάση) πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε. Ένα οπτικό παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 3.9. Χάρην ευκολίας, ξεκινάμε τη μελέτη μας από σήματα τα οποία λέγονται περιοδικά. Ασφαλώς γνωρίζετε τι είναι ένα περιοδικό σήμα και επίσης γνωρίζετε ότι περιοδικά σήματα, με την αυστηρή έννοια, στην πραγματικότητα ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ. Πουθενά στη φύση. :-) Οπότε γιατί ασχολούμαστε; Αφ' ενός για λόγους γενικότερης μελέτης, αφ' ετέρου γιατί κάποια κομμάτια απ'τη μελέτη τέτοιων σημάτων, καθώς και ο τρόπος σκέψης αυτής της μελέτης, μας είναι χρήσιμα στην πράξη.

Τι είναι λοιπόν η ανάλυση σε Σειρές Fourier; Όπως είπαμε, δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να γράφουμε ένα οποιοδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιοδήποτε :-)) περιοδικό σήμα ως ένα άθροισμα ημιτόνων. Ας πάμε λίγο στα μαθηματικά, για να αρχίσουμε να ξεδιαλύνουμε κάποια πράγματα... ένα περιοδικό σήμα  $x(t)$ , με περίοδο  $T_0$ , αναλύεται σε σειρά Fourier με χρήση των σχέσεων

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (3.8)$$





Σχήμα 3.9: Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt, \quad k \neq 0 \quad (3.9)$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt, \quad (3.10)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (3.11)$$

όπου  $X_k$  είναι οι περίφημοι συντελεστές Fourier, και την  $f_0$  τη λέμε *θεμελιώδη συχνότητα*, γιατί όλα τα εκθετικά στην εξίσωση (3.8) έχουν συχνότητες που είναι *ακέραιες πολλαπλάσιες* της  $f_0$ . Είδαμε λοιπόν εδώ πως γράφουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ μιγαδικών σημάτων. Μα ένα λεπτό. Πριν είπαμε ότι η ανάλυση Fourier μας αναλύει το σήμα σε ημίτονα. Μα φυσικά. Απ'τις γνωστές σχέσεις του Euler, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε εκθετική αναπαράσταση, που έχει προκύψει από ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ σήμα, σε ημιτονοειδή αναπαράσταση. Θυμηθείτε:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (3.12)$$

Άρα ουσιαστικά τα μιγαδικά εκθετικά είναι κι αυτά ημίτονα. :-) Ας ξεκινήσουμε τώρα τις παρατηρήσεις μας σχετικά με την ανάλυση σε σειρές Fourier...

1. Ας ξεκινήσουμε απ'το τελευταίο που αναφέραμε. ΟΛΕΣ οι συχνότητες της σχέσης (3.8) είναι ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΣ μιας συγκεκριμένης, της θεμελιώδους συχνότητας, που ορίζεται ως το αντίστροφο της περιόδου του σήματος.

2. Το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.9) λέει ότι για να βρούμε τους συντελεστές  $X_k$  κάθε εκθετικού πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το  $x(t)$  με τις περιφέρμες συναρτήσεις βάσης  $e^{-j2\pi k f_0 t}$  και να ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα σε μια περίοδο. Προσοχή! Σε μια οποιαδήποτε περίοδο του σήματος! Όχι απαραίτητα από 0 ως  $T_0$ ! Όποιο διάστημα θέλετε μπορείτε να βάλετε στα άκρα του ολοκληρώματος, όποιο σας βολεύει, ΑΡΚΕΙ να αποτελεί μια περίοδο του σήματος! Περισσότερα για τους συντελεστές Fourier σε επόμενη παρατήρηση...
3. Ίσως παρατηρήσατε ότι, για πραγματικά σήματα, το  $X_0$  εξ' ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά το εμβαδό μιας περιόδου του σήματος. Άρα το  $X_0$  είναι απλά η μέση τιμή του σήματος. Πραγματικός αριθμός ΠΑΝΤΑ, για πραγματικά σήματα!
4. Αντίθετα, οι συντελεστές  $X_k$ ,  $k \neq 0$  δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί, συνήθως μάλιστα είναι μιγαδικοί. Για το λόγο αυτό, οι συντελεστές  $X_k$  μπορούν να γραφούν σε πολική μορφή (μέτρο-φάση):

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} \quad (3.13)$$

Το  $|X_k|$  το λέμε μέτρο (είναι ΠΑΝΤΑ θετικό) και το  $\angle X_k$  το λέμε φάση του συντελεστή  $X_k$ . Η φάση ΠΑΝΤΑ εκφράζεται στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ . Υπάρχουν πολλές ιδιότητες σχετικά με τους συντελεστές  $X_k$  ανάλογα με το είδος του σήματος  $x(t)$ . Για παράδειγμα, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε ισχύει ότι  $X_k^* = X_{-k}$ , δηλ. οι συντελεστές για αρνητικά  $k$  είναι απλά οι συζυγείς συντελεστές των θετικών  $k$ . Προσοχή! Αυτό ισχύει μόνο για ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ, περιοδικά σήματα  $x(t)$ !

### 3.2.1 Ύπαρξη Σειράς Fourier

Είπαμε πιο πριν ότι μπορούμε να γράψουμε ΣΧΕΔΟΝ οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα Fourier. Ποιές είναι αυτές οι συνθήκες που καθορίζουν πότε μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό σήμα ως σειρά Fourier και πότε όχι; Προφανώς τα σήματα που δεν μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier πρέπει να έχουν ένα βαθμό "ανωμαλίας" :-). Αν και από τη σκοπιά του μηχανικού δε μας ενδιαφέρουν τέτοια σήματα, μια και υπάρχουν μόνο στη θεωρία, ενδιαφέρον είναι να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή όχι του αναπτύγματος Fourier.

Υπάρχουν ΔΥΟ βασικές συνθήκες για την ύπαρξη της σειράς Fourier.

1. Οι συντελεστές  $X_k$  πρέπει να έχουν πεπερασμένο μέτρο, δηλ.  $|X_k| < \infty$ . Αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει μόνον όταν

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \quad (3.14)$$

Η σχέση 3.14 ονομάζεται *ασθενής συνθήκη του Dirichlet*. Αν μια συνάρτηση  $x(t)$  ικανοποιεί την ασθενή συνθήκη του Dirichlet, η ύπαρξη της σειράς Fourier είναι εγγυημένη, αλλά μπορεί η σειρά να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο. Για παράδειγμα, αν ένα σήμα  $x(t)$  απειρίζεται σε κάποιο σημείο, τότε προφανώς κανένα άθροισμα ημιτόνων δεν μπορεί να αναπαραστήσει αυτήν την περιοχή, οπότε

η σειρά που θα αναπαριστά το σήμα θα είναι “προβληματική” σε αυτήν την περιοχή, με άλλα λόγια, δε θα συγκλίνει. Παρόμοια, αν ένα σήμα έχει άπειρα σημεία μεγιστου-ελαχίστου σε μια περίοδο του<sup>3</sup>. Αυτό σημαίνει ότι οι συχνότητες που περιέχονται στο σήμα τείνουν στο άπειρο και ΔΕΝ έχουν συντελεστες  $X_k$  που φθίνουν κατά μέτρο, όσο  $f \rightarrow \infty$ . Έτσι, απαιτούμε μια ακόμα συνθήκη.

2. Το σήμα  $x(t)$  πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδο του, και πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών σε μια περίοδο του. Αυτές οι δυο συνθήκες λέγονται *ισχυρές συνθήκες του Dirichlet*. Αξίζει να σημειωθεί ότι οποιοδήποτε σήμα μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ικανοποιεί τις ισχυρές συνθήκες του Dirichlet, και άρα έχει σειρά Fourier που συγκλίνει. Έτσι, στην πράξη, η φυσική ύπαρξη του σήματος είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της σειράς Fourier του. ;-)

### 3.2.2 Ιδιότητες Σειρών Fourier

Υπάρχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, που θα σας λύσουν τα χέρια σε πολλές εφαρμογές. Ο πίνακας 3.1 απεικονίζει τις περισσότερες.

### 3.2.3 Μερικές ακόμα παρατηρήσεις

1. Τα μαθηματικά που περιγράφουν την ανάλυση Fourier πρέπει να σας είναι ξεκάθαρα, σαν απλά μαθηματικά. Το πρόβλημα είναι ότι δεν πρέπει να αρκείστε σε αυτό. Πρέπει να καταλάβετε πώς αυτά ερμηνεύονται απίτη σκοπιά του μηχανικού. Δυστυχώς η ερμηνεία από την πρακτική σκοπιά της ανάλυσης Fourier έτσι όπως την έχουμε γράψει, δεν είναι βολική. Ας αλλάξουμε στυλ. Αποδεικνύεται – δείτε στις σημειώσεις σας – ότι κάθε *πραγματικό, περιοδικό σήμα* μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (3.15)$$

όπου  $A_0 = X_0$ ,  $A_k = 2|X_k|$ , και  $\phi_k = \angle X_k$ . Είναι προφανές ότι η σχέση (3.15) προκύπτει ΑΜΕΣΑ, αν έχουμε βρει όλους τους αγνώστους της σχέσης (3.8). ;-) Αυτή η σχέση είναι ΠΛΗΡΩΣ ισοδύναμη με την αντίστοιχη σχέση των εκθετικών. Μάλιστα υπάρχουν τύποι για τον υπολογισμό των  $A_k$  χωρίς τη χρήση του  $X_k$ . Εδώ λοιπόν είναι πολύ πιο φανερό ότι ένα περιοδικό, πραγματικό σήμα, αναλύεται σε ένα άθροισμα ημιτόνων, με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους  $f_0$ . Το σχήμα 3.10 δείχνει ένα πολύ γνωστό σήμα και το πώς αυτό προσεγγίζεται σιγά σιγά από το άθροισμα των ημιτόνων, τα οποία έχουν συχνότητες πολλαπλάσιες της  $f_0 = \frac{1}{2\pi}$ .

2. Πώς προέκυψαν αυτοί οι τύποι όμως; Ειδικά οι τύποι με τα ολοκληρώματα των  $X_k$  είναι αρκετά περίεργοι. Τι σημαίνουν; Γιατί εκείνα τα ολοκληρώματα δίνουν τους συντελεστές  $X_k$ ; Γιατί πολλαπλασιάζουμε το  $x(t)$  με  $e^{-j2\pi k f_0 t}$  και μετά ολοκληρώνουμε; Η απάντηση δίνεται από την

<sup>3</sup>Είπαμε, αυτά τα σήματα έχουν κάποιες “ανωμαλίες” :-)

Ιδιότητες σειρών Fourier		
Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$	$X_k$
	$y(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$	$Y_k$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi kt_0/T_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi Mt/T_0} x(t)$	$X_{k-M}$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X_{-k}^*$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X_{-k}$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	$X_k$ , με περίοδο $T_0/a$
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγωγή	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k X_k / T_0$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k / T_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X_{-k}^*, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\  X_k  =  X_{-k} , \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = Ev\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = Od\{x(t)\}, x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0}  x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}  X_k ^2$

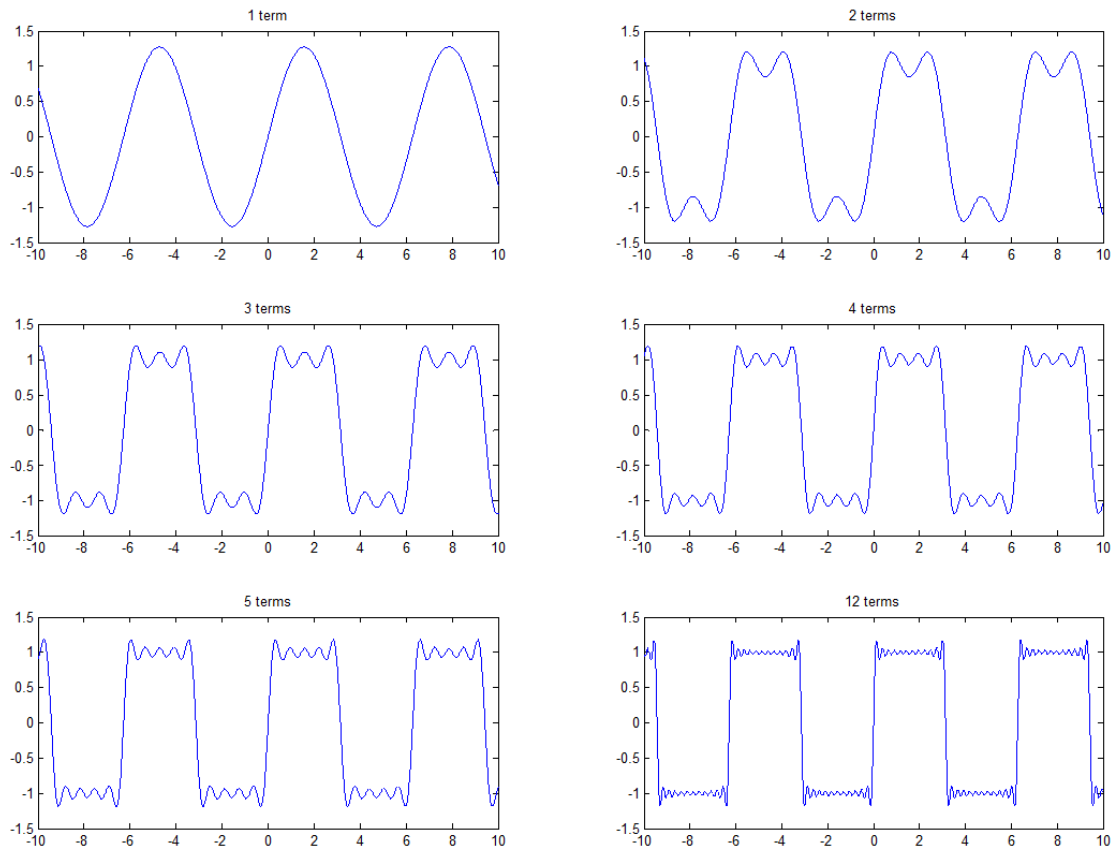
Πίνακας 3.1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

έννοια της προβολής.

Ας πούμε, εντελώς εκλαιχευμένα, ότι είστε σε ένα δωμάτιο με μια λάμπα στην οροφή. Προφανώς, στο πάτωμα θα υπάρχει μια σκιά σας, λόγω του φωτισμού. Αυτή η σκιά σας θα είναι είτε μεγάλη είτε μικρή – ανάλογα τη θέση σας στο χώρο. Η λάμπα “προβάλλει” τον εαυτό σας στο πάτωμα, μέσω της σκιάς σας. Η σκιά σας είναι δηλαδή μια προβολή του εαυτού σας στο πάτωμα. Αν τώρα κάνετε τις αντικαταστάσεις

- πάτωμα == συναρτήσεις βάσης  $e^{-j2\pi k f_0 t}$ ,
- εαυτός == περιοδικό σήμα,
- λάμπα == ολοκλήρωμα, και
- συντελεστές  $X_k$  == σκιά,

έχετε την αναλογία. :-) Όπως η λάμπα προβάλλει εσάς στο πάτωμα μέσω της σκιάς σας, έτσι το ολοκλήρωμα των συντελεστών Fourier προβάλλει το  $x(t)$  σε ένα χώρο από εκθετικά  $e^{-j2\pi k f_0 t}$ .



Σχήμα 3.10: Ανάλυση πραγματικού σήματος σε ημίτονα

Αν το αποτέλεσμα  $X_k$  είναι μεγάλο, σημαίνει ότι περιέχεται “πολύ” απ’το  $e^{-j2\pi k f_0 t}$  μέσα στο περιοδικό σήμα. Στη δική μας αναλογία, η σκιά σας είναι αρκετά μεγάλη στο πάτωμα του δωματίου. :-) Αντίστοιχα, όταν το αποτέλεσμα είναι μικρό. Όταν το σήμα δεν περιέχει καθόλου μια συγκεκριμένη συχνότητα, δηλ. ένα συγκεκριμένο εκθετικό, τότε το ολοκλήρωμα θα πρέπει να είναι μηδέν. Αντίστοιχα, στο δικό μας παράδειγμα, βρίσκεστε ακριβώς κάτω απ’τη λάμπα, άρα η σκιά σας δεν προβάλλεται πουθενά στο πάτωμα. :-)

Φυσικά, για κάθε  $k$  συνήθως υπάρχει διαφορετική τιμή του  $X_k$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $x(t)$  που προβάλλουμε έχει διαφορετικό μέγεθος “σκιάς”,  $X_k$ , πάνω σε κάθε  $e^{-j2\pi k f_0 t}$ , για κάθε τιμή του  $k = k_0$ . Άρα το συγκεκριμένο εκθετικό  $e^{-j2\pi k_0 f_0 t}$  περιέχεται “πολύ” ή “λίγο” στο περιοδικό σήμα, ανάλογα με την τιμή του  $X_{k_0}$ . Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε στη δική μας αναλογία ως μετακίνηση της λάμπας σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Κάθε μετακίνηση δηλώνει μια διαφορετική τιμή του  $k = k_0$ , άρα η σκιά που παράγεται θα έχει ένα συγκεκριμένο “μέγεθος”,  $X_{k_0}$ . Μπορούμε λοιπόν τελικά να πούμε ότι το περιοδικό σχήμα αναλύεται σε μια άπειρη, εν γένει, σειρά από εκθετικά, των οποίων το “βάρος”, δηλ. το πόσο “πολύ” ή “λίγο” περιέχονται στο

περιοδικό σήμα, σχετίζεται με την προβολή του σήματος πάνω στην οικογένεια αυτών των εκθετικών σημάτων. Ακριβώς όμοια είναι η ιστορία αν στη θέση των εκθετικών βάλουμε τα ημίτονα, όπως αποδεικνύει η σχέση (3.15).

Για παράδειγμα, έστω ότι αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα, και ένας συντελεστής Fourier είναι  $X_3 = 2e^{j\pi/4}$ , τότε αυτό τι μας λέει; Δεδομένου ότι το περιοδικό σήμα συντίθεται από μιγαδικά εκθετικά ως

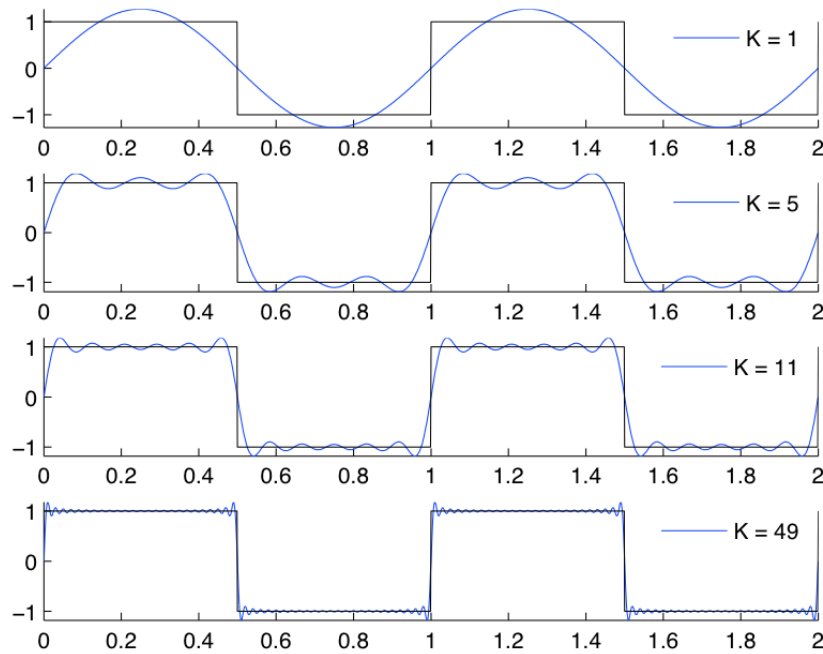
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (3.16)$$

ο προαναφερθέντας συντελεστής μας λέει ότι το εκθετικό  $e^{j2\pi 3 f_0 t}$  συνεισφέρει στη σύνθεση του σήματος με πλάτος 2 και φάση  $\pi/4$ . Αν αυτό σας φαντάζει κάπως δυσνόητο (αν και δε θα έπρεπε), τότε αφού το σήμα είναι πραγματικό, θα έχει και ένα συντελεστή  $X_3^* = 2e^{-j\pi/4}$ . Αν προσθέσουμε τα εκθετικά  $X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t}$  θα έχουμε:

$$X_3 e^{j2\pi 3 f_0 t} + X_3^* e^{-j2\pi 3 f_0 t} = 2e^{j2\pi 3 f_0 t + \pi/4} + 2e^{-j2\pi 3 f_0 t - \pi/4} = 4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4) \quad (3.17)$$

Αυτό ξεκάθαρα δηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που αναλύουμε περιέχει τον όρο  $4 \cos(2\pi 3 f_0 t + \pi/4)$ , με άλλα λόγια, για να κατασκευάσουμε το σήμα που αναλύουμε είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε ένα ημίτονο με συχνότητα  $f_3 = 3f_0$ , πλάτος  $A = 4$ , και φάση  $\phi = \pi/4$  (μεταξύ άλλων ημιτονων, πιθανότατα). Έτσι λοιπόν, τώρα σας είναι ξεκάθαρο τι ακριβώς σημαίνουν οι συντελεστές Fourier όσον αφορά τη σημασία τους στην ανάλυση και στη σύνθεση.

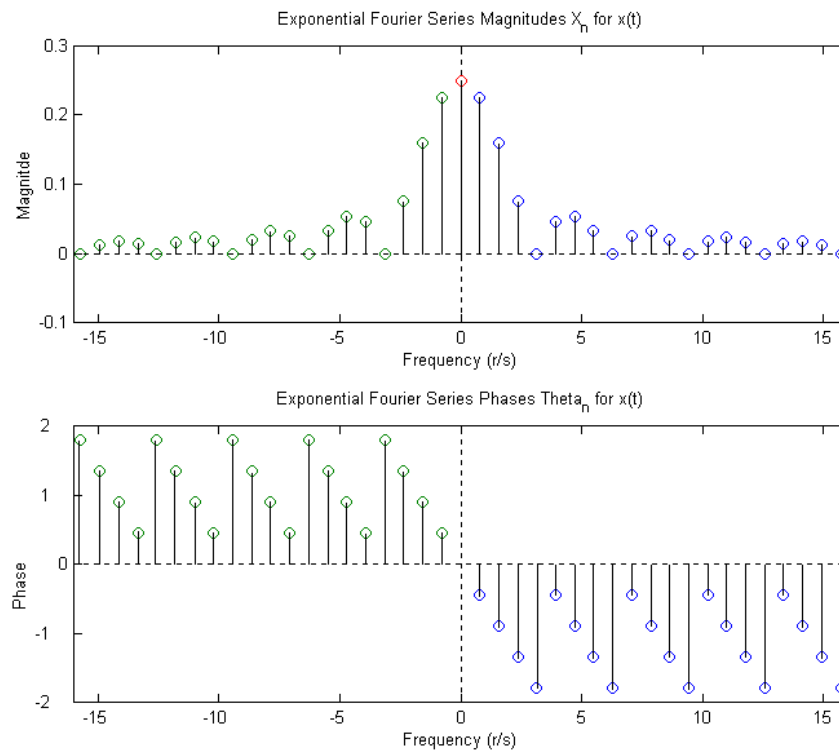
3. Φυσικά παρατηρείτε ότι η σειρά Fourier αποτελείται από άπειρα εκθετικά (ή ημίτονα). Στην πράξη, δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα ημίτονα. Αναγκαστικά κρατάμε έναν αριθμό από αυτά. Δείτε παρακάτω τη σχετική παράγραφο *Σειρές Fourier στην πράξη*, για το πως η πρόσθεση όλων αυτών των ημιτόνων δίνει το αρχικό, περιοδικό σήμα. Για μια γρήγορη ματιά, δείτε το σχήμα 3.11.
4. Παρατηρήστε στο σχήμα 3.11 ότι στα άκρα του παλμού υπάρχει μια ταλάντωση. Αυτή η ταλάντωση ονομάζεται *φαινόμενο Gibbs* και δεν εξαλείφεται στην πράξη, λόγω του ότι πάντα χρησιμοποιούμε πεπερασμένο αριθμό ημιτόνων για να προσεγγίσουμε το περιοδικό σήμα. Οφείλεται στο γεγονός ότι η ασυνέχεια του παλμού (αυτές οι ακαριαίες άνοδοι και κάθοδοι του περιοδικού σήματος) δεν μπορεί να προσεγγιστεί από πεπερασμένο αριθμό συνεχών συναρτήσεων.
5. Η ανάλυση σε σειρές Fourier εφαρμόζεται σε περιοδικά σήματα, δηλ. σε σήματα άπειρης διάρκειας που έχουν το χαρακτήρα της περιοδικότητας. Αυτά τα σήματα λέγονται *σήματα ισχύος*, διότι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια.
6. Επίσης, μια βολική αναπαράσταση της ανάλυσης σε σειρές Fourier είναι η σχεδίαση του *φάσματος πλάτους* και του *φάσματος φάσης*. Οι φασματικές αναπαραστάσεις (και οι δυο μαζί) μας δίνουν ΟΛΗ την απαραίτητη πληροφορία για το περιοδικό σήμα. Με άλλα λόγια, αν έχουμε τις φασματικές αναπαραστάσεις, μπορούμε να γράψουμε την σειρά Fourier που αυτές αντιπροσωπεύουν.



Σχήμα 3.11: Προσέγγιση τετραγωνικού περιοδικού παλμού από 49 ημίτονα

Σημαντικό! Θυμίζεται ότι στο φάσμα πλάτους αναπαριστούμε το  $|X_k|$ , δηλ. το πως αλλάζει το πλάτος των συντελεστών ανά συχνότητα, ενώ στο φάσμα φάσης το  $\angle X_k$ , που δηλώνει το πως αλλάζει η φάση των συντελεστών ανά συχνότητα. Για παράδειγμα, στο σχήμα 3.12, βλέπετε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης ενός περιοδικού σήματος. Οι συχνότητες στους οριζόντιους άξονες εδώ παρουσιάζονται σε μονάδα μέτρησης rad/sec (δηλ. στη λεγόμενη γωνιακή συχνότητα  $\omega = 2\pi f$ ), κι όχι Hz, ενώ η φάση μετριέται σε ακτίνια (rad). Για την ακρίβεια, η κυκλική συχνότητα  $\omega = 2\pi f$  και η συχνότητα  $f$  χρησιμοποιούνται ευρέως και εναλλάξ στη βιβλιογραφία. Εμείς προτιμούμε την συχνότητα  $f$  που μετριέται σε Hz. Βλέπετε ότι οι μπλε τιμές του  $|X_k|$  αντιστοιχούν στα θετικά  $k$ , ενώ οι πράσινες τιμές του  $|X_k|$  αντιστοιχούν στα αρνητικά  $k$ . Η κόκκινη τιμή είναι η μέση τιμή του σήματος, το  $X_0$ . Όμοια και για τις τιμές της φάσης,  $\angle X_k$ . Βλέπετε ότι για τις τιμές  $k = \pm k_0$ , οι τιμές του φάσματος  $|X_{k_0}|$  είναι ίδιες, και οι τιμές του φάσματος φάσης  $\angle X_{k_0}$  είναι αντίθετες. Άρα τα φάσματα αυτά αντιστοιχούν σε πραγματικό σήμα, γιατί ικανοποιούν την ιδιότητα  $X_k^* = X_{-k}$ . Οπότε πρέπει να έχετε υπόψη σας ότι ένα πραγματικό σήμα έχει άρτιο φάσμα πλάτους και περιττό φάσμα φάσης. :-)

7. Προσέξτε ότι το μέτρο των συντελεστών Fourier,  $|X_k|$ , είναι σταθερό ή φθίνει και τείνει στο 0 όσο το  $k \rightarrow +\infty$ . Αυτό είναι ΚΑΝΟΝΑΣ στο φάσμα πλάτους, όταν έχουμε άπειρα  $X_k$ . Δε θα μπορούσαν τα  $|X_k|$  να αυξάνονται, γιατί ένα τέτοιο άθροισμα  $|X_k|$  θα έδινε συνολικά άπειρο πλάτος στο περιοδικό σήμα. Έχοντας αυτό στο μυαλό σας, και την προηγούμενη παρατήρηση,



Σχήμα 3.12: Φάσμα πλάτους (πάνω) και φάσμα φάσης (κάτω) ενός περιοδικού σήματος

μπορείτε να ελέγχετε τις απαντήσεις σας στο φάσμα πλάτους σε θεωρητικές ασκήσεις. Τονίζεται ότι το παραπάνω ισχύει όταν αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα σε ΑΠΕΙΡΑ ημίτονα. Όταν π.χ. έχουμε ένα άθροισμα

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (3.18)$$

ή

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (3.19)$$

τότε έχουμε πεπερασμένους πλήθους ημίτονα ( $N$  στην πρώτη περίπτωση, πόσα στη δεύτερη; – quiz – :-)), άρα τα  $A_k$  ή τα  $X_k$  μπορούν να έχουν όποια κατανομή θέλουν, όσο αυξάνει το  $k$ .

8. Σίγουρα ένα στοιχείο που θα σας ξενίζει αρκετά είναι αυτό των αρνητικών συχνοτήτων στα εκθετικά. Ξέρουμε ότι συχνότητα είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός σήματος στη μονάδα του χρόνου, και αναμφίβολα αυτός ο αριθμός είναι μια θετική ποσότητα. Δεν μπορούμε να έχουμε –4 επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο! :-). Πώς ερμηνεύεται μια αρνητική συχνότητα; Χρησιμοποιώντας μια γνωστή ταυτότητα, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ημίτονο αρνητικής συχνότητας  $-f_0$  ως

$$\cos(-2\pi f_0 t + \theta) = \cos(-(2\pi f_0 t - \theta)) = \cos(2\pi f_0 t - \theta) \quad (3.20)$$



Αυτή η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συχνότητα του ημιτόνου είναι  $|f_0|$ , και είναι θετική. Πώς τώρα όμως ερμηνεύουμε τις φασματικές γραμμές στις αρνητικές συχνότητες; Ένας ασφαλής τρόπος είναι να πούμε απλά ότι το φάσμα είναι μια γραφική αναπαράσταση των συντελεστών  $|X_k|$  συναρτήσει του  $f$ . Η παρουσία αρνητικών συχνοτήτων απλά σημαίνει ότι υπάρχει ένα εκθετικό μιας τέτοιας αρνητικής συχνότητας στη σειρά Fourier που αναλύουμε. Απλό, έτσι δεν είναι; :-D Επίσης, έχετε υπόψη σας ότι δυο εκθετικά στις συχνότητες  $kf_0$  και  $-kf_0$ , ιδίου μέτρου  $A$ , δίνουν ένα ημίτονο πλάτους  $2A$  στη συχνότητα  $kf_0$ .

9. Ας πούμε και δυο κουβέντες για το περίφημο θεώρημα του Parseval. Ας ξαναγράψουμε εδώ τις αναπαραστάσεις κατά Fourier που έχουμε δει:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (3.21)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (3.22)$$

Ας δούμε τη σχέση 3.21 πρώτα. Κάθε όρος στο δεξιό μέρος είναι ένα περιοδικό σήμα, δηλ. ένα σήμα ισχύος. Αποδεικνύεται ότι η ισχύς του αθροίσματος συνημιτόνων ισούται με το άθροισμα των ισχύων των επιμέρους συνημιτόνων. Άρα η ισχύς του  $x(t)$  είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ισχύων των συνημιτόνων που το αποτελούν. Αυτό σημαίνει ότι

$$P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \quad (3.23)$$

και αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το θεώρημα του Parseval: δηλώνει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων των συντελεστών Fourier.

Φυσικά μπορούμε να γράψουμε το ίδιο και για το εκθετικό ανάπτυγμα Fourier:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad (3.24)$$

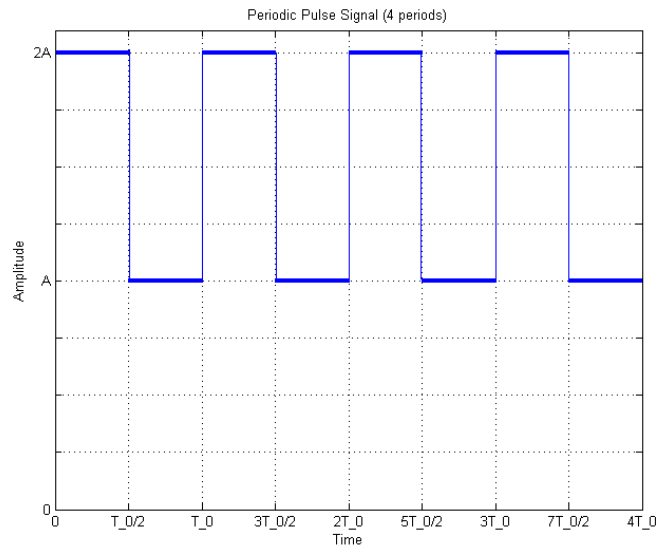
### 3.3 Οι σειρές Fourier στην πράξη

Η παράγραφος αυτή δεν έχει σκοπό τόσο να σας δείξει πώς αναπτύσσεται θεωρητικά ένα περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier, αλλά να δείξει πώς ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΤΑΙ ένα περιοδικό σήμα από τα συνημίτονα της σειράς Fourier και τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σήμα ΠΕΡΙΕΧΕΙ κάποιες συχνότητες.

Έστω λοιπόν το περιοδικό σήμα  $x(t)$  που περιγράφεται σε μια περίοδο του  $T_0$  ως:

$$x(t) = \begin{cases} 2A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ A, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

το οποίο θέλουμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier. Τέσσερις περίοδοι του σχήματος αυτού φαίνονται παρακάτω, στο σχήμα 3.13. Αποδείξτε μόνοι σας - εξάσκηση! :- ) - ότι:



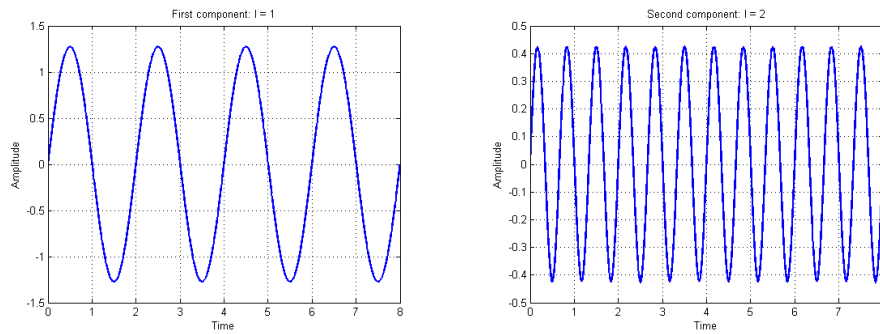
Σχήμα 3.13: Τέσσερις περίοδοι ενός περιοδικού σήματος

$$X_0 = \frac{3A}{2}, X_k = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases} \quad (3.25)$$

Έστω λοιπόν ότι αποδείξατε τα παραπάνω. :- ) Έτσι, το περιοδικό σήμα που συζητάμε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως εξής:

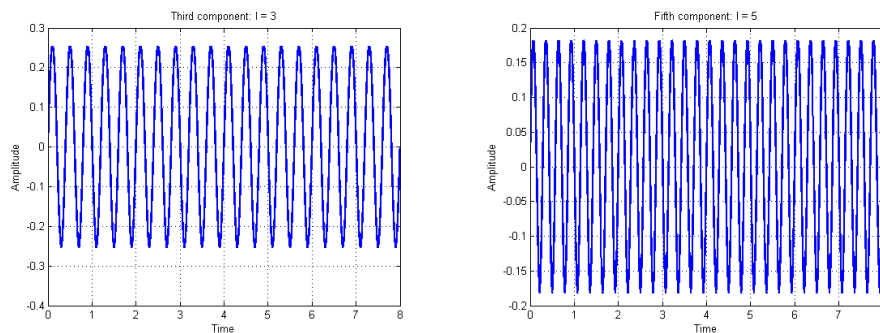
$$x(t) = \frac{3A}{2} + \sum_{k=-\infty, k \text{ odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{3A}{2} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2l-1)} \cos(2\pi(2l-1)f_0 t - \frac{\pi}{2}) \quad (3.26)$$

(ουσιαστικά θέσαμε παραπάνω  $k = 2l - 1$ . Ο συμβολισμός με το  $l$  αντί για  $k$  έγινε για να μπορούμε να ξεχωρίζουμε σε ποίο δείκτη αναφερόμαστε στη διάρκεια του κειμένου - δεν είναι λάθος να κρατήσουμε το δείκτη  $k$  παντού) Θα χρησιμοποιήσουμε MATLAB για να δούμε πως σχηματίζεται το σήμα από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων. Για πρακτικούς λόγους, ας ορίσουμε ότι  $A = 2$  και  $T_0 = 2 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2} \text{ Hz}$ . Γράφοντας κατάλληλο κώδικα, ας δούμε πως σχηματίζεται σιγά σιγά το περιοδικό σήμα μας από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων που βρήκαμε παραπάνω. Προτού το δούμε αυτό, ας δούμε ένα-ένα τα πρώτα λίγα συνημίτονα του παραπάνω αθροίσματος στα σχήματα 3.14, 3.15. Όλα αυτά τα συνημίτονα έχουν συχνότητα ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας  $f_0 = 0.5 \text{ Hz}$ . Βλέπετε ότι όσο προχωράμε προς τις υψηλότερες αρμονικές συχνότητες, τόσο η συχνότητα των συνημιτόνων μεγαλώνει και το πλάτος τους φθίνει. Λογικό, αν σκεφτούμε αυτό που μόλις είπαμε για τις αρμονικές και την παρατήρηση για τα πλάτη σε προηγούμενη παράγραφο. Το πρώτο συνημίτονο του αθροίσματος



(α') Πρώτο συνημίτονο της σειράς Fourier      (β') Τρίτο συνημίτονο της σειράς Fourier

Σχήμα 3.14: Συνημίτονα που συνθέτουν το περιοδικό σήμα - 1



(α') Πέμπτο συνημίτονο της σειράς Fourier      (β') Έβδομο συνημίτονο της σειράς Fourier

Σχήμα 3.15: Συνημίτονα που συνθέτουν το περιοδικό σήμα - 2

έχει συχνότητα  $(2l - 1)f_0 = (2 * 1 - 1)f_0 = f_0$ , το δεύτερο έχει συχνότητα  $(2 * 2 - 1)f_0 = 3f_0$ , το τρίτο  $5f_0$ , ..., το  $2l$ ο έχει συχνότητα  $41f_0$ .

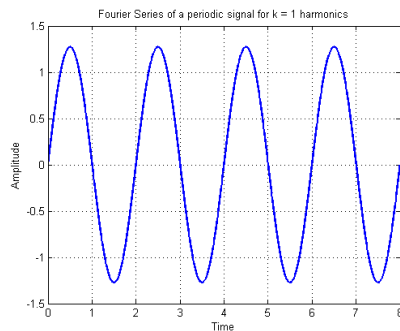
Βλέπετε ότι οι συχνότητες είναι επίσης περιττές ακέραιες πολλαπλάσεις της θεμελιώδους. Είναι αναμενόμενο, μιας και είδαμε παραπάνω ότι το ανάπτυγμά μας αποτελείται μόνο από περιττά  $k$ . Τα άρτια  $k$  έχουν πλάτος μηδέν, άρα τα αντίστοιχα συνημίτονα είναι μηδενικά - προσέξτε, μιλάμε για τα  $k$ , όχι για τα  $l$ , τα οποία παίρνουν όλες τις ακέραιες τιμές αλλά δίνουν μόνο περιττά  $k$ !

Προσοχή ξανά όμως! :-) Όταν μιλάμε για αρμονικές συχνότητες και για τα αντίστοιχα συνημίτονα, αναφερόμαστε στις ακέραιες πολλαπλάσεις της θεμελιώδους, άσχετα αν το αντίστοιχο πλάτος του συνημιτόνου είναι μηδέν! Δηλ. για παράδειγμα, η πρώτη αρμονική έχει πλάτος  $\frac{4}{\pi}$  και συχνότητα  $f_0$ , η δεύτερη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα  $2f_0$ , η τρίτη αρμονική έχει πλάτος  $\frac{4}{3\pi}$  και συχνότητα  $3f_0$ , η τέταρτη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα  $4f_0$ , η πέμπτη έχει πλάτος  $\frac{4}{5\pi}$  και συχνότητα  $5f_0$ , κ.ο.κ.

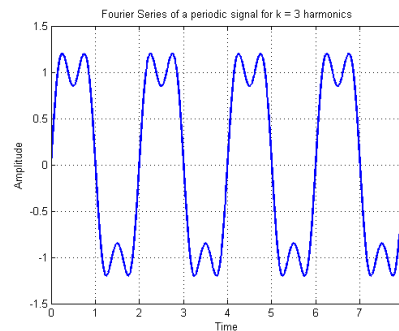
Τέλος, αν υπολογίσετε τα πλάτη των παραπάνω συνημιτόνων από τον τύπο της σειράς Fourier, θα βρείτε αντίστοιχα  $\frac{4}{\pi} = 1.2732$ ,  $\frac{4}{3\pi} = 0.4244$ ,  $\frac{4}{5\pi} = 0.2546$ ,  $\frac{4}{7\pi} = 0.1819$ ,  $\frac{4}{41\pi} = 0.0311$ , που συμβαδίζουν απόλυτα με τα πλάτη των συνημιτόνων στα παραπάνω σχήματα.

Οπότε αυτό που μας λέει η θεωρία των σειρών Fourier είναι ότι αν αθροίσουμε ΟΛΑ αυτά τα συνημίτονα (και προσθέσουμε στο τέλος και τη μέση τιμή  $X_0$ ) το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι

ίδιο κι απaráλλακτο με το περιοδικό σήμα που είχαμε εζ' αρχής! Φυσικά για να είναι απόλυτα ίδιο, πρέπει να αθροίσουμε άπειρα συνημίτονα – έτσι λείει η θεωρία. Στην πράξη φυσικά αυτό δεν μπορεί να γίνει. Θα αθροίσουμε κάποια από αυτά, όσα θέλουμε εμείς, με βάση κάποιο οπτικό, μαθηματικό, ή άλλο κριτήριο. Αυτό σημαίνει ότι το σήμα που θα πάρουμε θα έχει κάποιες διαφορές με το αρχικό. Το πόσο μεγάλες θα είναι, εξαρτάται από το πλήθος των συνημιτόνων που θα αθροίσουμε. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν να αθροίζουμε ένα-ένα τα συνημίτονα για να δούμε πώς σχηματίζεται το αρχικό σήμα. Δείτε το αποτέλεσμα στα σχήματα 3.16, 3.17, 3.18, 3.19. Βλέπετε ότι για 1000 αρμονικές, το αποτέλεσμα

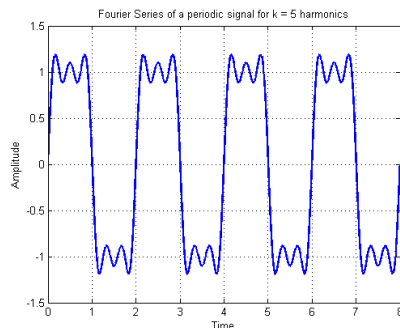


(α) Άθροισμα ενός ημιτόνου της σειράς Fourier

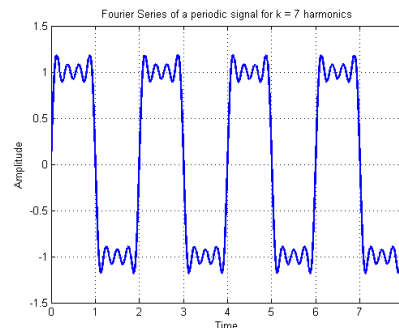


(β') Άθροισμα τριών ημιτόνων της σειράς Fourier

Σχήμα 3.16: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 1



(α) Άθροισμα πέντε συνημιτόνων της σειράς Fourier



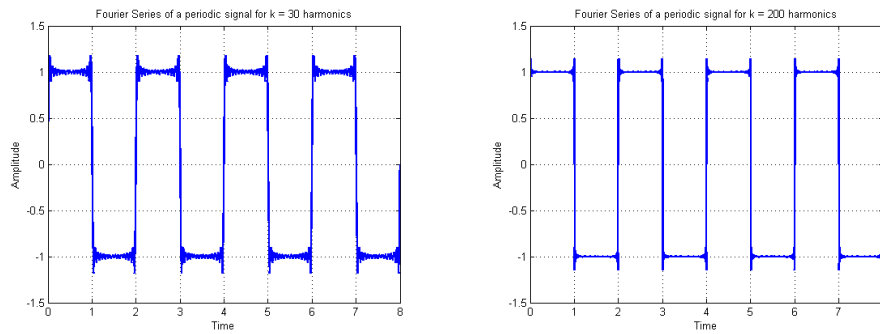
(β') Άθροισμα επτά συνημιτόνων της σειράς Fourier

Σχήμα 3.17: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 2

είναι ουσιαστικά ολόιδιο στο μάτι με το αρχικό σήμα - στην ουσία δεν είναι όμως.

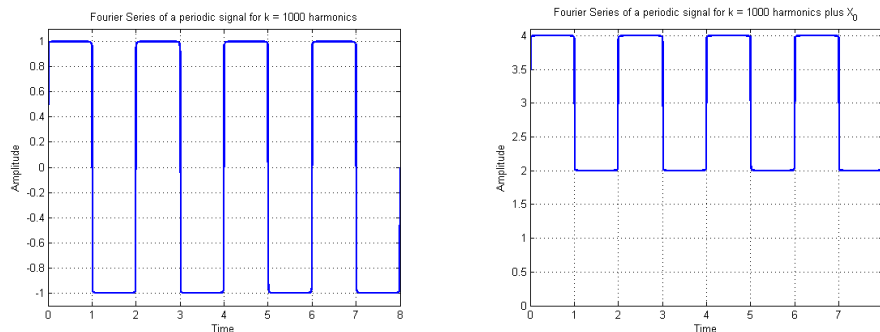
Τώρα λοιπόν είναι πια ξεκάθαρο γιατί η ανάλυση σε σειρές Fourier μας δίνει την απάντηση για το ποιά είναι το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος, δηλ. με άλλα λόγια ποιές συχνότητες περιέχει ένα σήμα. Περιέχει αυτές τις συχνότητες των οποίων τα συνημίτονα έχουν μη μηδενικό πλάτος στο ανάπτυγμα κατά Fourier, δηλ. στο παράδειγμά μας τις συχνότητες  $f_0, 3f_0, 5f_0, \dots = 0.5, 1.5, 4.5, \dots$  Hz.

Βάσει αυτών, μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε αμφίπλευρο φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης, μια και



(α) Άθροισμα τριάντα συνημιτόνων της σειράς Fourier (β) Άθροισμα διακοσίων συνημιτόνων της σειράς Fourier

Σχήμα 3.18: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 3



(α) Άθροισμα χιλίων συνημιτόνων της σειράς Fourier (β) Άθροισμα  $X_0$  + χιλίων συνημιτόνων της σειράς Fourier

Σχήμα 3.19: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 4

έχουμε την εκθετική αναπαράσταση του αναπτύγματος. Το πλάτος  $X_k$  είναι ίσο με  $X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ , για περιττά  $k$ . Άρα θέτοντας περιττές τιμές στο  $k$ , έχουμε τα αντίστοιχα πλάτη για τις περιττές συχνότητες  $f_0, 3f_0, 5f_0, \dots$ . Προσοχή όμως, γιατί αφού το πλάτος  $X_k$  είναι μιγαδικός αριθμός, θα πρέπει στο φάσμα πλάτους να βάλετε το  $|X_k|$ . Όμοια για το φάσμα φάσης, το οποίο είναι σταθερό και ίσο με  $-\frac{\pi}{2}$  για τις θετικές περιττές συχνότητες, ενώ είναι μηδέν για τις θετικές άρτιες συχνότητες, και ίσο με  $\frac{\pi}{2}$  για τις αρνητικές περιττές συχνότητες (και πάλι μηδέν για τις αρνητικές άρτιες συχνότητες). Καταλαβαίνετε το γιατί; Σχεδιάστε τα! :-)

### 3.4 Όμως...

Είδαμε – στη θεωρία σας και εδώ – μια μέθοδο αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος ως ένα άθροισμα εκθετικών σημάτων των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους. Αυτή η αναπαράσταση (σειρά Fourier), καθώς και τα συμπεράσματά της, είναι πολύτιμη σε πολλές εφαρμογές. Όμως, έχει τα παρακάτω μειονεκτήματα:

1. Η σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για περιοδικά σήματα. Όλα όμως τα σήματα στην

πράξη είναι μη περιοδικά (θυμηθείτε ότι ένα περιοδικό σήμα ξεκινά από το  $-\infty$ ).

2. Η τεχνική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα, αλλά όχι τόσο εύκολα σε ασταθή ή οριακά ευσταθή συστήματα. Προς το παρόν, δε γνωρίζετε τι σημαίνουν όλα αυτά, αλλά θα το μάθετε. :-)

Το πρώτο μειονέκτημα μπορεί να υπερκεραστεί με την αναπαράσταση μη περιοδικών σημάτων ως άθροισμα εκθετικών σημάτων. Αυτό δεν είναι άλλο από τον περίφημο μετασχηματισμό *Fourier*, που θα δείτε αμέσως μετά. Το δεύτερο μειονέκτημα μπορεί να υπερκεραστεί με τη χρήση εκθετικών της μορφής  $e^{-st}$ , όπου το  $s$  δεν είναι απαραίτητα ίσο με  $j2\pi k f_0$ , αλλά μπορεί να πάρει κι άλλες τιμές. Αυτή τη γενίκευση θα τη δείτε σύντομα, στον περίφημο μετασχηματισμό *Laplace*. ;-)

## 3.5 Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t)$$

Λύση:

Θα χρειαστούμε τις ταυτότητες:

$$\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2), \quad (3.27)$$

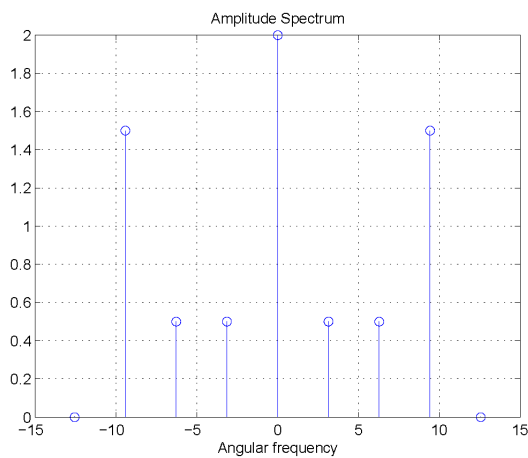
$$-\sin(\theta) = \cos(\theta + \pi/2), \quad (3.28)$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta). \quad (3.29)$$

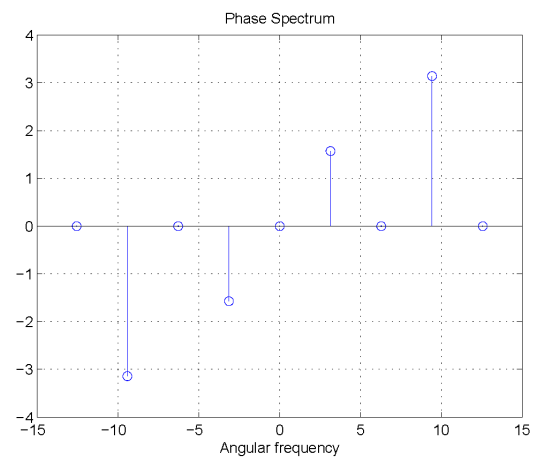
Θα μετατρέψουμε τα  $\sin$  σε  $\cos$  και θα φροντίσουμε τα πρόσημα να είναι όλα θετικά, εισάγοντας όπου χρειάζεται την κατάλληλη φάση. Είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t) \\ &= 2 + \cos(2\pi t) + \cos(\pi t + \pi/2) + 3\cos(3\pi t + \pi) \\ &= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j\pi/2} + \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{-j\pi t}e^{-j\pi/2} + \frac{3}{2}e^{j3\pi t}e^{j\pi} + \frac{3}{2}e^{-j3\pi t}e^{-j\pi}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στα παρακάτω σχήματα 3.20α' και 3.20β' αντίστοιχα.



(α) Φάσμα πλάτους 2.1



(β') Φάσμα φάσης 2.1

Σχήμα 3.20: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.1

2. Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t)$$

Βρείτε την περίοδο  $T_0$  του σήματος και υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{T_0} x^2(t) dt$$

Λύση:

Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το  $x(t)$  ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων.

Είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin^2(5\pi t) \cos(22\pi t) = \left( \frac{1}{2j} e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j5\pi t} \right)^2 \left( \frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \\ &= \left( \frac{1}{4j^2} e^{j10\pi t} - 2 \frac{1}{2j} \frac{1}{2j} e^{j5\pi t} e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2} e^{-j10\pi t} \right) \left( \frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \\ &= \left( -\frac{1}{4} e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j10\pi t} \right) \left( \frac{1}{2} e^{j22\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j22\pi t} \right) \\ &= -\frac{1}{8} e^{j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4} e^{j22\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8} e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8} e^{j12\pi t} \\ &= -\frac{1}{4} \cos(12\pi t) + \frac{1}{2} \cos(22\pi t) - \frac{1}{4} \cos(32\pi t) \\ &= -\frac{1}{4} \cos(2\pi 6t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 11t) - \frac{1}{4} \cos(2\pi 16t) \\ &= \frac{1}{4} \cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi 16t + \pi) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ένας διαφορετικός τρόπος λύσης θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

και

$$\cos(\theta) \cos(\omega) = \frac{1}{2} \cos(\theta + \omega) + \frac{1}{2} \cos(\theta - \omega)$$

Τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(10\pi t) \right) \cos(22\pi t) &= \frac{1}{2} \cos(22\pi t) - \frac{1}{2} \cos(22\pi t) \cos(10\pi t) \\ &= \frac{1}{2} \cos(22\pi t) + \frac{1}{4} \cos(32\pi t + \pi) + \frac{1}{4} \cos(12\pi t + \pi) \end{aligned}$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι:  $f_0 = \text{MK}\Delta(6, 11, 16) = 1$ . Άρα  $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ .

Τώρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογιστεί κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου.



Όμως η σχέση του Parseval μας λέει ότι:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(A_k)^2}{2}$$

όπου  $X_k$  οι συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος (σχέση 1) και  $A_k$  οι συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος (σχέση 2). Επιλέξτε όποιο σας βολεύει.

Άρα θα είναι:

$$\int_0^{T_0} x^2(t) dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 4 \left| -\frac{1}{8} \right|^2 + 2 \left| -\frac{1}{4} \right|^2 = \frac{4}{64} + \frac{2}{16} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16} \quad (3.32)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με τον τύπο

$$T_0 \left( A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(A_k)^2}{2} \right) = 2 \left( \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} \right) + \left( \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} \right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} \quad (3.33)$$

3. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο  $T_0$ , σήμα:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 2 - 2\frac{t}{T_0}, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

Σας δίνεται ότι:

$$\int t e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \left( t - \frac{1}{\alpha} \right)$$

Λύση:

Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \text{ και } X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι  $f_0 T_0 = 1$ ,  $e^{\pm j2\pi k} = 1$ , και  $e^{-j\pi k} = -1$ . Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \left( \int_0^{\frac{T_0}{2}} 1 dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \left(2 - \frac{2}{T_0} t\right) dt \right) \\
&= \frac{1}{T_0} t \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0} 2t \Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \frac{2}{T_0} t dt \\
&= \frac{1}{T_0} \left( \frac{T_0}{2} - 0 \right) + \frac{2}{T_0} \left( T_0 - \frac{T_0}{2} \right) - \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \frac{2}{T_0} t dt \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{T_0^2} \left( \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{2}{T_0^2} \left( \frac{T_0^2}{2} - \frac{T_0^2}{8} \right) \\
&= \frac{3}{2} - 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{2} - 2 \frac{3}{8} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \iff X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left( \int_0^{T_0} 1 e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \int_0^{T_0} \left(2 - \frac{2}{T_0} t\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) \\
&= \frac{1}{T_0} \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} 2e^{-j2\pi k f_0 t} dt - \frac{2}{T_0^2} \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} t e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{1}{-j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{T_0} \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} \Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{2}{T_0^2} \left( \frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0} \left( t - \frac{1}{-j2\pi k f_0} \right) \right) \Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \\
&= \frac{1}{-j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{T_0} \left( \frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k f_0} - \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k f_0} \right) - \frac{2}{T_0^2} \left( \frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k f_0} \left( T_0 - \frac{1}{-j2\pi k f_0} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k f_0} \left( \frac{T_0}{2} - \frac{1}{-j2\pi k f_0} \right) \right) \\
&= \frac{1}{-j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2}{T_0^2 (-j2\pi k f_0)(j2\pi k f_0)} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \\
&\quad + \frac{2e^{-j\pi k}}{T_0^2 (-j2\pi k f_0)(j2\pi k f_0)} \\
&= \frac{1}{-j2\pi k} (e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2 k^2} \\
&= -\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{1}{j2\pi k} + 2\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} - \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2 k^2} \\
&= \frac{1}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - e^{-j\pi k}) \\
&= \frac{1}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - e^{-j\pi k}).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$X_0 = \frac{3}{4} \text{ και } X_k = \frac{1}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - e^{-j\pi k}).$$

Μπορούμε να γράψουμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - e^{-j\pi k}) \right) e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi k f_0 t} - \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - e^{-j\pi k}) e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - e^{-j\pi k}) e^{j2\pi k f_0 t}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Παρατηρούμε ότι  $(1 - e^{-j\pi k}) = 1 - (-1)^k$ , άρα:

$$(1 - e^{-j\pi k}) = \begin{cases} 2, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$

Άρα θα είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k \text{ odd}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} 2 e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j2\pi(2k-1)f_0 t} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Αν θέλουμε να προχωρήσουμε ακόμα λίγο και να αναπτύξουμε το σήμα μας σε μονόπλευρη σειρά Fourier τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j2\pi(2k-1)f_0 t} \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{2\pi^2 (2k-1)^2} \cos(2\pi(2k-1)f_0 t) \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos(2\pi(2k-1)f_0 t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

γιατί ξέρουμε ότι για τους συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ισχύει ότι:

$$A_k = 2|X_k|$$

4. Έστω ένα πραγματικό, περιττό και περιοδικό σήμα  $x(t)$ , που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές  $X_k$ . Δείξτε ότι

$$X_k = -X_{-k}$$

Λύση:

Το σήμα μας είναι περιττό, άρα θα ισχύει  $x(t) = -x(-t)$ . Είναι:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} -x(-t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Θέτω  $u = -t \Rightarrow du = -dt$ . Επίσης,  $u_1 = 0, u_2 = -T_0$ .

Άρα θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{-T_0} x(u) e^{j2\pi k f_0 u} du = -\frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^0 x(u) e^{-j2\pi(-k) f_0 u} du = -X_{-k} \quad (3.39)$$

5. Δίδονται τρία πραγματικά, περιοδικά σήματα με μικρό αριθμό αρμονικών. Οι μη μηδενικοί συντελεστές για  $k > 0$  δίδονται ακολούθως:

α)  $x_1(t) : T_0 = 1, X_1 = 5, X_3 = 2$ .

β)  $x_2(t) : T_0 = 2, X_1 = j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{4}, X_4 = -j\frac{1}{8}$ .

Βρείτε τα  $x_i(t)$ .

Λύση:

Αφού τα σήματα είναι πραγματικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές  $X_k$  και για  $k < 0$ , και για αυτούς θα ισχύει ότι  $X_{-k} = X_k^*$ .

α) Είναι

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_{-3} e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + X_{-1} e^{j2\pi(-1)\frac{1}{T_0}t} + X_1 e^{j2\pi(+1)\frac{1}{T_0}t} + X_3 e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} \\ &= X_3^* e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_3 e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\ &= 2e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + 5e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 5e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 2e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\ &= 2e^{-j6\pi t} + 5e^{-j2\pi t} + 5e^{j2\pi t} + 2e^{j6\pi t} \\ &= 2(e^{-j6\pi t} + e^{j6\pi t}) + 5(e^{-j2\pi t} + e^{j2\pi t}) \\ &= 4\cos(6\pi t) + 10\cos(2\pi t). \end{aligned} \quad (3.40)$$

β) Είναι

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= X_{-4}e^{j2\pi(-4)\frac{1}{T_0}t} + X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + \dots + X_3e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} + X_4e^{j2\pi(+4)\frac{1}{T_0}t} \\
&= X_4^*e^{-j2\pi4\frac{1}{T_0}t} + X_3^*e^{-j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + \dots + X_3e^{j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + X_4e^{j2\pi4\frac{1}{T_0}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j2\pi4\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{4}e^{-j2\pi3\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi2\frac{1}{2}t} + \dots - j\frac{1}{2}e^{j2\pi2\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{4}e^{j2\pi3\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{8}e^{j2\pi4\frac{1}{2}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j4\pi t} - j\frac{1}{4}e^{-j3\pi t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - je^{-j\pi t} + je^{j\pi t} - j\frac{1}{2}e^{j2\pi t} + j\frac{1}{4}e^{j3\pi t} - j\frac{1}{8}e^{j4\pi t} \\
&= j\frac{1}{8}(e^{-j4\pi t} - e^{j4\pi t}) - j\frac{1}{4}(e^{-j3\pi t} - e^{j3\pi t}) + j\frac{1}{2}(e^{-j2\pi t} - e^{j2\pi t}) - j(e^{-j\pi t} - e^{j\pi t}) \\
&= -j\frac{1}{8}2j\sin(4\pi t) + j\frac{1}{4}2j\sin(3\pi t) - j\frac{1}{2}2j\sin(2\pi t) + j2j\sin(\pi t) \\
&= \frac{1}{4}\sin(4\pi t) - \frac{1}{2}\sin(3\pi t) + \sin(2\pi t) - 2\sin(\pi t) \tag{3.41}
\end{aligned}$$

6. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο  $T_0$ , σήμα:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

Λύση:

Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt \text{ και} \\
X_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt
\end{aligned}$$

Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t} dt \\
&= \frac{1}{T_0} \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{T_0} \frac{1}{-\alpha} (e^{-\alpha \frac{T_0}{2}} - 1) \\
\iff X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{\alpha T_0} (1 - e^{-\alpha \frac{T_0}{2}}) \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t - j2\pi k f_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)t} dt = \frac{1}{T_0} \frac{1}{-(\alpha + j2\pi k f_0)} e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)t} \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
 &= \frac{1}{T_0} \frac{1}{-(\alpha + j2\pi k f_0)} \left( e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)\frac{T_0}{2}} - 1 \right) \\
 &= -\frac{1}{T_0} \frac{1}{(\alpha + j2\pi k f_0)} \left( e^{-\alpha\frac{T_0}{2} + j\pi k} - 1 \right) \\
 &= -\frac{1}{T_0} \frac{1}{(\alpha + j2\pi k f_0)} \left( e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} e^{-j\pi k} - 1 \right) = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)} (1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} e^{-j\pi k}) \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Όμως ξέρουμε ότι:  $e^{-j\pi k} = \cos \pi k - j \sin \pi k = (-1)^k$ , γιατί για κάθε  $k$  ακέραιο, το  $\cos \pi k$  είναι είτε 1 για άρτια  $k$ , είτε -1 για περιττά  $k$ , ενώ το  $\sin \pi k$  είναι μηδέν για κάθε  $k$ .

Άρα μπορούμε να γράψουμε τελικά ότι:

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)} \left( 1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} \right)$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$X_0 = \frac{1}{\alpha T_0} \left( 1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} \right) \text{ και} \quad (3.44)$$

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)} \left( 1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} \right) \quad (3.45)$$

Άρα το σήμα μας θα γράφεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)} \left( 1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} \right) e^{j2\pi k f_0 t} \quad (3.46)$$

7. Ένα περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$A_{2k+1} = 2/3, 1/3, 1/3, 1/5, 2/25$$

όπου  $k = 0, 1, 2, \dots$  και τα  $A_k$  έχουν υπολογιστεί μέσω της σχέσης

$$A_k e^{j\phi_k} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Πόση συνολική ενέργεια έχει κατανεμηθεί από τη συχνότητα  $\omega_0$  έως και την  $6\omega_0$ ;

Λύση:

Βλέπουμε ότι τα  $A_k$  είναι τα  $A_1, A_3, A_5, A_7, A_9$ , δηλ. οι περιττοί συντελεστές που εμπλέκονται στο μονόπλευρο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier. Θυμίζεται ότι το μονόπλευρο ανάπτυγμα προκύπτει από τη σχέση:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \Re \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right\} = A_0 + \Re \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right\} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Επίσης, έχειδειχθεί ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Άρα βλέπουμε ότι το  $A_k$  είναι οι συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier και σχετίζονται με τα  $X_k$  ως:  $A_k = 2|X_k|$ .

Προφανώς τα άρτια  $A_k$  είναι μηδέν στο παράδειγμά μας. Άρα καταλαβαίνουμε από όλα αυτά ότι στην πρώτη αρμονική συχνότητα,  $\omega_0$ , υπάρχει πλάτος  $A_1$ , στην τρίτη αρμονική συχνότητα,  $3\omega_0$ , υπάρχει πλάτος  $A_3$ , στην πέμπτη αρμονική συχνότητα  $5\omega_0$ , υπάρχει πλάτος  $A_5$ , κ.ο.κ.

Το θεώρημα του Parseval μπορεί να μας δώσει τη συνολική ενέργεια που είναι κατανομημένη από τη συχνότητα  $\omega_0$  (πρώτη αρμονική) ως τη συχνότητα  $6\omega_0$  (έκτη αρμονική - που έχει  $A_6 = 0$  στην περίπτωση μας).

Άρα, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Parseval για μονόπλευρη σειρά Fourier, θα έχουμε:

$$E = A_0^2 + \sum_{k=1}^6 \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_3^2}{2} + \frac{A_5^2}{2} = \frac{1}{3} \quad (3.49)$$

8. Οι συντελεστές στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος έχουν υπολογιστεί από τη σχέση

$$A_k e^{j\phi_k} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (3.50)$$

και είναι οι παρακάτω για  $k > 0$

$$\mathbf{A}_k e^{j\phi_k} = -\frac{\mathbf{A}}{j2\pi k} [(-1)^k - 1] \quad (3.51)$$

και  $\mathbf{A}_0 = 0$ . Βρείτε το σήμα σε ανάπτυγμα μονόπλευρης σειράς Fourier.

Λύση:

Ξέρουμε ότι η μονόπλευρη σειρά Fourier δίνεται από:

$$x(t) = A_0 + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}\right\} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \quad (3.52)$$

Παρατηρούμε ότι το  $A_k e^{j\phi_k}$  είναι μη μηδενικό και ίσο με  $\frac{A}{jk\pi}$ , για περιττά  $k$ , και  $A_k e^{j\phi_k} = 0$  για άρτια  $k$ . Άρα το  $A_k e^{j\phi_k}$  μπορεί να γραφεί ως:

$$A_k e^{j\phi_k} = \begin{cases} \frac{A}{jk\pi} = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$

Άρα εύκολα συμπεραίνουμε ότι  $A_k = \frac{A}{\pi k}$  και  $\phi_k = -\frac{\pi}{2}$ , για  $k$  περιττά.

Άρα θα είναι: ( $A_0 = X_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \text{ odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \cos(2\pi(2k+1)f_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Σημείωση: Αν δινόταν αρχικά ότι  $X_k = -\frac{A}{4j\pi k} [(-1)^k - 1]$  (δηλ. οι συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος), και ζητούσε το μονόπλευρο ανάπτυγμα, τότε πολύ απλά:

$$X_k = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad (3.54)$$

για  $k$  περιττά, με τον ίδιο συλλογισμό με παραπάνω, και θα είχαμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \text{ odd}}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{k \text{ odd}}^{+\infty} 2 \frac{A}{2\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) \\ &= \sum_{k \text{ odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

το ίδιο δηλαδή αποτέλεσμα.



9. Βρείτε την περίοδο του σήματος:

$$x(t) = \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2)$$

Λύση:

Θα χρειαστεί να γράψουμε το σήμα μας ως άθροισμα απλών ημιτόνων ή/και συνημιτόνων, ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε για την περιοδικότητά του. Είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2) \\ &= \left( \frac{1}{2j} e^{j5\pi t} e^{j\phi_1} - \frac{1}{2j} e^{-j5\pi t} e^{-j\phi_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{2j} e^{j2\pi t} e^{j\phi_2} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi t} e^{-j\phi_2} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} e^{j10\pi t} e^{j2\phi_1} - 2 \frac{1}{2j} \frac{1}{2j} - \frac{1}{4} e^{-j10\pi t} e^{-j2\phi_1} - \frac{1}{4} e^{j4\pi t} e^{j2\phi_2} - 2 \frac{1}{2j} \frac{1}{2j} - \frac{1}{4} e^{-j4\pi t} e^{-j2\phi_2} \\ &= -\frac{1}{4} (e^{j10\pi t} e^{j2\phi_1} + e^{-j10\pi t} e^{-j2\phi_1}) - \frac{1}{4} (e^{j4\pi t} e^{j2\phi_2} + e^{-j4\pi t} e^{-j2\phi_2}) + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{4} 2 \cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{4} 2 \cos(4\pi t + 2\phi_2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{2} \cos(4\pi t + 2\phi_2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cos(2\pi 5t + 2\phi_1) - \frac{1}{2} \cos(2\pi 2t + 2\phi_2) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Άρα η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος θα είναι  $f_0 = \text{MK}\Delta\{5, 2\} = 1$ . Άρα  $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1 \text{ sec}$ . Αλλιώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι  $T_0 = \text{EK}\Pi\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\} = \text{EK}\Pi\{0.2, 0.5\} = 1 \text{ sec}$ .

Σημείωση:

(α') Αν μας ζητούσε να δείξουμε ότι το σήμα είναι περιοδικό, και μετά να υπολογίσουμε την περίοδό του, τότε θα έπρεπε (για να είμαστε απόλυτα σωστοί) να πούμε ότι:

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ , που είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Έπειτα, θα υπολογίζαμε την περίοδο με όποιον τρόπο θέλαμε.

Ένα καλό αντιπαράδειγμα σχετικά με αυτή τη σημείωση, θα ήταν το

$$x(t) = 2 + \cos(10\pi t + \phi_1) - \frac{1}{2} \cos(4t - \phi_2)$$

Τότε, θα ήταν  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{10}$ , το οποίο προφανώς ΔΕΝ είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό.

(β') Εννοείται πως με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να λύσουμε την άσκηση, μπορούμε αμέσως (έστω, με ελάχιστες πράξεις ακόμα :) ) να απαντήσουμε σε ερωτήματα σχεδίασης φάσματος πλάτους και φάσης, όπως και ερωτήματα σχετικά με θεώρ. Parseval, κατανομής ενέργειας κλπ. Ό,τι χρειαζόμαστε για να απαντήσουμε σε αυτά υπάρχει έτοιμο στη λύση παραπάνω!

10. Έστω  $x(t)$  ένα πραγματικό σήμα. Σε πολλές εφαρμογές τηλεπικοινωνιών, ορίζεται η αναλυτική μορφή,  $\bar{x}(t)$ , του σήματος  $x(t)$  ως:

$$\bar{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

όπου  $\hat{x}(t)$  είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του σήματος, και ο οποίος ορίζεται ως:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.57)$$

Βρείτε το μετασχηματισμό Hilbert του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Λύση:

Είναι

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A}{t - \tau} d\tau = \frac{A}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{t - \tau} d\tau \quad (3.58)$$

Θέτω  $u = t - \tau \Rightarrow du = -d\tau, u_1 = t - \frac{T}{2}, u_2 = t + \frac{T}{2}$ .

Άρα θα είναι

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= -\frac{A}{\pi} \int_{t+\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} \frac{1}{u} du = \frac{A}{\pi} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{1}{u} du = \frac{A}{\pi} \left( \ln |u| \right) \Big|_{t+\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} \\ &= \frac{A}{\pi} \left( \ln \left| t + \frac{T}{2} \right| - \ln \left| t - \frac{T}{2} \right| \right) = \frac{A}{\pi} \ln \left| \frac{t + \frac{T}{2}}{t - \frac{T}{2}} \right| \end{aligned} \quad (3.59)$$

Σχόλιο:

Το αναλυτικό σήμα  $\bar{x}(t)$  είναι ένα σήμα το οποίο έχει το ίδιο φάσμα στις θετικές συχνότητες με το  $x(t)$ , αλλά έχει μηδενικό φάσμα στις αρνητικές συχνότητες. Η χρησιμότητά του συνίσταται στο γεγονός ότι διευκολύνει τις πράξεις με σήματα, και στο γεγονός ότι από την αναλυτική μορφή ενός πραγματικού σήματος  $x(t)$  μπορούμε πάντα να επιστρέψουμε στην αρχική μορφή του  $x(t)$  (και αυτό γιατί το φάσμα ενός πραγματικού σήματος είναι συζυγές συμμετρικό). Ουσιαστικά, ο μετασχηματισμός Hilbert  $\hat{x}(t)$  βοηθάει ακριβώς σε αυτό: 'κόβει' τις αρνητικές συνιστώσες του φάσματος του σήματος  $x(t)$ , αν στο  $x(t)$  προσθέσει κανείς το  $j\hat{x}(t)$ . Οπότε το  $\bar{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ , ως ένα τέτοιο άθροισμα του  $x(t)$  και του  $j\hat{x}(t)$ , καταλήγει να έχει μηδενικό φάσμα στην αρνητικές συχνότητες και μη μηδενικό φάσμα μόνο στις θετικές συχνότητες.

Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

έχει φασματικές συνιστώσες πλάτους  $\frac{A}{2}$  στις συχνότητες  $f_0$  και  $-f_0$ . Η αναλυτική του μορφή,  $\bar{x}(t)$ , θα πρέπει να έχει φασματικές συνιστώσες μόνο (!) στη θετική συχνότητα  $f_0$ . Έτσι, εύκολα (λέμε :) ) μπορούμε να πούμε ότι η αναλυτική μορφή του  $x(t)$  είναι:

$$\bar{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + jA \sin(2\pi f_0 t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, \quad (3.60)$$

του οποίου το φάσμα έχει μόνο μια συνιστώσα πλάτους  $A$  στη συχνότητα  $f_0$ , όπως βλέπετε. Άρα ο μετασχηματισμός Hilbert του  $A \cos 2\pi f_0 t$  είναι  $\hat{x}(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ .

Η όλη διαδικασία της αναπαράστασης σε αναλυτική μορφή χρησιμοποιείται στις τηλεπικοινωνίες, κυρίως σε μεθόδους διαμόρφωσης - αποδιαμόρφωσης μονής πλευρικής ζώνης. Όλα αυτά, απλά ως σημείωση, επ' ευκαιρία της άσκησης...

11. Ένα περιοδικό σήμα  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  με περίοδο 5 sec θέλουμε να καθυστερήσει κατά 0.05 sec. Πόση θα είναι η φάση μετατόπισής του;

Λύση:

Έστω  $t_0 = 0.05 \text{ sec}$ . Το καθυστερημένο κατά  $t_0$  σήμα εκφράζεται ως:

$$x(t - t_0) = A \cos(2\pi f_0(t - t_0)) = A \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Άρα

$$\phi = -2\pi f_0 t_0 = -2\pi \frac{1}{T_0} t_0 = -2\pi \frac{1}{5} 0.05 = -0.02\pi \quad (3.61)$$

Προφανώς, αν θέλαμε να προηγείται κατά  $t_0 = 0.05 \text{ sec}$ , θα είχαμε  $\phi = 0.02\pi$ , με παρόμοιο συλλογισμό με παραπάνω (θα ζητούσαμε τότε το  $x(t + t_0)$ ).

12. Έστω το σήμα

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \cos(2(k+1)\pi t + \phi_k)$$

Βρείτε την περίοδό του.

Λύση:

Βλέπουμε ότι για  $k = 1, k = 2, k = 3 \dots$ , παίρνουμε αντίστοιχα συχνότητες  $f_1 = 2, f_2 = 3, f_3 = 4 \dots$ . Προφανώς, όλες αυτές οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, της  $f_0 = 1$ . Άρα η περίοδος είναι  $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ . Προσέξτε, το γεγονός ότι δεν υπάρχει συνημίτονο με τέτοια συχνότητα στην παραπάνω αναπαράσταση, δε σημαίνει κάτι για την περίοδο του σήματος.

13. Ένα chirp σήμα μοναδιαίου πλάτους  $x(t)$  μεταβάλλει τη συχνότητά του από 3000 Hz σε 0 Hz σε χρόνο 2 sec.
- α) Σχεδιάστε την αναπαράσταση χρόνου-συχνότητας για το  $x(t)$ .
- β) Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος.

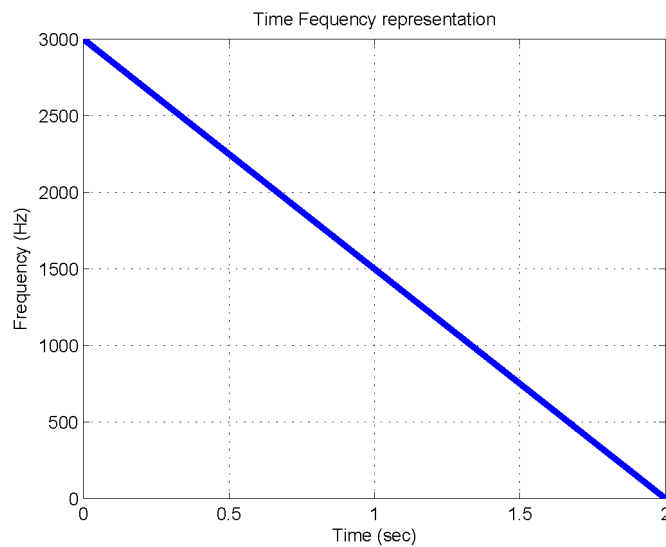
Λύση:

Ένα chirp σήμα (σήμα σειρήνας, στα ελληνικά :) ) είναι ένα σήμα το οποίο ΔΕ διατηρεί σταθερή συχνότητα με το πέρασμα του χρόνου (όπως κάνει το  $A \cos(2\pi f_0 t)$ , που έχει συχνότητα σταθερή και ίση με  $f_0$ ), αλλά όσο περνάει ο χρόνος, η συχνότητα μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το χρόνο. Σήματα σειρήνας μπορείτε να ακούσετε σε περιπολικά, ασθενοφόρα ή πυροσβεστικά οχήματα (μακριά από μας και τα τρία : ) ).

Το chirp σήμα ορίζεται ως  $x(t) = \cos(\theta(t))$ , με  $\theta(t) = 2\pi m t^2 + 2\pi f_0 t + \phi$ , με  $m$  μια σταθερά που λέγεται σταθερά διαμόρφωσης.

Η στιγμιαία συχνότητα του σήματος  $x(t)$  ορίζεται ως:  $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = 2mt + f_0$ .

- α) Ένα σήμα που μεταβάλλει γραμμικά τη συχνότητά του από 3000 Hz ως 0 Hz σε 2 sec, έχει αναπαράσταση χρόνου-συχνότητας όπως φαίνεται στο σχήμα 3.21.



Σχήμα 3.21: Σήμα σειρήνας Άσκησης 2.13

- β) Αφού το σήμα μεταβάλλεται γραμμικά σε χρονικό διάστημα  $T = 2$  sec από  $f_1 = 3000$  Hz ως  $f_2 = 0$  Hz, η στιγμιαία του συχνότητα θα είναι:

$$f_i(t) = \frac{f_2 - f_1}{T} t + f_1 = \frac{0 - 3000}{2} t + 3000 = -1500t + 3000$$

Άρα η φάση του θα είναι

$$\theta(t) = 2\pi \int_0^t (-1500u + 3000) du + \phi = 2\pi(-1500 \frac{t^2}{2} + 3000t) + \phi = -1500\pi t^2 + 6000\pi t + \phi$$

(αν δεν μπορείτε να θυμάστε τον τύπο της  $f_i(t)$ , μπορείτε απλά να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα  $(0,3000)$ ,  $(2,0)$  στο σχήμα του ερωτήματος (α). Αυτή θα είναι η  $f_i(t)$ ).

Άρα τελικά το σήμα θα είναι το  $x(t) = \cos(-1500\pi t^2 + 6000\pi t + \phi)$ .

#### 14. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)}$$

α) Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;

β) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.

Λύση:

Αναπτύσσουμε το σήμα μας σύμφωνα με τους τύπους του Euler:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t}) + \frac{1}{2j}(e^{j3t} - e^{-j3t})}{\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})} \\ &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})} (e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (3.62)$$

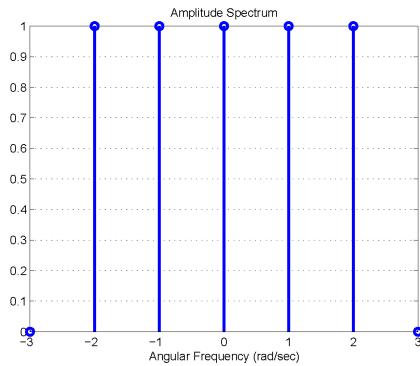
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (3.63)$$

για τα εκθετικά του αριθμητή. Θα είναι λοιπόν:

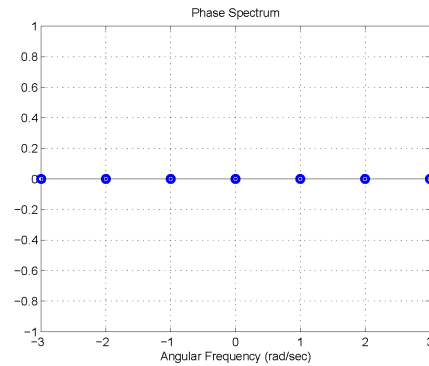
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})} (e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})} [(e^{jt})^2 - (e^{-jt})^2 + (e^{jt})^3 - (e^{-jt})^3] \\ &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})} [(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt}) + (e^{jt} - e^{-jt})(e^{j2t} + 1 + e^{-j2t})] \\ &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})} (e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t}) = e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t} \\ &= 1 + 2 \cos(t) + 2 \cos(2t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

α) Η περίοδος του σήματος θα είναι  $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{2\pi, \pi\} = 2\pi$ .

β) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνονται στα σχήματα 3.22.



(α) Φάσμα πλάτους 2.14



(β) Φάσμα φάσης 2.14

Σχήμα 3.22: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.14

15. Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα  $x(t)$  έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier, και για τις συχνότητες 100, 200, 300, 400 Hz έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:

$$X_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}, X_2 = 2e^{j\frac{\pi}{4}}, X_3 = 3e^{j\frac{\pi}{16}}, X_4 = 2e^{j\frac{\pi}{8}}$$

Ένα δεύτερο πραγματικό σήμα  $y(t)$  έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και για τις συχνότητες 50, 100, 150, 200 Hz έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:

$$Y_1 = 3e^{j\pi}, Y_2 = 2e^{j\frac{\pi}{3}}, Y_3 = e^{j\frac{\pi}{16}}, Y_4 = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Άλλες συχνότητες δεν υπάρχουν στα σήματα.

Υπολογίστε τα:

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x^2(t) dt$$

$$\frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} y^2(t) dt$$

$$\frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} x(t)y(t) dt$$

όπου  $T_1, T_2$  οι αντίστοιχες περίοδοι των  $x(t), y(t)$ .

Λύση:

Πολύ χρήσιμο θα μας φανεί εδώ το θεώρημα του Parseval για ένα και δυο σήματα:

Για ένα σήμα  $x(t)$  με περίοδο  $T_0$ , ισχύει ότι:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \quad (3.65)$$

δηλαδή η ενέργεια ενός σήματος σε μια περίοδο προς την περίοδο αυτή, ισούται με το άθροισμα των απολύτων τιμών στο τετράγωνο των συντελεστών Fourier του δίπλευρου αναπτύγματος.

Για ένα σήμα  $x(t)$  κι ένα σήμα  $y(t)$ , με κοινή περίοδο  $T_0$ , ισχύει ότι:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^*$$

δηλαδή το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών Fourier (με τον έναν εκ των δύο να είναι συζυγής) του δίπλευρου αναπτύγματος στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες  $kf_0$ ! Το τι ακριβώς σημαίνει αυτό, θα το δούμε σε λίγο.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = |X_{-4}|^2 + |X_{-3}|^2 + |X_{-2}|^2 + |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2$$

Το σήμα μας όμως είναι πραγματικό, άρα ισχύει:  $X_{-k} = X_k^*$ . Άρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & |X_{-4}|^2 + |X_{-3}|^2 + |X_{-2}|^2 + |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2 \\ &= |X_4^*|^2 + |X_3^*|^2 + |X_2^*|^2 + |X_1^*|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2 \\ &= |2e^{-j\frac{\pi}{8}}|^2 + |3e^{-j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{-j\frac{\pi}{4}}|^2 + |e^{-j\pi}|^2 + |e^{j\pi}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{4}}|^2 + |3e^{j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{8}}|^2 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι  $|Ae^{j\phi}|^2 = |A|^2|e^{j\phi}|^2 = |A|^2$ , γιατί είναι  $|e^{j\phi}|^2 = |\cos(\phi) + j\sin(\phi)|^2 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$  (μέτρο μιγαδικού αριθμού στο τετράγωνο). Άρα τελικά θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & |2e^{-j\frac{\pi}{8}}|^2 + |3e^{-j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{-j\frac{\pi}{4}}|^2 + |e^{-j\pi}|^2 + |e^{j\pi}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{4}}|^2 + |3e^{j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{8}}|^2 \\ &= |2|^2 + |3|^2 + |2|^2 + |1|^2 + |1|^2 + |2|^2 + |3|^2 + |2|^2 \\ &= 4 + 9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9 + 4 = 36 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Επαληθεύστε εσείς, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ότι  $\frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} y^2(t)dt = 30$ .

Για το τρίτο ολοκλήρωμα, πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα. Όπως προαναφέρθηκε, μπορούμε να εκφράσουμε τον τύπο του Parseval,  $\frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} x(t)y(t)dt$ , με λόγια: το ολοκλήρωμα σε μια κοινή περίοδο του γινομένου των δυο σημάτων στο χρόνο ισούται με το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών Fourier (με τον έναν εκ των δύο να είναι συζυγής) του δίπλευρου αναπτύγματος στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες  $kf_0$ .

Ας κάνουμε πρώτα σαφές το εξής (ΠΡΟΣΟΧΗ!): Δυο ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ πραγματικά περιοδικά σήματα με την ίδια περίοδο  $T_0$  αναπτύσσονται το καθένα σε μια σειρά Fourier στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες  $kf_0$ . Ας το δούμε μαθηματικά (μην τρομάζετε, ψυχραιμία!):

Ένα περιοδικό σήμα  $x(t)$  με περίοδο  $T_0$  (και άρα θεμελιώδη συχνότητα  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ ) αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Ένα δεύτερο περιοδικό σήμα  $y(t)$  με την ΙΔΙΑ περίοδο  $T_0$  (και άρα με την ΙΔΙΑ θεμελιώδη συχνότητα  $f_0$  που έχει και το  $x(t)$ ) αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

Βλέπετε ότι αυτό που αλλάζει είναι τα μιγαδικά πλάτη των εκθετικών συνιστωσών  $e^{j2\pi k f_0 t}$ . Για το πρώτο σήμα, τα μιγαδικά πλάτη είναι  $X_k$ , για το δεύτερο σήμα είναι  $Y_k$ . Όμως οι εκθετικές συνιστώσες είναι οι ίδιες και στις δυο περιπτώσεις:  $e^{j2\pi k f_0 t}$ ! Αυτό σημαίνει ότι ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΣΗΜΑΤΑ αναλύονται στις ίδιες εκθετικές συνιστώσες, δηλ. στις ίδιες αρμονικές συχνότητες. Δείτε το κι αλλιώς: αυτό σημαίνει ότι στα δίπλευρα φάσματα πλάτους (και φάσης) ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΗΜΑΤΩΝ, θα έχουμε μη μηδενικές τιμές στις συχνότητες  $k f_0$ , δηλ. στις  $\pm f_0, \pm 2f_0, \pm 3f_0, \pm 4f_0$  κλπ.

Αυτό συμβαίνει γιατί και τα δυο σήματα έχουν την ίδια περίοδο, άρα την ίδια θεμελιώδη συχνότητα  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ , οπότε οι αρμονικές συχνότητες που προκύπτουν κατά τα αναπτύγματα σε σειρά Fourier είναι οι ίδιες και στα δυο αναπτύγματα!

Σε μια τέτοια περίπτωση, η εφαρμογή του τύπου του Parseval γίνεται κατευθείαν:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = \dots + X_{-4}Y_{-4}^* + X_{-3}Y_{-3}^* + \dots + X_3Y_3^* + X_4Y_4^* + \dots$$

αφού το  $X_1$  αντιστοιχεί στη συχνότητα  $1f_0$ , όπως και το  $Y_1$ , το  $X_2$  αντιστοιχεί στη συχνότητα  $2f_0$ , όπως και το  $Y_2$ , το  $X_3$  αντιστοιχεί στη συχνότητα  $3f_0$ , όπως και το  $Y_3$  κ.ο.κ. , το ίδιο και για τα  $k < 0$ .

(Αν κάπου το “χάσατε”, ξαναδιαβάστε το! Είναι εύκολο, κι ας μην του φαίνεται :) )

Έστω ότι έχουμε κατανοήσει το παραπάνω :). Προσπαθώντας να εφαρμόσουμε τον τύπο του Parseval για τα  $x(t), y(t)$ , βλέπουμε ότι αυτός ισχύει ΜΟΝΟ για σήματα που έχουν την ίδια περίοδο  $T_0$  (ή αλλιώς, την ίδια θεμελιώδη συχνότητα  $f_0$ ). Στην περίπτωσή μας, το ένα σήμα ( $x(t)$ ) έχει μιγαδικά πλάτη στις συχνότητες 100, 200, 300, 400 Hz, και το άλλο σήμα ( $y(t)$ ) έχει μιγαδικά πλάτη στις συχνότητες 50, 100, 150, 200 Hz. Το να πούμε:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = X_{-4}Y_{-4}^* + X_{-3}Y_{-3}^* + \dots + X_3Y_3^* + X_4Y_4^*$$



και μετά αντικαθιστώντας αμέσως τις τιμές από την εκφώνηση, θα ήταν ΛΑΘΟΣ! Γιατί; Γιατί τα  $X_k, Y_k$  δεν ανταποκρίνονται στις ίδιες αρμονικές συχνότητες! Για παράδειγμα, το  $X_1$  είναι το μιγαδικό πλάτος που αντιστοιχεί στα 100 Hz, ενώ το  $Y_1$  είναι το μιγαδικό πλάτος που αντιστοιχεί στα 50 Hz! Οπότε δεν ισχύει το άθροισμα γινομένων που γράψαμε μόλις πιο πάνω. Πρέπει να υπάρχει “αντιστοιχία” μεταξύ των πλατών, δηλ. να αναφέρονται στις ίδιες συχνότητες, άσχετα με τον δείκτη  $k$  που έχουν!

Άρα τελικά (ουφ!...) αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε τα  $X_k, Y_k$  των ίδιων συχνοτήτων. Συγκεκριμένα:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = \underbrace{X_{-1}^* Y_{-2}} + \underbrace{X_{-2}^* Y_{-4}} + \underbrace{X_1 Y_2^*} + \underbrace{X_2 Y_4^*}$$

με το πρώτο άγκιστρο να δείχνει τα μιγαδικά πλάτη των  $-100Hz$ , το δεύτερο των  $-200Hz$ , το τρίτο των  $100Hz$  και το τέταρτο των  $200Hz$ .

Επειδή τα σήματα είναι πραγματικά, ισχύει  $X_{-k} = X_k^*$ , άρα θα είναι τελικά:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* &= X_1 Y_2^* + X_2 Y_4^* + X_1 Y_2^* + X_2 Y_4^* \\ &= e^{j\frac{\pi}{3}} 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{3}} 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \end{aligned} \quad (3.67)$$

αποτέλεσμα λογικό, γιατί το ολοκλήρωμα δυο πραγματικών σημάτων δε γίνεται να μας δώσει μιγαδικό αποτέλεσμα. Αν περίσσευε κάποιο  $e^{j\phi}$ , τότε κάποιο λάθος θα είχαμε κάνει.

Σημείωση - για προχωρημένους :-) : Αυτό που κάναμε “σιωπηρά” παραπάνω είναι το εξής:

Παρατηρούμε ότι το  $x(t)$  έχει περίοδο  $T_1 = \frac{1}{100} = 0.01sec$  και το  $y(t)$  έχει περίοδο  $T_2 = \frac{1}{50} = 0.02sec$ , δηλ.  $T_2 = 2T_1$ . Οπότε μπορούμε να “θεωρήσουμε” (κάπως τεχνική προσέγγιση αυτή) ότι το  $x(t)$  είναι περιοδικό με περίοδο  $T_1 = 0.02sec$  και άρα θεμελιώδη συχνότητα  $f_0 = 50Hz$ . Οπότε οι “νέες” αρμονικές του θα είναι  $[\pm 50, \pm 100, \pm 150, \pm 200, \pm 250, \pm 300, \pm 350, \pm 400]$  Hz, και βέβαια στα  $\pm 50, \pm 150, \pm 250, \pm 350$  Hz τα μιγαδικά πλάτη θα είναι μηδέν. Οπότε για το  $x(t)$  έχουμε τους “νέους” συντελεστές Fourier,  $X'_k$ , οι οποίοι είναι:

$$X'_k = [X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5, X'_6, X'_7, X'_8] = [0, X_1, 0, X_2, 0, X_3, 0, X_4] \quad (3.68)$$

για τις συχνότητες  $[50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400]$ .

Τώρα υπάρχει αντιστοιχία συχνοτήτων με το  $Y_k$ , οπότε πλέον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

τον τύπο του Parseval ως:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} x(t)y(t)dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X'_k Y_k^* \\
 &= X'_{-4} Y_{-4}^* + X'_{-3} Y_{-3}^* + \dots + X'_3 Y_3^* + X'_4 Y_4^* \\
 &= X_4^* Y_4 + X_3^* Y_3 + \dots + X_3 Y_3^* + X_4 Y_4^* \\
 &= \dots = 8
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

όπως παραπάνω.

16. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα

$$x(t) = \sin(\pi f_0 t) \tag{3.70}$$

το οποίο έχει περίοδο  $T_0$ .

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
 X_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} t\right) dt \\
 &= -\frac{1}{T_0} \frac{T_0}{\pi} \int_0^{T_0} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' dt \\
 &= -\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) \Big|_0^{T_0} \\
 &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= -\frac{1}{T_0} \frac{T_0}{\pi} \int_0^{T_0} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= -\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{T_0} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) \left(e^{-j2\pi k f_0 t}\right)' dt \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} (-j2\pi k f_0) \int_0^{T_0} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0} \int_0^{T_0} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{T_0}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' e^{-k2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_0^{T_0} + \frac{2jk}{T_0} \frac{T_0}{\pi} \left(-\frac{2j\pi k}{T_0}\right) \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4k^2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2 X_k \iff \\
X_k - 4k^2 X_k &= \frac{2}{\pi} \\
X_k(1 - 4k^2) &= \frac{2}{\pi} \\
X_k &= \frac{2}{\pi(1 - 4k^2)} \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Άρα θα είναι

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{2}{\pi(1 - 4k^2)} e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1 - 4k^2)} \cos(2\pi k f_0 t) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - 4k^2)} \cos(2\pi k f_0 t) \tag{3.73}
\end{aligned}$$

17. Δείξτε ότι για πραγματικά σήματα ισχύει:

- Άρτιο σήμα X Άρτιο σήμα = Άρτιο σήμα
- Περιττό σήμα X Περιττό σήμα = Άρτιο σήμα
- Άρτιο σήμα X Περιττό σήμα = Περιττό σήμα

Λύση:

•

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Αν } x(t) \text{ άρτιο} \Leftrightarrow x(t) = x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ άρτιο} \Leftrightarrow y(t) = y(-t) \end{array} \right\} \Rightarrow x(t)y(t) = x(-t)y(-t) \Rightarrow z(t) = z(-t) \quad (3.74)$$

που δηλώνει ότι το  $z(t)$  είναι άρτιο.

•

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Αν } x(t) \text{ περιττό} \Leftrightarrow x(t) = -x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό} \Leftrightarrow y(t) = -y(-t) \end{array} \right\} \Rightarrow x(t)y(t) = x(-t)y(-t) \Rightarrow z(t) = z(-t) \quad (3.75)$$

που δηλώνει ότι το  $z(t)$  είναι άρτιο.

•

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Αν } x(t) \text{ άρτιο} \Leftrightarrow x(t) = x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό} \Leftrightarrow y(t) = -y(-t) \end{array} \right\} \Rightarrow x(t)y(t) = -x(-t)y(-t) \Rightarrow z(t) = -z(-t) \quad (3.76)$$

που δηλώνει ότι το  $z(t)$  είναι περιττό.

18. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t) dt$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval.

Λύση:

Το θεώρημα του Parseval συνοψίζεται στην εξίσωση

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t) dt = X_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}$$

η οποία περιλαμβάνει και τη μονόπλευρη και τη δίπλευρη (εκθετική) αναπαράσταση της σειράς Fourier.

Αναλύουμε το σήμα σε σειρά Fourier:

$$x(t) = \sin^5(t) = \left( \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)^5 = \frac{(e^{jt} - e^{-jt})^5}{32j} \quad (3.77)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Newton,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n \quad (3.78)$$

η σχέση (3.77) γράφεται:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{32j} (e^{j5t} - 5e^{j4t}e^{-jt} + 10e^{j3t}e^{-j2t} - 10e^{j2t}e^{-j3t} + 5e^{jt}e^{-j4t} - e^{-j5t}) \\ &= \frac{1}{32j} (e^{j5t} - e^{-j5t} - 5e^{j3t} + 5e^{-j3t} + 10e^{jt} - 10e^{-jt}) \\ &= \frac{1}{32j} (2j \sin(5t) - 10j \sin(3t) + 20j \sin(t)) \\ &= \frac{1}{16} \sin(5t) - \frac{5}{16} \sin(3t) + \frac{5}{8} \sin(t) \end{aligned}$$

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^5(t))^2 dt = \frac{126}{512} \Rightarrow \int_0^{2\pi} (\sin^5(t))^2 dt = 2\pi \frac{126}{512} \quad (3.79)$$

που είναι και το ζητούμενο.

19. Έστω το περιοδικό σήμα  $x(t)$  που ορίζεται σε μια περίοδο  $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$  ως:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq t_c \\ 0, & t_c < |t| \leq T_0/2 \end{cases}$$

με  $t_c < T_0/2$ . Αναπτύξτε το σε σειρά Fourier, για  $t_c = T_0/4$  και  $t_c = T_0/10$ .

Λύση:

Θα αναπτύξουμε το περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier χωρίς αντικατάσταση της  $t_c$ , η οποία θα γίνει στο τέλος. Είναι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-t_c}^{t_c} 1 dt = \frac{1}{T_0} t \Big|_{-t_c}^{t_c} = \frac{1}{T_0} (t_c + t_c) = \frac{2t_c}{T_0} \quad (3.80)$$

και

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-t_c}^{t_c} e^{-j2\pi k f_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T_0} \frac{1}{-j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t} \Big|_{-t_c}^{t_c} \\
&= -\frac{1}{j2\pi k} \left( e^{-j2\pi k f_0 t_c} - e^{j2\pi k f_0 t_c} \right) \\
&= \frac{1}{j2\pi k} 2j \sin(2\pi k f_0 t_c) \\
&= \frac{\sin(2\pi k f_0 t_c)}{\pi k}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

- Για  $t_c = \frac{T_0}{4}$ , έχουμε

$$X_0 = \frac{2T_0/4}{T_0} = \frac{1}{2} \tag{3.82}$$

$$X_k = \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/4)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2} \text{sinc}(k/2) \tag{3.83}$$

- Για  $t_c = \frac{T_0}{10}$ , έχουμε

$$X_0 = \frac{2T_0/10}{T_0} = \frac{1}{5} \tag{3.84}$$

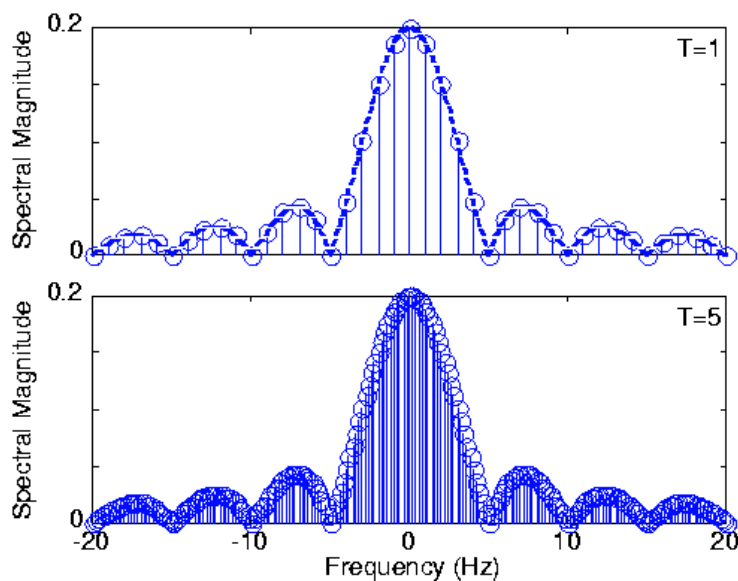
$$X_k = \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/10)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/5)}{\pi k} = \frac{1}{5} \text{sinc}(k/5) \tag{3.85}$$

## Κεφάλαιο 4

# Ο Μετασχηματισμός Fourier

### 4.1 Ο μετασχ. Fourier διαισθητικά

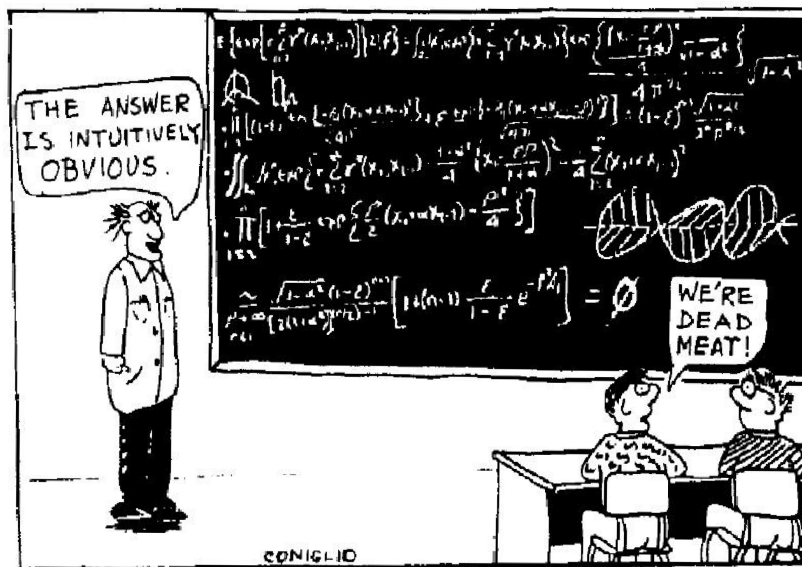
Ως τώρα έχουμε δει ότι ένα περιοδικό σήμα αναλύεται σε ένα άθροισμα άπειρων συνημιτόνων με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους. Αυτή η ανάλυση ονομάστηκε Ανάλυση σε Σειρές Fourier. Ο μετασχ. Fourier ορίζεται εύκολα ως η επέκταση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο, όταν δηλαδή το σήμα πλησιάζει στο να ΜΗΝ είναι πια περιοδικό. Άρα αφορά κυρίως ΜΗ περιοδικά σήματα. Τότε τα  $X_k$  παύουν να ορίζονται για ακέραια  $k$  και για συγκεκριμένες συχνότητες  $kf_0$ , και ορίζονται πλέον για κάθε συχνότητα  $f$ , σε ένα συνεχές φάσμα  $X(f)$ . Για την τυπική απόδειξη, δείτε τις σημειώσεις σας. Διαισθητικά, μπορούμε να “αποδείξουμε” αυτή τη σχέση ως εξής. Δείτε το σχήμα 4.1. Στο πάνω τμήμα, βλέπουμε το φάσμα πλάτους ενός περιοδικού σήματος, που



Σχήμα 4.1: Διαισθητική απόδειξη της σχέσης μεταξύ των σειρών Fourier και του μετασχ. Fourier.

έχει περίοδο  $T = 1$ . Βλέπετε πως οι φασματικές γραμμές είναι σχετικά αραιές (είναι οι κάθετες γραμμές

με τα κυκλάκια στην κορυφή). Η θεμελιώδης συχνότητα είναι  $f_0 = 1/T = 1/1 = 1$  και τα πολλαπλάσιά της βρίσκονται στις θέσεις  $kf_0 = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Η διακεκομμένη γραμμή λέγεται φασματική περιβάλλουσα, και απλά θα μας βοηθήσει οπτικά για τη σύγκριση με το κάτω τμήμα του σχήματος. Δείτε τώρα το κάτω τμήμα του σχήματος 4.1. Βλέπετε πως αν μεγαλώσουμε την περίοδο, και γίνει  $T = 5$ , τότε η θεμελιώδης συχνότητα γίνεται  $f_0 = 1/T = 1/5 = 0.2$  και είναι πιο μικρή, και άρα και τα πολλαπλάσιά της,  $kf_0 = 0.2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , θα είναι πιο κοντά το ένα με το άλλο. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο φάσμα πλάτους. Οι φασματικές γραμμές είναι πολύ πιο κοντά απ' ό τι πριν. Σκεφτείτε να επαναλαμβάνουμε συνέχεια αυτή τη διαδικασία για όλο και πιο μεγάλες περιόδους  $T$ . Η θεμελιώδης συχνότητα  $f_0$  γίνεται συνεχώς όλο και πιο μικρή, και οι φασματικές γραμμές έρχονται όλο και πιο κοντά, καθώς τα  $kf_0$  είναι όλο και πιο κοντά το ένα στο άλλο. Όταν το  $T$  γίνει πολύ πολύ πολύ μεγάλο, και τείνει προς το  $+\infty$  – δηλ. το σήμα ΔΕΝ θεωρείται πια περιοδικό – τότε το  $f_0$  θα γίνει απειροστά μικρό, και τα πολλαπλάσιά του,  $kf_0$  θα είναι τόσο κοντά το ένα με το άλλο που δε θα ορίζουν πια διακριτές τιμές, αλλά ένα συνεχή άξονα του  $f$ ! Έτσι, οι φασματικές γραμμές θα είναι απειροστά κοντά μεταξύ τους, τόσο κοντά που πλέον δε θα είναι φασματικές γραμμές, αλλά θα ορίζουν μια συνεχή συνάρτηση  $X(f)$ ! ;-). Αυτή είναι η διαισθητική προσέγγιση της σχέσης μετασχ. Fourier και της σειράς Fourier...



Σχήμα 4.2: Βασιστείτε στη διαίσθησή σας!!



## 4.2 Ο μετασχ. Fourier

Ας θυμηθούμε τον ορισμό:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1)$$

και τον αντίστροφο μετασχ. Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (4.2)$$

Η σχέση (4.1) μας αναλύει ένα μη περιοδικό σήμα σε ένα συνεχές φάσμα  $X(f)$ , ενώ η σχέση (4.2) μας συνθέτει το σήμα  $x(t)$  με ένα συνεχές άθροισμα εκθετικών σημάτων, που έχει βάρος  $X(f)$ .

Η ομοιότητα με τις σειρές Fourier είναι, όπως είδαμε, αρκετά μεγάλη. Όπως, για πραγματικά περιοδικά σήματα, δυο εκθετικά στις συχνότητες  $\pm kf_0$  δίνουν ένα συνημίτονο συχνότητας  $kf_0$ , αυτό συμβαίνει και εδώ. Έστω μια απειροστά μικρή συχνότητα  $\Delta f$  του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και η αντίστοιχη συχνότητα  $-\Delta f$  και το πλάτος καθενιάς θα είναι  $X(\Delta f)$  και  $X^*(\Delta f)$  αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + X^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |X(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\ &= |X(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |X(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \\ &= 2|X(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους  $2|X(\Delta f)|$ . Έτσι, ΚΑΙ ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα σήμα σε ημίτονα στην πραγματικότητα! Απλά μια τέτοια ανάλυση όπως τη δείξαμε μόλις δεν έχει πρακτική σημασία, παρά μόνο για την καλύτερη κατανόηση του μετασχηματισμού.

### 4.2.1 Ύπαρξη του μετασχ. Fourier

Όπως προείπαμε, ο μετασχ. Fourier εφαρμόζεται κυρίως σε ΜΗ περιοδικά σήματα. Για να υπάρχει ο μετασχ. Fourier, πρέπει το σήμα που αναλύουμε να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, δηλ. να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.4)$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το εμβαδό που περικλείεται από τον άξονα  $t't$  και το σήμα μας πρέπει να είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα, το σήμα  $x(t) = e^{\alpha t}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ΔΕΝ έχει μετασχηματισμό Fourier γιατί δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Το ίδιο και το  $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , όπου  $u(t)$  η βηματική

συνάρτηση. Όμως, το σήμα  $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^-$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, άρα ο μετασχ. Fourier υπάρχει. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Τα δυο πρώτα σήματα είναι σήματα ισχύος, και για αυτά τα σήματα, ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει μέσω του ολοκληρώματος Fourier, γιατί το ολοκλήρωμα (4.1) δε συγκλίνει. Ο λόγος είναι ότι τα σήματα αυτά δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα, δηλ. η σχέση (4.4) δεν ισχύει. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν έχουν μετασχ. Fourier, ΙΣΩΣ έχουν αλλά δεν υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος αυτού - περισσότερα θα δείτε παρακάτω. Αντίθετα, το τρίτο σήμα ΕΙΝΑΙ απολύτως ολοκληρώσιμο, και άρα έχει μετασχ. Fourier.

Ας ξεκινήσουμε κάποιες παρατηρήσεις...

1. Έχουμε μιλήσει για τα σήματα ισχύος, που είναι άπειρα σε διάρκεια, κι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια. Στον αντίποδα, υπάρχουν τα σήματα ενέργειας, που έχουν πεπερασμένη ενέργεια και μηδενική ισχύ. Θυμίζουμε οτι σήματα ενέργειας είναι τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (4.5)$$

μια σχέση που μοιάζει με τη σχέση (4.4) αλλά όχι ακριβώς. Τα σήματα ενέργειας έχουν ΠΑΝΤΑ μετασχηματισμό Fourier. Ένας γρήγορος τρόπος για να δείτε αν ένα σήμα έχει μετασχηματισμό Fourier είναι να δείτε τη γραφική παράστασή του. Αν το εμβαδό μεταξύ του σήματος και του οριζόντιου άξονα είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του και μπορείτε να τον υπολογίσετε με τον ορισμό.

2. Γνωρίζετε ότι

$$x(t) = A \text{rect}(t/T) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}(fT) \quad (4.6)$$

και

$$y(t) = A \text{tri}(t/T) \longleftrightarrow Y(f) = AT \text{sinc}^2(fT) \quad (4.7)$$

με

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \quad (4.8)$$

Πολύ γνωστά και πολύ χρήσιμα ζευγάρια μετασχ. Fourier. Παρατηρήστε ότι το  $\text{sinc}(fT)$  μηδενίζεται στις θέσεις  $f = \pm \frac{k}{T}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Το  $X(f)$  είναι εν γένει μιγαδική συνάρτηση, άρα κι αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή μέτρο-φάση:

$$X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)} \quad (4.9)$$

όπου το  $|X(f)|$  είναι πάντα θετικό και λέγεται μέτρο και  $\angle X(f)$  λέγεται φάση του μετασχ. Fourier, αντίστοιχα. Για τα παραδείγματά μας, είναι

$$|X(f)| = |\text{sinc}(fT)|, \quad |Y(f)| = \text{sinc}^2(fT) \quad (4.10)$$

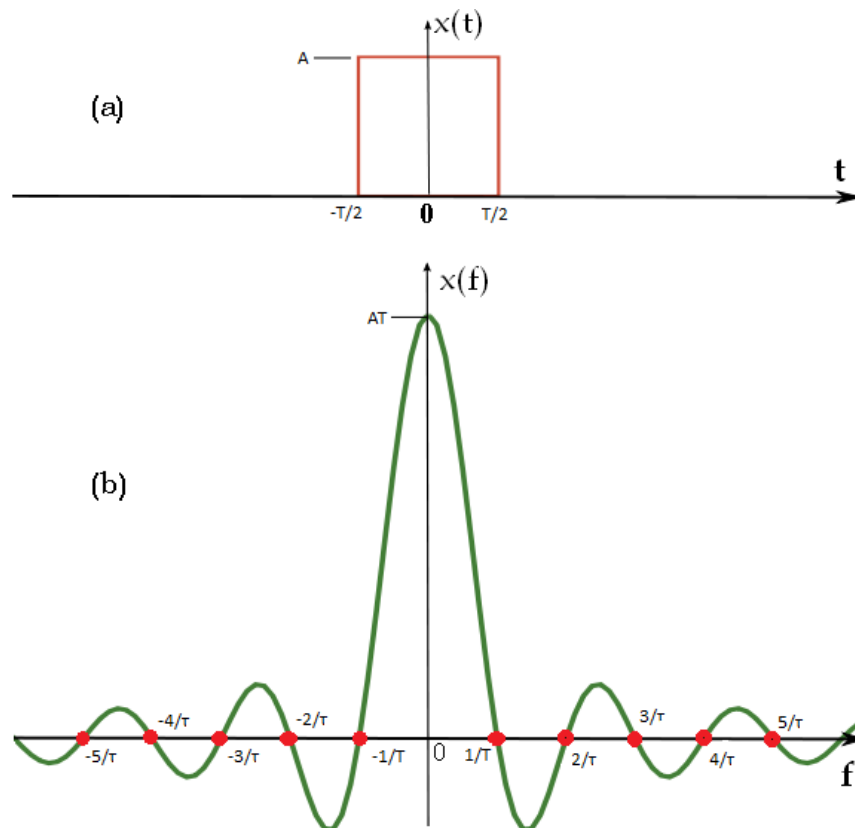
και

$$\angle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{1+l}{T} \leq f < \frac{2+l}{T}, \\ -\pi, & -\frac{2+l}{T} \leq f < -\frac{1+l}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} \leq |f| < \frac{l+1}{T} \end{cases} \quad (4.11)$$

με  $l = 0, 2, 4, \dots$ , και

$$\angle Y(f) = 0. \quad (4.12)$$

Για να εξηγήσουμε λίγο τις τιμές της φάσης τώρα (μην τρομάζετε, αυτά τα περίεργα διαστήματα



Σχήμα 4.3: (α) Σήμα τετραγωνικού παραθύρου (β) Μετασχ. Fourier

για την  $f$  είναι απλά τα διαστήματα που ορίζουν οι κόκκινες τελίτσες στο σχήμα 4.3)... Προφανώς, επειδή το  $Y(f)$  είναι μόνιμα θετικό, για κάθε  $f$ , γι' αυτό και η φάση του είναι πάντα μηδέν. Αντίθετα, το  $X(f)$  είναι σε κάποια διαστήματα θετικό και σε κάποια αρνητικό. Δείτε το σχήμα 4.3. Εκεί που το  $X(f)$  είναι θετικό, η φάση είναι μηδέν. Εκεί που είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις:

- αν βρισκόμαστε σε θετικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -\text{sinc}(fT) = \text{sinc}(fT)e^{j\pi}, \quad \frac{1+l}{T} \leq f < \frac{2+l}{T}. \quad (4.13)$$

Άρα η φάση είναι  $\angle X(f) = \pi$  σε αυτά τα διαστήματα.

- αν βρισκόμαστε σε αρνητικές συχνότητες, τότε έχουμε ότι

$$X(f) = -\text{sinc}(fT) = \text{sinc}(fT)e^{-j\pi}, \quad -\frac{2+l}{T} \leq f < -\frac{1+l}{T}. \quad (4.14)$$

Άρα η φάση είναι  $\angle X(f) = -\pi$  σε αυτά τα διαστήματα.

3. Αξίζει να αναφέρουμε ότι κι εδώ ισχύει η ιδέα της προβολής που είδαμε στις σειρές Fourier. Μόνο που εδώ δεν προβάλλουμε το σήμα σε εκθετικά συγκεκριμένων συχνοτήτων  $kf_0$ , αλλά σε ΟΛΑ τα εκθετικά, όλων των συχνοτήτων!
4. Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier ενός άλλου συνήθους σήματος ενέργειας, του  $x(t) = e^{at}u(t)$ ,  $a < 0$ . Είναι:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-j2\pi f} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-j2\pi f)t} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο  $\infty$ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει να ισχύει  $a - j2\pi f < 0$ . Ένα λεπτό όμως. Το  $a - j2\pi f$  είναι μιγαδικός αριθμός. Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί ΔΕΝ έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει να ισχύει  $a - j2\pi f < 0$  είναι άνευ νοήματος, είναι ολότελα λάθος! :-) Άρα τι κάνουμε;

Θα εκμεταλλευτούμε ένα γνωστό λήμμα της Μιγαδικής Ανάλυσης (μην τρομάζετε, είναι εύκολο, θα το ξαναδείτε και παρακάτω, στο μετασχ. Laplace), που λέει ότι

$$\text{εάν } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \text{ και } g(t) \text{ είναι κατ' απόλυτη τιμή φραγμένη, τότε} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)g(t) = 0.$$

Για να δούμε αν μπορούμε κατ' αρχάς να το δείξουμε αυτό για το σήμα μας. Μπορούμε να γράψουμε το σήμα μας ως γινόμενο μιας φραγμένης και μιας συνάρτησης που συγκλίνει στο μηδέν; Είναι:

$$e^{(a-j2\pi f)t} = e^{at}e^{-j2\pi ft} = f(t)g(t) \quad (4.16)$$

Όμως

$$|e^{-j2\pi ft}| = \sqrt{\cos^2(2\pi ft) + \sin^2(2\pi ft)} = \sqrt{1} = 1, \quad (4.17)$$

για κάθε  $f, t$ . Οπότε να η φραγμένη μας συνάρτηση, η  $g(t) = e^{-j2\pi ft}$ . Άρα αρκεί να δούμε πότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} = 0 \quad (4.18)$$

και μετά μπορούμε να συνεχίσουμε τη λύση της άσκησης μας. Εδώ πλέον, στον εκθέτη μας έχουμε πραγματικό αριθμό, άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση  $e^{at}$  φθίνει στο 0 όταν  $t \rightarrow +\infty$ , **μόνο**

αν  $a < 0$ , που ισχύει από υπόθεση (κι αν δεν ίσχυε, θα το βάζαμε με το ζόρι για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα :-)). Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$X(f) = \frac{1}{a - j2\pi f} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-j2\pi f)t} - 1 \right) = \frac{1}{a - j2\pi f} (0 - 1) = \frac{1}{j2\pi f - a}, \quad a < 0 \quad (4.19)$$

Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος  $x(t) = e^{at}u(t)$ ,  $a < 0$ , είναι

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a < 0 \iff X(f) = \frac{1}{j2\pi f - a} \quad (4.20)$$

#### 4.2.2 Μετασχ. Fourier και Σήματα Ισχύος

Όμως, εμείς επειδή είμαστε περίεργοι :-), θέλουμε να μπορούμε να βρίσκουμε τον μετασχ. Fourier και για σήματα ισχύος, όχι μόνο ενέργειας. Ας προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχ. Fourier σε ένα σήμα ισχύος όπως το  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ .

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(-j2\pi(f-f_0))} e^{-j2\pi(f-f_0)t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \frac{1}{(-j2\pi(f+f_0))} e^{-j2\pi(f+f_0)t} \Big|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε από δω και πέρα, και να υπολογίσουμε τις τιμές των ολοκληρωμάτων, πρέπει να θέσουμε περιορισμούς στα  $f - f_0$ ,  $f + f_0$ , ώστε τα ολοκλήρωμα να μην αποκλίνουν στο  $\pm\infty$ . Συγκεκριμένα, πρέπει να θεωρήσουμε ότι  $f - f_0 > 0 \iff f > f_0$  για το πρώτο ολοκλήρωμα και  $f + f_0 > 0 \iff f > -f_0$  για το δεύτερο ολοκλήρωμα, όταν  $t = \infty$ . Αντίστροφα για όταν  $t = -\infty$ . Αυτό όμως δεν επιτρέπεται! Ο μετασχ. Fourier πρέπει να ορίζεται για κάθε τιμή του  $f$ ! Άρα ο ορισμός αποτυγχάνει. Τι κάνουμε τότε; Τότε μπαίνει στο παιχνίδι η περίφημη *συνάρτηση Δέλτα*,  $\delta(t)$ . Αυτή η συνάρτηση είναι περίεργο πράγμα, μαθηματικοειδές από τα λίγα! :-). Η συνάρτηση Δέλτα δεν είναι ακριβώς συνάρτηση αλλά κατανομή, ή αλλιώς γενικευμένη συνάρτηση, οπότε δε συμπεριφέρεται όπως οι γνωστές μας συναρτήσεις. Η συνάρτηση Δέλτα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

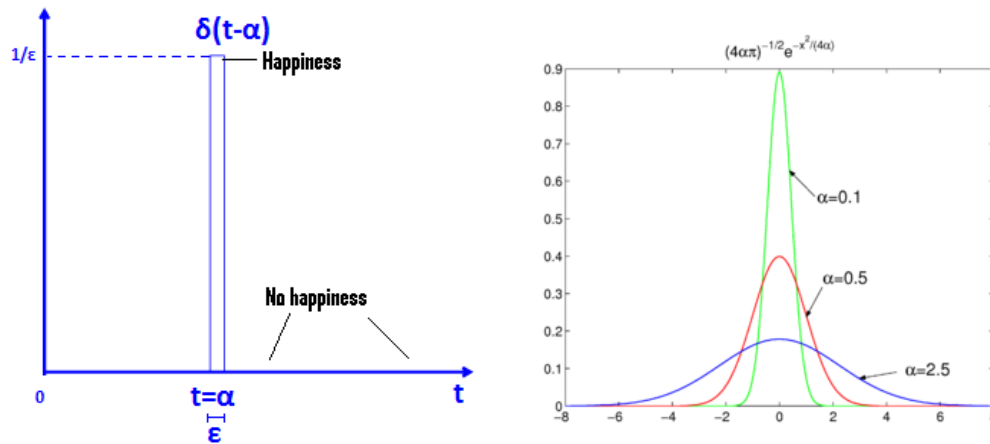
$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (4.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.23)$$

Αυτές σημαίνουν ότι μπορείτε να φανταστείτε τη συνάρτηση Δέλτα σαν ένα πολύ πολύ λεπτό τετραγωνικό παλμό,

$$\frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (4.24)$$

όπου το  $\epsilon$ , δηλ. το εύρος του παλμού, τείνει στο 0, οπότε το πλάτος του παλμού,  $\frac{1}{\epsilon}$  τείνει στο άπειρο. Δείτε το σχήμα 4.4α'. Ο συνδυασμός αυτών των δυο κρατάει όμως το συνολικό εμβαδόν της συνάρ-



(α) Προσέγγιση  $\delta(t)$  από τετραγωνικό παλμό (β) Προσέγγιση  $\delta(t)$  από Γκαουσιανή συνάρτηση

Σχήμα 4.4: Προσεγγίσεις της συνάρτησης Δέλτα

της Δέλτα σταθερό και ίσο με τη μονάδα, όπως μας λέει η σχέση 4.23. Πολύ διαισθητική αυτή η περιγραφή όμως, μόνο για τους σκοπούς του μαθήματος! :-). Ο τετραγωνικός παλμός δεν είναι η μόνη “φυσιολογική” συνάρτηση που προσεγγίζει τη συνάρτηση Δέλτα. Υπάρχουν κι άλλες, για παράδειγμα η συνάρτηση

$$x(t) = \frac{1}{4a\pi} e^{-\frac{x^2}{4a}} \quad (4.25)$$

η οποία φαίνεται στο σχήμα 4.4β' και στο οποίο βλέπετε ότι όσο  $a \rightarrow 0$ , τόσο η συνάρτηση προσεγγίζει τη συνάρτηση Δέλτα. Επίσης, και η γνωστή μας συνάρτηση *sinc*, που φαίνεται στο σχήμα 4.3β', μπορεί να προσεγγίζει πολύ καλά τη συνάρτηση Δέλτα. Γενικά, όποια συνάρτηση ικανοποιεί τις σχέσεις 4.23 και 4.22, τότε είναι και αυτή μια συνάρτηση Δέλτα! :-). Επειδή, όπως βλέπετε, η γενικότερη συμπεριφορά των γενικευμένων συναρτήσεων είναι έξω από τους σκοπούς των σημειώσεων και του μαθήματος, μας αρκεί να χρησιμοποιούμε μόνο τις ιδιότητές της. Επίσης, η συνάρτηση Δέλτα χρησιμοποιείται όποτε θέλουμε να ορίσουμε συναρτήσεις που έχουν τιμή ΜΟΝΟ σε σημεία, και παντού αλλού είναι μηδέν. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 2, & t = 0, \\ -1, & t = 2, \\ 3, & t = 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (4.26)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 2) + 3\delta(t - 5) \quad (4.27)$$

Με χρήση του μετασχ. Fourier της συνάρτησης Δέλτα, ο οποίος είναι

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi ft_0} \quad (4.28)$$

μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω συνάρτησης, και ο οποίος είναι

$$X(f) = 2 - e^{-j2\pi 2f} + 3e^{-j2\pi 5f} \quad (4.29)$$

Επανερχόμενοι στο παράδειγμά μας με το  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , ο μετασχ. Fourier του θα είναι

$$X(f) = F\left\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \quad (4.30)$$

Υπάρχουν χαρακτηριστικές ιδιότητες της στη βιβλιογραφία, που μας διευκολύνουν πολύ στη χρήση της. Οι σημαντικότερες από αυτές είναι οι παρακάτω:

$$x(t - t_0) * \delta(t - t_1) = x(t - t_0 - t_1) \quad (4.31)$$

$$x(t - t_0)\delta(t - t_1) = x(t_0 + t_1)\delta(t - t_1) \quad (4.32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0) \quad (4.33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (4.34)$$

όπου \* δηλώνει την πράξη της συνέλιξης.

Επίσης, υπάρχουν άλλες τεχνικές για τον υπολογισμό του μετασχ. Fourier σημάτων ισχύος. Για παράδειγμα, ένα σήμα ισχύος  $\hat{x}(t)$  μπορεί να γραφεί ως άθροισμα της μέσης τιμής του και ενός σήματος που έχει μηδενική μέση τιμή, δηλ.

$$\hat{x}(t) = x_0 + x_z(t) \quad (4.35)$$

όπου  $x_0$  είναι η μέση τιμή του σήματος και  $x_z(t)$  το τμήμα του σήματος με τη μηδενική μέση τιμή. Προφανώς, ο μετασχ. Fourier του θα είναι:

$$\hat{X}(f) = x_0\delta(f) + F\{x_z(t)\} \quad (4.36)$$

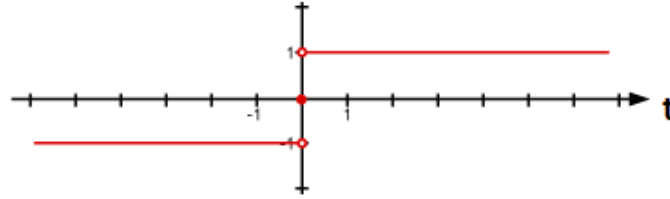
Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του  $x_z(t)$ . Για παράδειγμα, η γνωστή βηματική συνάρτηση  $x(t) = u(t)$  δεν έχει μηδενική μέση τιμή. Μπορεί όμως να γραφεί όπως παραπάνω ως:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \quad (4.37)$$

όπου  $\text{sgn}(t)$  είναι η συνάρτηση προσήμου

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

Η συνάρτηση προσήμου φαίνεται στο σχήμα 4.5. Προφανώς  $x_z(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$  και  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier της συνάρτησης προσήμου. Αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της

Σχήμα 4.5: Σήμα προσήμου  $sgn(t)$ 

παραγώγισης για το μετασχ. Fourier, η οποία υπενθυμίζεται ότι είναι η

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j2\pi f X(f) \quad (4.39)$$

θα έχουμε ότι:

$$X_z(f) = \frac{1}{j2\pi f} F\left\{\frac{dx_z(t)}{dt}\right\} = \frac{1}{j2\pi f} F\{2\delta(t)\} \longleftrightarrow X_z(f) = \frac{2}{j2\pi f} = \frac{1}{j\pi f} \quad (4.40)$$

Οπότε τελικά η βηματική συνάρτηση έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\frac{1}{j\pi f} \quad (4.41)$$

Φυσικά η παραπάνω ανάλυση για τα σήματα ισχύος έχει νόημα όταν η μέση τιμή του σήματος είναι ΜΗ μηδενική. Για παράδειγμα, το σήμα ισχύος

$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad (4.42)$$

ΔΕΝ έχει μέση τιμή, καθώς αυξάνει στο  $\infty$  όσο  $t \rightarrow \infty$ . Ένα καλό κριτήριο – αλλά όχι και αναγκαίο – για την ύπαρξη του μετασχ. Fourier ενός σήματος ισχύος είναι το να είναι φραγμένο, δηλ.

$$|x(t)| < M, \quad M < \infty \quad (4.43)$$

όπως για παράδειγμα τα

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad z(t) = u(t), \quad w(t) = sgn(t) \quad (4.44)$$

και άλλα που ικανοποιούν τη σχέση 4.43.

Το φοβερό της υπόθεσης είναι ότι παρ' όλα τα “κόλπα” που μπορούμε να εφαρμόσουμε για να βρούμε το μετασχ. Fourier σημάτων ισχύος, αυτός μπορεί να ΜΗΝ υπάρξει! :-P Δεν είναι σίγουρο δηλαδή ότι ένα σήμα ισχύος έχει σώνει και καλά μετασχ. Fourier, όσες τεχνικές κι αν χρησιμοποιήσουμε (βέβαια



τέτοια σήματα συνήθως έχουν ελάχιστο πρακτικό ενδιαφέρον και δε μας απασχολούν). Οπότε τίθεται το πρόβλημα του τι μπορούμε να κάνουμε για να μελετήσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων. Η απάντηση είναι ότι μελετούμε το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης του σήματος, αλλά δε θα επεκταθούμε περισσότερο...

Στην αρχή του κεφαλαίου, ορίσαμε διαισθητικά το μετασχ. Fourier ως μια γενίκευση των σειρών Fourier, όταν η περίοδος έτεινε στο  $\infty$ . Είδαμε τότε ότι οι φασματικές γραμμές έρχονταν όλο και πιο κοντά, με αποτέλεσμα να μην έχουμε τελικά ένα διακριτό φάσμα  $X_k$  αλλά ένα συνεχές φάσμα  $X(f)$ . Είμαι σίγουρος :-P ότι πολλοί έχετε αναρωτηθεί αν μπορούμε να πάμε αντίστροφα! Δηλ. αν μπορούμε να “αραιώσουμε” τις φασματικές γραμμές, και να επιστρέψουμε από το μετασχ. Fourier στις σειρές Fourier. Η απάντηση είναι ένα μεγάλο ΝΑΙ! :-) Μόνο που δεν “αραιώνουμε” τις φασματικές γραμμές, απλά διαλέγουμε από το συνεχές φάσμα αυτές τις γραμμές που ανταποκρίνονται στη σειρά Fourier! Πώς; Απλά παίρνοντας τιμές της  $X(f)$  ανά διαστήματα  $k/T_0$ , όπου  $T_0$  η περίοδος του περιοδικού σήματος!!! :-) Με λίγα μαθηματικά,

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} \quad (4.45)$$

Έτσι λοιπόν, έχουμε άλλο ένα εργαλείο υπολογισμού των σειρών Fourier, μέσω του μετασχηματισμού. Υπολογίζουμε το μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου του σήματος, και μετά τον δειγματοληπτούμε ανά ακέραια πολλαπλάσια του  $\frac{1}{T_0}$ , δηλ. του  $f_0$ ! :-) Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι, όπως βλέπετε, το  $T_0$  μπορεί να είναι ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ περίοδος! Με άλλα λόγια, μπορούμε από το φάσμα του μετασχ. Fourier, να βρούμε τους συντελεστές Fourier για οποιαδήποτε περίοδο του αντίστοιχου περιοδικού σήματος! Αυτό που συμβαίνει είναι ότι απλά δειγματοληπτούμε σε διαφορετικές αποστάσεις το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier! :-)

Τέλος, ένα σημαντικό, όσο και αξιοθαύμαστο, στοιχείο που αξίζει να αναφερθεί είναι το εξής: τόσο στις σειρές Fourier, όσο και στο μετασχ. Fourier, ένα οποιοδήποτε σήμα  $x(t)$  αναπαρίσταται (ή αλλιώς, μπορεί να συντεθεί) από μιγαδικά εκθετικά, που στην περίπτωση των πραγματικών σημάτων είναι συνημίτονα (είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier σχετίζεται στενά με τις σειρές Fourier). Ός γνωστόν, τα συνημίτονα έχουν άπειρη διάρκεια. Σκεφτείτε το λίγο: ένα μη περιοδικό σήμα που είναι, για παράδειγμα, μη μηδενικό σε ένα διάστημα  $[a, b]$  και μηδέν παντού αλλού, μπορεί να αναπαρασταθεί ΑΚΡΙΒΩΣ ως ένα άθροισμα άπειρων σε διάρκεια συνημιτόνων! Το φάσμα  $X(f)$  περιέχει άπειρα μιγαδικά εκθετικά (ή συνημίτονα) που ξεκινούν από το  $-\infty$  και διαρκούν για πάντα. Τα πλάτη και οι φάσεις αυτών των συνιστωσών είναι τέτοια ώστε όταν τα προσθέσουμε, παίρνουμε ΑΚΡΙΒΩΣ το σήμα  $x(t)$  στο διάστημα  $[a, b]$ , ενώ έξω από αυτό, οι συνιστώσες αυτές αθροίζονται στο μηδέν!!!! Αν “παίζαμε” με πλάτη και φάσεις άπειρου αριθμού συνημιτόνων για να πετύχουμε μια τόσο τέλεια, ακριβής, και λεπτή ισορροπία μεταξύ τους ώστε να ανακατασκευάζουμε ακριβώς το σήμα μας, θα ήταν αφάνταστα δύσκολο – πιθανώς αδύνατο – να τα καταφέρουμε! Κι όμως, ο μετασχ. Fourier (όπως και οι σειρές Fourier) το πετυχαίνει με μεγάλη ευκολία, χωρίς πολλή σκέψη από μέρους μας. Μερικές φορές, μας απορροφούν τόσο τα

μαθηματικά που ξεχνάμε να προσέξουμε μερικές τέτοιες, όμορφες, και θαυμαστές λεπτομέρειες...

### 4.2.3 Ιδιότητες και ζεύγη μετασχ. Fourier

Υπάρχουν πολλές ιδιότητες του μετασχ. Fourier που σας βοηθούν να παραλείψετε τον ορισμό. Πρέπει να τις γνωρίζετε καλά και να μπορείτε να τις χρησιμοποιείτε με ευχέρεια. Στον πίνακα 4.1 απεικονίζονται οι περισσότερες.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X(-f)^*$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{f}{a}\right)$
Συνέλιξη	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγωγήιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi fX(f)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X(-f)^*, \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\  X(f)  =  X(-f) , \\ \angle X(f) = -\angle X(-f) \end{cases}$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$ , $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$ , $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}  X(f) ^2 df$

Πίνακας 4.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier

Επίσης, ο πίνακας 4.2 δείχνει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.

### 4.3 Όμως...

Χμ. Πολύ καλά ως τώρα. :-) Έχουμε λύσει το πρόβλημα της μη περιοδικότητας, αφού όπως είχαμε πει όταν μελετούσαμε τις σειρές Fourier, ένα από τα προβλήματά μας ήταν ότι τα σήματα που υπάρχουν στη φύση ή που μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο είναι μη περιοδικά, και άρα οι σειρές

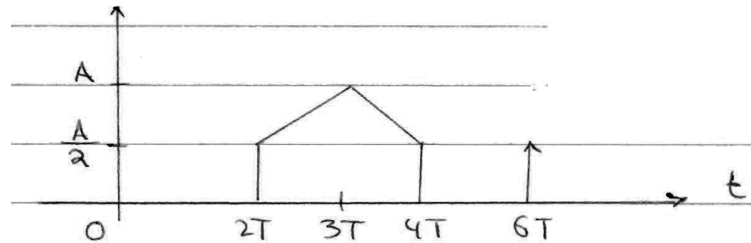
Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k f_0)$
$e^{j2\pi k f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi k f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi k f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$Arect\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \operatorname{sinc}(fT)$
$Atri\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \operatorname{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$

Πίνακας 4.2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Fourier

Fourier δεν επαρκούσαν. Με την εισαγωγή του μετασχ. Fourier, λύσαμε αυτό το πρόβλημα. Όμως μας παρουσιάστηκε ένα νέο πρόβλημα, αυτό της μη ύπαρξης του μετασχ. Fourier για ορισμένα σήματα ισχύος. Τέτοια σήματα μπορεί να αντιπροσωπεύουν συστήματα ή και εισόδους σε συστήματα, και καλό θα ήταν να βρούμε έναν τρόπο να τα χειριζόμαστε. Αυτό θα μας το προσφέρει ο μετασχ. Laplace, που θα δούμε πολύ σύντομα.

## 4.4 Ασκήσεις

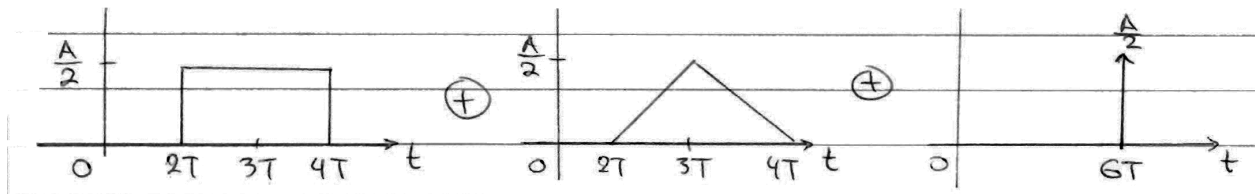
1. Βρείτε το μετασχ. Fourier του παρακάτω σήματος



Σχήμα 4.6: Σχήμα Άσκησης 3.1

Λύση:

Μπορούμε να σπάσουμε το σήμα σε κάποια μικρότερα γνωστά μας σήματα. Ποιά θα είναι αυτά; Θα είναι ένα τετραγωνικό παράθυρο, διάρκειας  $2T$ , με κέντρο το  $t_0 = 3T$ , ένα τριγωνικό παράθυρο διάρκειας  $2T$ , με κέντρο το  $t_0 = 3T$ , και μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση  $t_0 = 6T$ , όπως στο σχήμα 4.7. Για το πρώτο σήμα του σχήματος 4.7, θα έχουμε



Σχήμα 4.7: Σχήμα Άσκησης 3.1 - Σπασμένο σήμα

$$X_1(f) = \frac{A}{2} 2T \operatorname{sinc}(2fT) e^{-j2\pi 3Tf}$$

για το δεύτερο, θα είναι

$$X_2(f) = \frac{A}{2} T \operatorname{sinc}^2(fT) e^{-j2\pi 3Tf}$$

και για το τρίτο, θα είναι

$$X_3(f) = \frac{A}{2} e^{-j2\pi 6Tf}$$

Άρα συνολικά θα είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{A}{2} 2T \operatorname{sinc}(2fT) e^{-j2\pi 3Tf} + \frac{A}{2} T \operatorname{sinc}^2(fT) e^{-j2\pi 3Tf} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi 6Tf} \\ &= AT \left( \operatorname{sinc}(2fT) + \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2(fT) + \frac{A}{2} e^{-j2\pi 3Tf} \right) e^{-j2\pi 3Tf} \end{aligned} \quad (4.46)$$

2. Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{2T}\right) * (\delta(t - 5T) + \delta(t) + \delta(t + 5T))$$

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Arect}\left(\frac{t}{2T}\right) * (\delta(t - 5T) + \delta(t) + \delta(t + 5T)) \\ &= \text{Arect}\left(\frac{t - 5T}{2T}\right) + \text{Arect}\left(\frac{t}{2T}\right) + \text{Arect}\left(\frac{t + 5T}{2T}\right) \longleftrightarrow \\ X(f) &= 2AT \text{sinc}(2fT) e^{-j2\pi 5Tf} + 2AT \text{sinc}(2fT) + 2AT \text{sinc}(2fT) e^{j2\pi 5Tf} \\ &= 2AT \text{sinc}(2fT) (e^{-j2\pi 5Tf} + 1 + e^{j2\pi 5Tf}) \\ &= 2AT \text{sinc}(2fT) (1 + 2 \cos(10\pi fT)) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα που λέει συνέλιξη στο χρόνο  $\Leftrightarrow$  πολλαπλασιασμός στη συχνότητα. Τότε, θα είχαμε

$$\begin{aligned} X(f) &= F\left\{\text{Arect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} F\{(\delta(t - 5T) + \delta(t) + \delta(t + 5T))\} \\ &= 2AT \text{sinc}(2fT) (e^{-j2\pi 5Tf} + 1 + e^{j2\pi 5Tf}) \\ &= 2AT \text{sinc}(2fT) (1 + \cos(10\pi fT)) \end{aligned} \quad (4.48)$$

3. Να σχεδιάσετε το σήμα

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad t \in \mathfrak{R}$$

με  $a > 0$  και να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος. Επίσης, να υπολογίσετε το μέτρο και τη φάση του. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

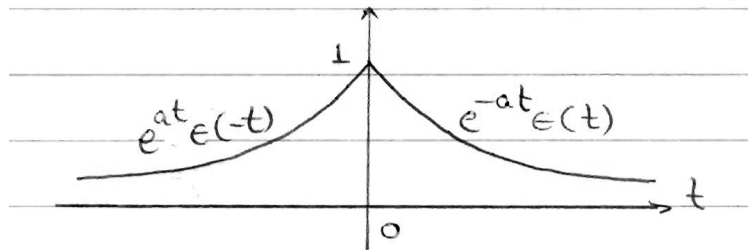
Σε ποιές συχνότητες το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος;

Λύση:

Το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Το σήμα φαίνεται στο σχήμα 4.8 Είναι



Σχήμα 4.8: Σήμα Άσκησης 3.3

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-a-j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} (1-0) + \frac{1}{-a-j2\pi f} (0-1) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}, \quad a > 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Παρατηρούμε ότι το  $X(f)$  είναι πραγματικό σήμα, και θετικό για κάθε  $f$ . Άρα η φάση του είναι  $\phi = 0$  και το μέτρο του είναι ο ίδιος ο μετασχηματισμός Fourier, δηλ.

$$|X(f)| = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \quad \text{και} \quad \angle X(f) = 0 \quad (4.50)$$

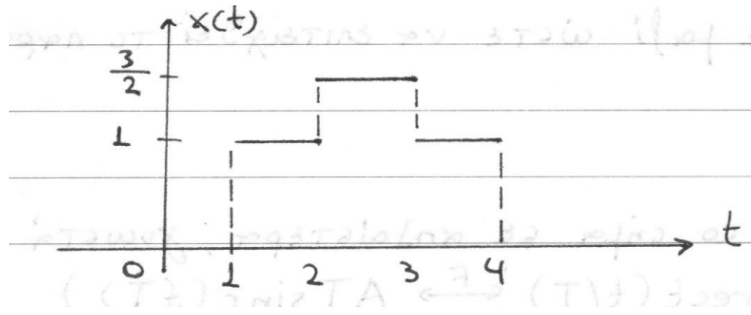
Επίσης

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(f) \Big|_{f=0} = X(0) = \frac{2}{a} \quad (4.51)$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε σε ποιές συχνότητες, τέλος, το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος. Λύνοντας απλά την εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned} |X(f)| = \frac{2}{a} = \frac{1}{a} &\Leftrightarrow \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} = \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow 4\pi^2 f^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow f = \pm \frac{a}{2\pi} \end{aligned} \quad (4.52)$$

4. Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 4.9



Σχήμα 4.9: Σχήμα Άσκησης 3.4

Λύση:

Για την εύρεση του μετασχ. Fourier του σήματος  $x(t)$  που απεικονίζεται στο σχήμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε πολλούς τρόπους. Ας δούμε μερικούς...

(α') Με τον ορισμό:

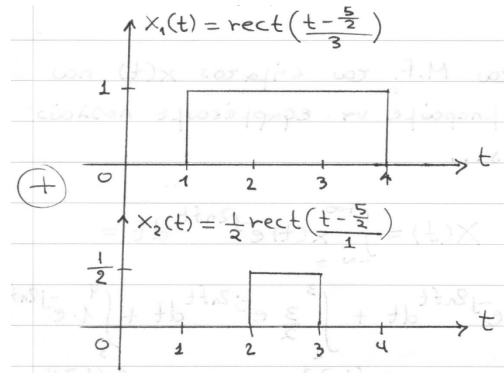
$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ft} dt \\
 &= \int_1^2 1e^{-j2\pi ft} dt + \int_2^3 \frac{3}{2}e^{-j2\pi ft} dt + \int_3^4 1e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \left. -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \right|_1^2 - \frac{3}{2} \left. \frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \right|_2^3 - \left. \frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \right|_3^4 \\
 &= \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j4\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f}} + \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f} \frac{3}{2} e^{-j6\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f} \frac{3}{2} e^{-j4\pi f}} + \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f} e^{-j4\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j6\pi f}} \\
 &= \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j3\pi f} (e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) + \frac{3}{2} \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j5\pi f} (e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) + \\
 &+ \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j7\pi f} (e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) \\
 &= \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j3\pi f} (-2j \sin(\pi f)) + \frac{3}{2} \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j5\pi f} (-2j \sin(\pi f)) + \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j7\pi f} (-2j \sin(\pi f)) \\
 &= \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j3\pi f} + \frac{3 \sin(\pi f)}{2 \pi f} e^{-j5\pi f} + \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j7\pi f} \\
 &= \operatorname{sinc}(f) \left( e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2} e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f} \right) \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε τους όρους που βγάλαμε κοινό παράγοντα ώστε να εμφανιστούν τα  $\sin(\pi f)$ .

Με άγκιστρο είναι τα εκθετικά που χρησιμοποιήσαμε μαζί ώστε να το πετύχουμε αυτό.

(β') Αναλύοντας το σήμα σε απλούστερα γνωστά σήματα. Το πιο απλό είναι η παρακάτω διάσπαση, που φαίνεται στο σχήμα 4.10. Έχουμε άρα

$$X_1(f) = 3\operatorname{sinc}(3f)e^{-j2\pi 5f/2} = 3\operatorname{sinc}(3f)e^{-j5\pi f}$$



Σχήμα 4.10: Διάσπαση Άσκησης 3.4 - δεύτερος τρόπος

και

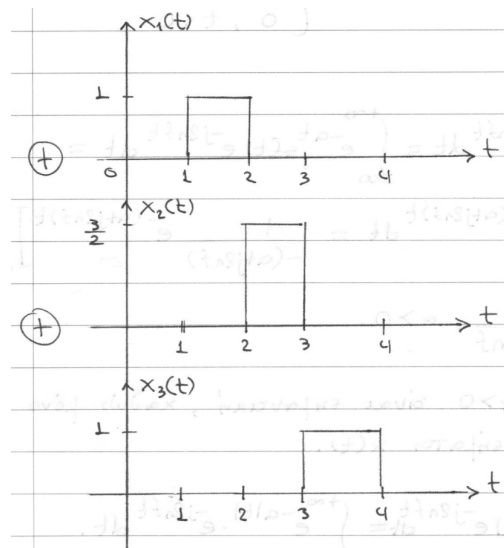
$$X_2(f) = \frac{1}{2} \text{sinc}(f) e^{-j2\pi 5f/2} = \frac{1}{2} \text{sinc}(f) e^{-j5\pi f}$$

Άρα το τελικό σήμα θα είναι το άθροισμα

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = e^{-j5\pi f} \left( \frac{1}{2} \text{sinc}(f) + 3 \text{sinc}(3f) \right)$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα μοιάζει διαφορετικό από αυτό του πρώτου τρόπου που ακολουθήσαμε, αλλά στην ουσία είναι το ίδιο σήμα. Αυτό μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με το MATLAB ή κάνοντας πράξεις στο αποτέλεσμα του πρώτου τρόπου.

(γ') Αναλύοντας το σήμα σε τρία σήματα, αντί για δύο, όμοια με το δεύτερο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.11. Όμοια λοιπόν, θα έχουμε



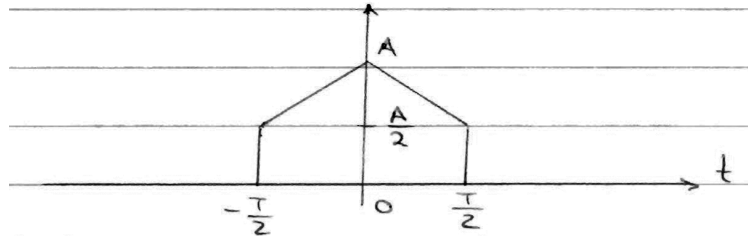
Σχήμα 4.11: Διάσπαση Άσκησης 3.4 - τρίτος τρόπος



$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) + X_3(f) = \text{sinc}(f) \left( e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2} e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f} \right) \quad (4.54)$$

Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που προέκυψε με τον ορισμό, αλλά πολύ πιο εύκολα και σύντομα. :-) Υπάρχουν 1-2 τρόποι ακόμα που μπορείτε να σπάσετε το αρχικό σήμα σε απλούστερα. Χρησιμοποιήστε τη φαντασία σας! ;-)

5. Να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος στο σχήμα 4.12.



Σχήμα 4.12: Σχήμα Άσκησης 3.5

Λύση:

Ο εύκολος τρόπος είναι να σπάσουμε το σήμα μας όπως στην Άσκηση 1. Κάντε το! :-) Επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμα είναι

$$X(f) = \frac{AT}{2} \left( \text{sinc}(fT) + \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \right) \quad (4.55)$$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγωγισής, η οποία σε περιπτώσεις που δεν μπορούμε να σπάσουμε το σήμα μας, μας λύνει τα χέρια. Η ιδιότητα θυμίζεται ότι είναι

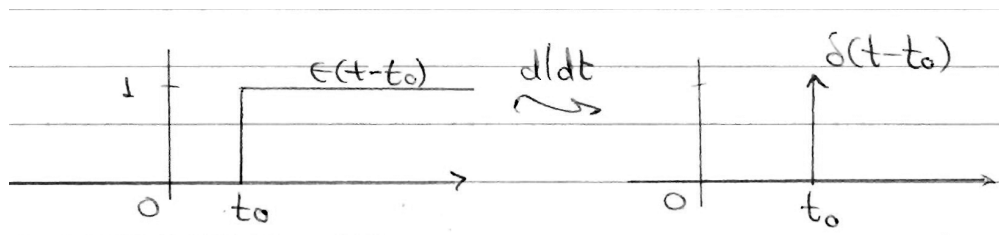
$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f) \quad (4.56)$$

Θα δουλέψουμε ως εξής: θα χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο του  $x(t)$ , θα βρούμε τον μετασχ. Fourier, και μέσω της σχέσης 4.56, θα βρούμε το  $X(f)$ . Στην προσπάθειά μας να παραγωγίσουμε το  $x(t)$  έχοντας στο μυαλό μας την κλασική θεωρία της Ανάλυσης, θα συναντήσουμε δυσκολίες. Υπάρχουν σημεία στο σήμα όπου υπάρχουν ασυνέχειες. Τα σημεία αυτά είναι στις χρονικές στιγμές  $t = \pm \frac{T}{2}$ , όπου το σήμα αλλάζει ακαριαία τιμές. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, δεν ορίζεται παράγωγος στα σημεία αυτά. Όμως έχετε δει ότι

$$\frac{du(t - t_0)}{dt} = \delta(t - t_0) \quad (4.57)$$

δηλ. ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης  $u(t - t_0)$  είναι μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση  $t = t_0$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίστηκε η παράγωγος μιας ασυνέχειας, όπως αυτή που έχει η βηματική συνάρτηση, με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων, όπως είναι η συνάρτηση Δέλτα. Αυτή

η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 4.13. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε σήμα περιέχει μια ασυνέχεια



Σχήμα 4.13: Παράγωγος βηματικής συνάρτησης

(ή και περισσότερες), μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός βηματικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, ο γνωστός μας τετραγωνικός παλμός

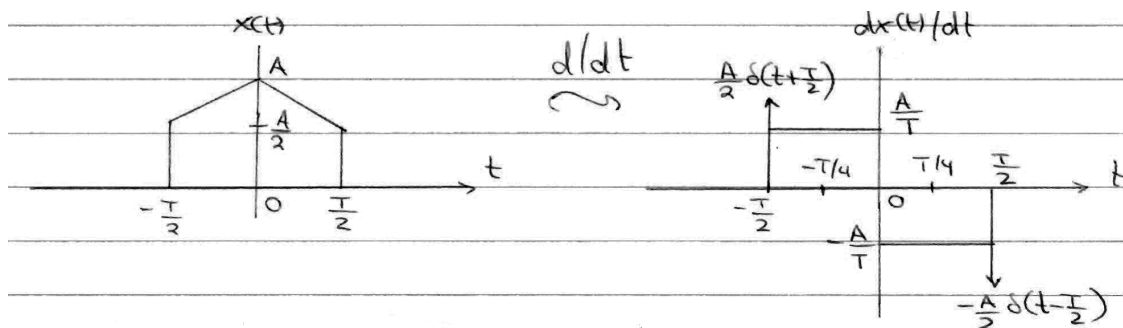
$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) = Au\left(t + \frac{T}{2}\right) - Au\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

όπου και με την παραγωγή του, προκύπτουν δυο συναρτήσεις Δέλτα στις θέσεις  $t = \pm \frac{T}{2}$ , ακριβώς λόγω της παραπάνω σχέσης και της σχέσης 4.57.

Οπότε όταν παραγωγίζουμε ένα σήμα, πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στα σημεία ασυνέχειας, αρχικά αναγνωρίζοντάς τα, και έπειτα χωρίς να παραλείψουμε να βάζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Δέλτα στα σημεία ασυνέχειας. Παραγωγίζοντας λοιπόν το σήμα, καταλήγουμε στο σχήμα 4.14. Οπότε έχουμε ότι το σήμα  $\frac{dx(t)}{dt}$  αποτελείται από:



Σχήμα 4.14: Παραγωγή σήματος Άσκησης 3.5

- Μια συνάρτηση Δέλτα,  $x_1(t) = \frac{A}{2}\delta\left(t + \frac{T}{2}\right)$
- Ένα τετραγωνικό παράθυρο,  $x_2(t) = \frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{4}}{T/2}\right)$
- Άλλο ένα τετραγωνικό παράθυρο,  $x_2(t) = -\frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{T/2}\right)$

- Και μια ακόμα συνάρτηση Δέλτα,  $x_4(t) = -\frac{A}{2}\delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$

Άρα τελικά θα είναι

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) \\
 &= \frac{A}{2}\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) + \frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t + \frac{T}{4}}{T/2}\right) - \frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{4}}{T/2}\right) - \frac{A}{2}\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \leftrightarrow \\
 F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \frac{A}{2}e^{j2\pi fT/2} + \frac{AT}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)e^{j2\pi fT/4} - \frac{AT}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)e^{-j2\pi fT/4} - \frac{A}{2}e^{-j2\pi fT/2} \\
 &= Aj\sin(\pi fT) + \frac{A}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)2j\sin\left(\frac{\pi fT}{2}\right) \\
 j2\pi fX(f) &= Aj\sin(\pi fT) + \frac{A}{2}\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)2j\sin\left(\frac{\pi fT}{2}\right) \\
 X(f) &= \frac{AT}{2}\text{sinc}(fT) + \frac{AT}{4}\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

#### 6. Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

Λύση:

Η λύση με τον ορισμό δε συνίσταται... θα κάνουμε χρήση ιδιοτήτων και συγκεκριμένα την ιδιότητα της δυικότητας

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

Επίσης γνωρίζουμε από προηγούμενη άσκηση ότι

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Για  $a = 2\pi$ , η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$e^{-2\pi|t|} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+f^2} \Leftrightarrow 2\pi e^{-2\pi|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+f^2}$$

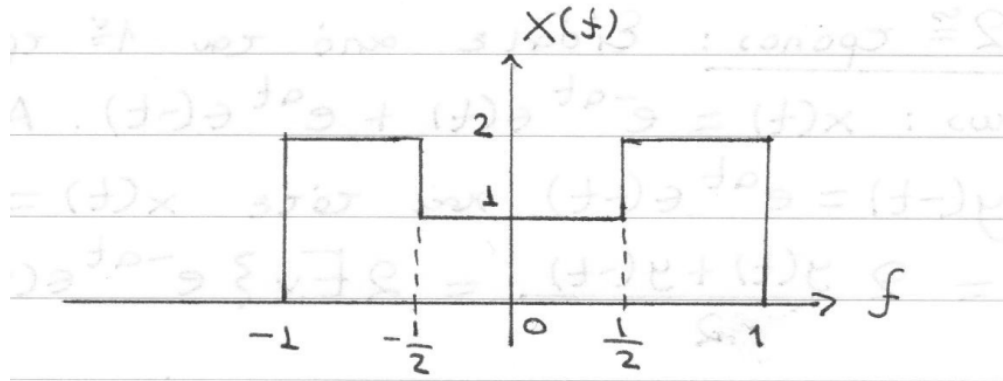
Ο δεύτερος όρος της παραπάνω εξίσωσης έχει τη μορφή του σήματος στο χρόνο που ψάχνουμε. Με χρήση της ιδιότητας της δυικότητας, θα είναι

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2} \leftrightarrow X(f) = 2\pi e^{-2\pi|f|} = 2\pi e^{-2\pi|f|} \tag{4.59}$$

#### 7. Υπολογίστε το

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

για το σήμα  $x(t)$  που έχει μετασχ. Fourier όπως στο σχήμα 4.15.



Σχήμα 4.15: Σήμα Άσκησης 3.6

Λύση:

Αρχικά, θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί να βρει το  $x(t)$  μέσω του  $X(f)$ , αφού το τελευταίο είναι απλό σήμα. Αφού το  $X(f)$  αποτελείται από σήματα *rect*, τότε το  $x(t)$  θα αποτελείται από σήματα *sinc*. Πιο συγκεκριμένα, αν

$$\begin{aligned}
 X(f) &= 2\text{rect}\left(\frac{f-3/4}{1/2}\right) + \text{rect}\left(\frac{f}{1}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{f+3/4}{1/2}\right) \leftrightarrow \\
 x(t) &= \text{sinc}(t)e^{j2\pi 3t/4} + \text{sinc}(t) + \text{sinc}(t)e^{-j2\pi 3t/4} \\
 &= \text{sinc}(t) + \text{sinc}(t)2\cos(3\pi t/2) \\
 &= \text{sinc}(t)\left(1 + 2\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Αφού φτάσαμε ως εδώ, πρέπει τώρα να βρούμε το  $|x(t)|^2$  και να ολοκληρώσουμε. Αυτός ο τρόπος – αν βγάζει και πουθενά :- ) – ΔΕΝ συνίσταται!

Ένα άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το δεύτερο μέλος, άρα θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2 \int_0^{1/2} 1^2 df + 2 \int_{1/2}^1 2^2 df = 1 + 4 = 5 \tag{4.61}$$

8. Είδαμε στη θεωρία ότι πολλές συναρτήσεις μπορούν να προσεγγίσουν τη συνάρτηση Δέλτα. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση Δέλτα ως

$$\delta(t) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t}$$

αποδείξτε ότι ο μετασχ. Fourier της  $\delta(t)$  είναι 1.

Λύση:

Ο μετασχ. Fourier είναι

$$\begin{aligned} F\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt = \lim_{A \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{A}\right) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Όμως το ολοκλήρωμα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{A} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{A}\right)$$

Από την ιδιότητα της δυικότητας, εύκολα βρίσκουμε ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος  $x(t)$ , είναι

$$X(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right)$$

Οπότε τώρα ζητάμε το

$$\lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right)$$

Παρατηρούμε ότι το  $1/A$  είναι η διάρκεια του παλμού, όπως ξέρουμε. Όσο  $A \rightarrow 0$ , τόσο το  $1/A \rightarrow \infty$ , άρα τόσο μεγαλύτερος γίνεται ο παλμός σε διάρκεια. Άρα τελικά

$$F\{\delta(t)\} = \lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right) = 1 \quad (4.62)$$

Μια λιγότερο διαισθητική ερμηνεία έρχεται όταν χρησιμοποιήσουμε απλά μαθηματικά, δηλ.

$$\lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/A}\right) = \lim_{A \rightarrow 0} \operatorname{rect}(Af) = \operatorname{rect}(0) = 1 \quad (4.63)$$

#### 9. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Parseval, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{t^2} dt = \alpha\pi$$

Λύση:

Θυμίζουμε το θεώρημα του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\pi} \frac{a}{a} t\right)}{a^2 t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( a \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\pi} \frac{a}{a} t\right)}{\pi \frac{a}{a} t} \right)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \end{aligned} \quad (4.64)$$

Άρα αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right)$$

Από γνωστές ιδιότητες έχουμε ότι

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \leftrightarrow X(f) = \pi \operatorname{rect}\left(\frac{f}{a/\pi}\right)$$

Άρα θα είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( a \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\pi} t\right) \right)^2 dt = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}^2\left(\frac{f}{a/\pi}\right) df \\ &= \pi^2 \int_{-a/(2\pi)}^{a/(2\pi)} 1^2 df = \pi^2 f \Big|_{-a/(2\pi)}^{a/(2\pi)} = \pi^2 \frac{a}{\pi} = a\pi \end{aligned} \quad (4.65)$$

#### 10. Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Λύση:

Το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}$$

είναι περιττό γιατί ισχύει  $x(t) = -x(-t)$ . Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος θα έχει μόνο φανταστικό μέρος, δηλαδή:

$$X(f) = j\Im(f) = -2j \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{\pi t} dt = -\frac{2}{\pi} j \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{t} dt$$

Όμως ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$$

Οπότε θα είναι

$$X(f) = \begin{cases} -j, & f > 0, \\ 0, & f = 0, \\ j & f < 0 \end{cases}$$

που γράφεται εν συντομία ως

$$X(f) = -j \operatorname{sgn}(f) \quad (4.66)$$

με  $\operatorname{sgn}(f)$  η συνάρτηση προσήμου

$$\operatorname{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}, t \neq 0.$$

11. Έστω ότι  $X(f) = \Re(f) + j\Im(f)$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος  $x(t)$ . Αποδείξτε ότι ο μετασχ. Fourier του άρτιου μέρους του  $x(t)$  είναι ίσος με  $\Re(f)$  και ο αντίστοιχος του περιττού μέρους είναι ίσος με  $j\Im(f)$ .

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= X_{ev}(f) + X_{odd}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t) \sin(2\pi ft) dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_{ev}(t) + x_{odd}(t)) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} (x_{ev}(t) + x_{odd}(t)) \sin(2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= \Re(f) + j\Im(f) \end{aligned} \quad (4.67)$$

12. Αποδείξτε ότι το πραγματικό,  $\Re(f)$ , και φανταστικό,  $\Im(f)$ , του μετασχηματισμού Fourier ενός μιγαδικού σήματος  $x(t) = x_R(t) + jx_I(t)$  δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \Re(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t) \cos(2\pi ft) + x_I(t) \sin(2\pi ft)] dt \\ \Im(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_I(t) \cos(2\pi ft) - x_R(t) \sin(2\pi ft)] dt \end{aligned}$$

Λύση:

Ο μετασχ. Fourier γράφεται ως

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t) + jx_I(t)]e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t)e^{-j2\pi ft} + jx_I(t)e^{-j2\pi ft}] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_R(t)e^{-j2\pi ft} dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x_I(t)e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_R(t)(\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x_I(t)(\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_R(t) \cos(2\pi ft) + x_I(t) \sin(2\pi ft)) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} (x_I(t) \cos(2\pi ft) - x_R \sin(2\pi ft)) dt \\
 &= \Re(f) + j\Im(f)
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

13. Αποδείξτε ότι ένα πραγματικό αιτιατό σήμα  $x(t)$  γράφεται ως

$$x(t) = 4 \int_0^{\infty} \Re(f) \cos(2\pi ft) df$$

για  $t > 0$  και όπου  $\Re(f)$  είναι το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier.

Λύση:

Ένα αιτιατό σήμα έχει την ιδιότητα

$$x(t) = 0, t < 0$$

Το άρτιο μέρος του σήματος γράφεται ως

$$x_{Ev}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{x(t)}{2} \Rightarrow x(t) = 2x_{Ev}(t) \leftrightarrow X(f) = 2\Re(f)$$

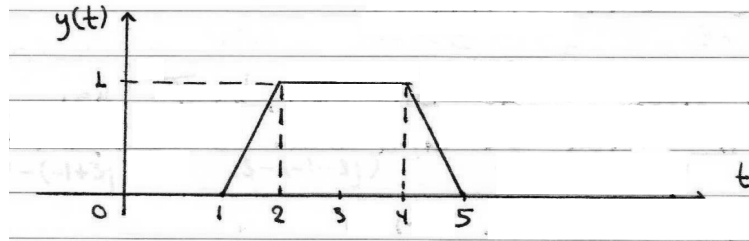
Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} 2\Re(f)e^{j2\pi ft} df \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\Re(f) \cos(2\pi ft) + j\Re(f) \sin(2\pi ft)) df \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Re(f) \cos(2\pi ft) df + 2j \int_{-\infty}^{\infty} \Re(f) \sin(2\pi ft) df \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Re(f) \cos(2\pi ft) df + 0 \\
 &= 4 \int_0^{\infty} \Re(f) \cos(2\pi ft) df
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν ως γινόμενο άρτιας επί περιττής συνάρτησης σε συμμετρικό διάστημα.



14. Έστω το σήμα  $y(t)$  του σχήματος 4.16.

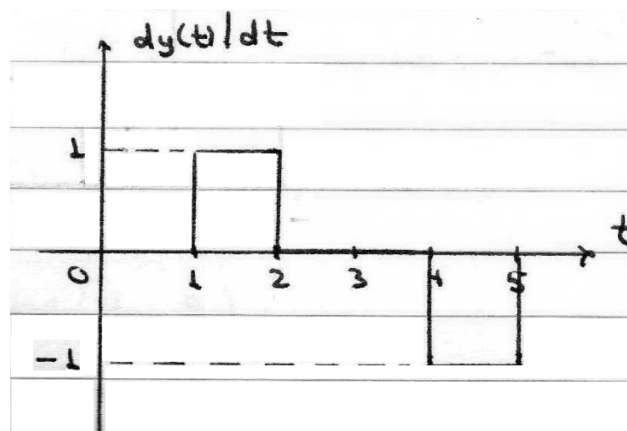


Σχήμα 4.16: Σήμα Άσκησης 3.15

- (α') Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του  $y(t)$ .  
 (β') Σε ποιές συχνότητες υπάρχουν μηδενισμοί στην  $Y(f)$ ?  
 (γ') Υπολογίστε το φάσμα φάσης για  $-1 < f < 1$  Hz.

Λύση:

- (α') Θα χρησιμοποιήσουμε παραγωγή για να βρούμε εύκολα το μετ. Fourier του σήματος. Η παράγωγος φαίνεται στο σχήμα 4.17. Είναι:



Σχήμα 4.17: Παράγωγος σήματος Άσκησης 3.15

$$\begin{aligned}
 \frac{dy(t)}{dt} &= \text{rect}\left(\frac{t-3/2}{1}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-9/2}{1}\right) \Leftrightarrow \\
 F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} &= \text{sinc}(f)e^{-j3\pi f} - \text{sinc}(f)e^{-j9\pi f} \Leftrightarrow \\
 j2\pi f Y(f) &= \text{sinc}(f)(e^{-j3\pi f} - e^{-j9\pi f}) \Leftrightarrow \\
 j2\pi f Y(f) &= \text{sinc}(f)e^{-j6\pi f} 2j \sin(3\pi f) \Leftrightarrow \\
 Y(f) &= 3e^{-j6\pi f} \text{sinc}(3f) \text{sinc}(f) \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

(β') Οι μηδενισμοί γίνονται όταν

$$3\pi f = k\pi, k \in Z \text{ και } \pi f = l\pi, l \in Z$$

άρα το φάσμα θα μηδενίζεται όταν

$$f = \frac{k}{3}, k \in Z \quad (4.71)$$

(γ') Η φάση του σήματος αποτελείται από τη φάση του εκθετικού,  $-6\pi f$ , και τη φάση του  $\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)$ . Δεδομένου ότι οι μηδενισμοί γίνονται κάθε  $k/3$  Hz, θα έχουμε ότι

$$\angle Y(f) = \begin{cases} -6\pi f, & \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f) > 0, \\ -6\pi f + \pi, & \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f) < 0, f > 0 \\ -6\pi f - \pi, & \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f) < 0, f < 0 \end{cases}$$

Συγκεντρωτικά,

$$\angle Y(f) = \begin{cases} -6\pi f, & -1 \leq f < -2/3 \\ -6\pi f - \pi, & -2/3 \leq f < -1/3 \\ -6\pi f, & -1/3 \leq f \leq 1/3 \\ -6\pi f + \pi, & 1/3 < f \leq 2/3 \\ -6\pi f, & 2/3 < f \leq 1 \end{cases}$$

15. Το σήμα  $y(t)$  του προηγούμενου θέματος είναι είσοδος στο σύστημα με απόκριση  $h(t) = \delta(t) + \delta(t+6)$ . Να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier της εξόδου και οι τιμές του φάσματος για  $\frac{1}{3} \leq f \leq \frac{1}{3}$ .

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned} Z(f) &= Y(f)H(f) = 3e^{-j6\pi f} \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)H(f) \\ &= 3e^{-j6\pi f} \text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)(1 + e^{j2\pi 6f}) \\ &= 3\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)(e^{-j2\pi 3f} + e^{j2\pi 3f}) \\ &= 6\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f) \cos(6\pi f) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Επειδή  $\Im(f) = 0$ , η φάση θα είναι  $0$  ή  $\pm\pi$ . Όπου το σήμα είναι θετικό, η φάση είναι  $0$ . Όπου είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις: για θετικές συχνότητες, η φάση είναι  $\pi$ , ενώ για αρνητικές συχνότητες, έχουμε φάση  $-\pi$ . Τα σημεία μηδενισμού για κάθε όρο του γινομένου είναι στις

θέσεις

$$\begin{aligned} 3\pi f &= k\pi, \quad \pi f = l\pi, \quad 6\pi f = m\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k, l, m \in Z \\ f &= \frac{k}{3}, \quad f = l, \quad f = \frac{m \pm \frac{1}{2}}{6} = \frac{m}{6} \pm \frac{1}{12}, \quad k, l, m \in Z \end{aligned} \quad (4.73)$$

Προφανώς, το συνολικό σήμα μηδενίζεται στο διάστημα  $[-1/3, 1/3]$  όταν

$$f = \frac{m}{6} \pm \frac{1}{12}$$

Συγκεντρωτικά,

$$\angle Z(f) = \begin{cases} 0, & -1/3 \leq f < -3/12 \\ -\pi, & -3/12 \leq f < -1/12 \\ 0, & -1/12 \leq f \leq 1/12 \\ +\pi, & 1/12 < f \leq 3/12 \\ 0, & 3/12 < f \leq 1/3 \end{cases}$$

16. Ένα σήμα  $x(t)$  έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα  $[-B, B]$ . Δείξτε ότι το σήμα  $x^n(t)$  έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα  $[-nB, nB]$ .

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$x(t)x(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f)$$

και το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[-2B, 2B]$ .

Όμοια,

$$x(t)x(t)x(t) \longleftrightarrow [X(f) * X(f)] * X(f)$$

και το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[-3B, 3B]$  Αντίστοιχα,

$$\underbrace{x(t)x(t) \cdots x(t)}_{n \text{ φορές}} \longleftrightarrow \underbrace{X(f) * X(f) * \cdots * X(f)}_{n \text{ φορές}}$$

και σκεπτόμενοι όμοια, το φάσμα είναι μη μηδενικό στις συχνότητες  $[-nB, nB]$ .



# Κεφάλαιο 5

## Συνέλιξη

### 5.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι η συνέλιξη αποτελεί μια πράξη πολύ σημαντική, γιατί σχετίζεται με την ανάλυση συστημάτων, αλλά και με το γεγονός ότι η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο όταν αλλάζουμε χώρους (απ' το χρόνο στη συχνότητα και αντίστροφα). Η συνέλιξη, λόγω του ότι εμπλέκει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος, έχει μια δυσκολία. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *ανάκλαση και μετατόπιση*.

### 5.2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Εδώ θα ξεδιαλύνουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

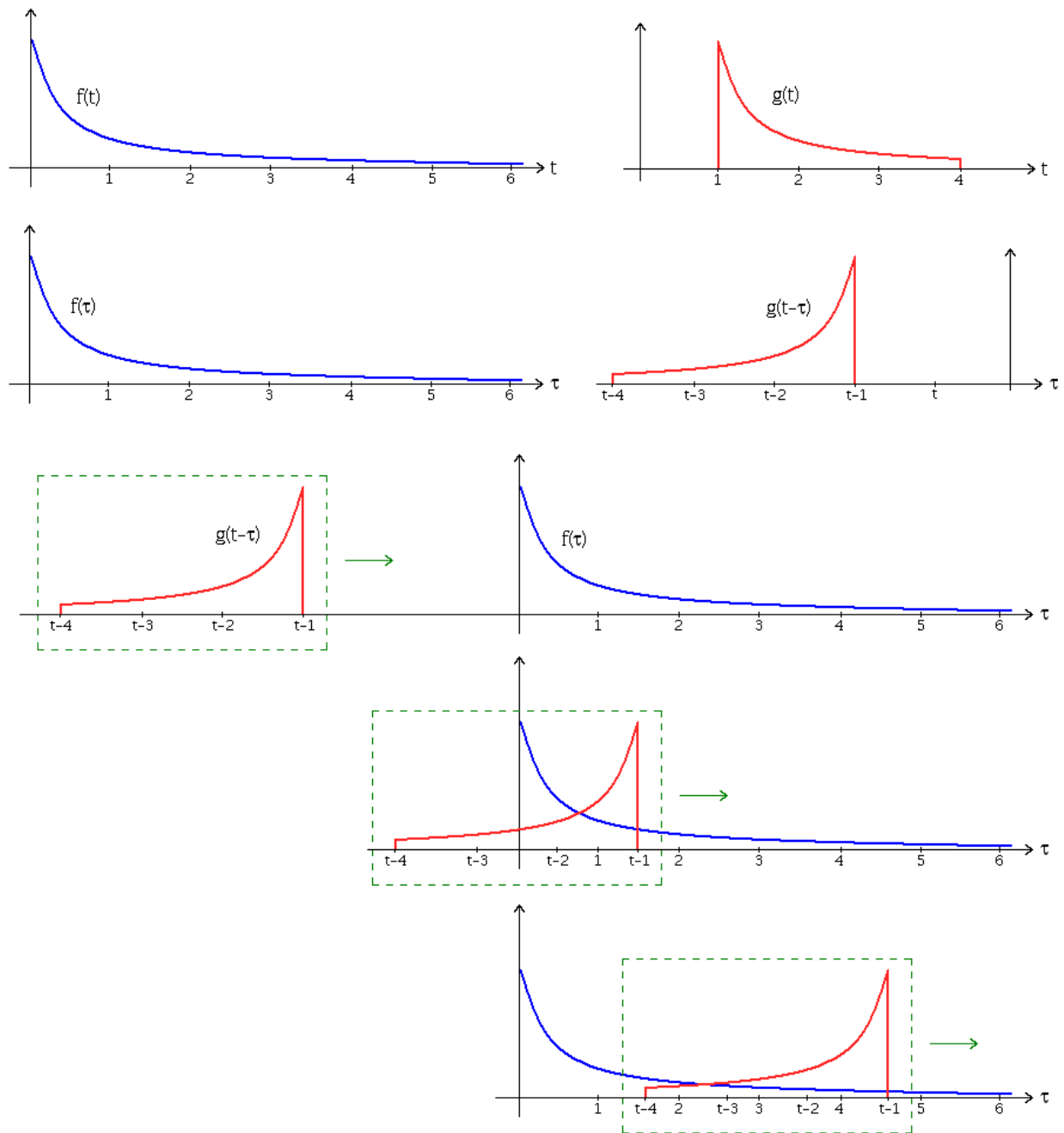
$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (5.1)$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το  $\tau$ ! ΌΧΙ το  $t$ . Το  $t$  το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το  $x(\tau)$  και το  $y(t - \tau)$ . Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \rightarrow y(\tau) \rightarrow y(-\tau) \rightarrow y(-\tau + t) = y(t - \tau) \quad (5.2)$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση* ως προς  $t$ . Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το  $x(\tau)$  και ολοκληρώνεται ως προς  $\tau$ . Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 5.1.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το  $f(t)$  και το  $g(t)$  στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να παίζουμε με το  $g(t)$ , δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε.



Σχήμα 5.1: Διαδικασία συνέλιξης

- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσεις του  $\tau$  και όχι του  $t$ , όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το  $g(\tau)$  έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά  $t$ . Θυμίζω ότι αυτό το  $t$  το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του  $g(\tau)$ , και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.

- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το  $g(t - \tau)$  που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “σέρνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το  $f(\tau)$ , ξεκινώντας από το  $-\infty$  και προς το  $+\infty$ .
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το  $f(\tau)$ . Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Άρα, αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του  $g(t - \tau)$  συναντά το αριστερό άκρο του  $f(\tau)$  και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του  $g(t - \tau)$  ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t - 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1 \text{ και } t - 4 \leq 0 \Rightarrow t \leq 4 \quad (5.3)$$

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως  $t - 1$ , εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων, ως

$$c_{fg}(t) = \int_0^{t-1} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \dots, \quad (5.4)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το  $g(t - \tau)$  έχει μπει ολόκληρο μέσα στο  $f(\tau)$ , πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της  $g(t - \tau)$  περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4 \quad (5.5)$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$c_{fg}(t) = \int_{t-4}^{t-1} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \dots, \quad (5.6)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο  $t$  εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

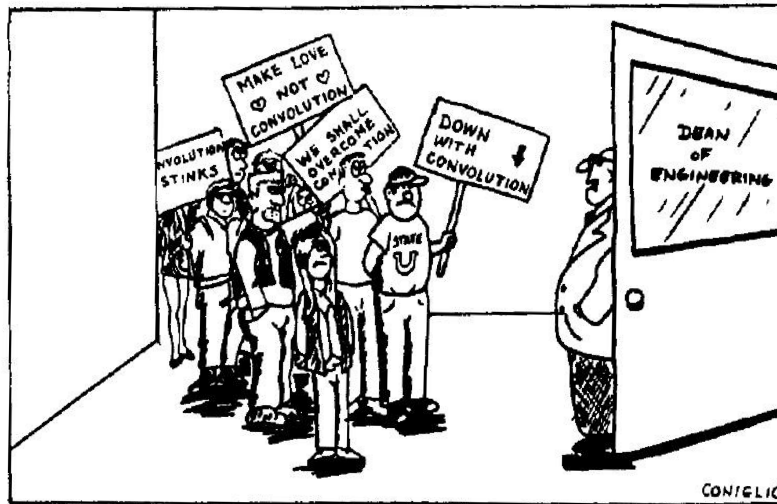
$$c_{fg}(t) = 0, \quad t < 1 \quad (5.7)$$

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις...

1. Όπως βλέπετε, το πιο σημαντικό πράγμα είναι να μπορείτε να υπολογίσετε το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι απλά μαθηματικά.
2. Η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{fg}(t) = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = c_{gf}(t) \quad (5.8)$$

δηλ. αν παίζαμε με το  $f(t)$  αντί για το  $g(t)$ , θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.



Σχήμα 5.2: Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη...

3. Προτιμούμε να παίζουμε με το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.
4. Χρήσιμη παρατήρηση για πεπερασμένες διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[a, b]$  και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[c, d]$ , τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα  $[a + c, b + d]$ . Είναι χρήσιμη παρατήρηση για να μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο σχήμα 5.1, είχαμε συνέλιξη της  $g(t)$  με τον εαυτό της, δηλ.  $c_{gg}(t) = g(t) * g(t)$ , τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα  $[2, 8]$ .
5. Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (5.9)$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt \quad (5.10)$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές  $t, \tau$  μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Σε αυτές τις σημειώσεις, προτιμούμε συνήθως την πρώτη σχέση.

6. Η γραφική επίλυση που συζητήσαμε εδώ φαίνεται εκ πρώτης όψης περίπλοκη και αποθαρρύνει το φοιτητή. Πράγματι, κάποιοι ισχυρίζονται ότι η συνέλιξη έχει οδηγήσει πολλούς προπτυχιακούς σε τμήματα Μηχανικών Η/Υ να ενστερνιστούν τη Θεολογία, είτε για σωτηρία ψυχής είτε ως εναλλακτική καριέρα!! :-) (δείτε το περιοδικό IEEE Spectrum, Μάρτιος 1991, σελ. 60).



### 5.3 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 5.1). Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$x(t)$	$y(t)$	$x(t) * y(t)$
$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1 - e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}u(t), a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^n \frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt} - e^{at} + (a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)^{n+j+1}}u(t) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t)$
$a \neq b$		
$e^{at} \cos(bt + \theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} - e^{-at} \cos(bt + \theta - \phi)}{\sqrt{(a + \lambda)^2 + b^2}}u(t)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{-b}{a + \lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)}{b - a}, \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{b - a}u(-t)$

Πίνακας 5.1: Πίνακας ζευγών συνελίξεων

### 5.4 Συστήματα

Τα συστήματα δεν είναι τίποτα άλλο από σήματα κι αυτά, τα οποία συνήθως κάνουν μια συγκεκριμένη δουλειά επάνω στο σήμα εισόδου τους,  $x(t)$ . Αυτή η δουλειά αντικατοπτρίζεται στην έξοδο του συστήματος,  $y(t)$ . Το σήμα που περιγράφει το σύστημα συνήθως συμβολίζεται ως  $h(t)$ , και λέγεται κρουστική απόκριση. Η σχέση εισόδου-εξόδου ορίζεται ως η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική

απόκριση:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.11)$$

όπου  $*$  συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης. Επίσης, μπορεί ένα σύστημα να περιγραφεί με μια απλή μαθηματική σχέση, ως η έξοδος συναρτήσει της εισόδου:

$$y(t) = f(x(t)) \quad (5.12)$$

### 5.4.1 Ιδιότητες Συστημάτων

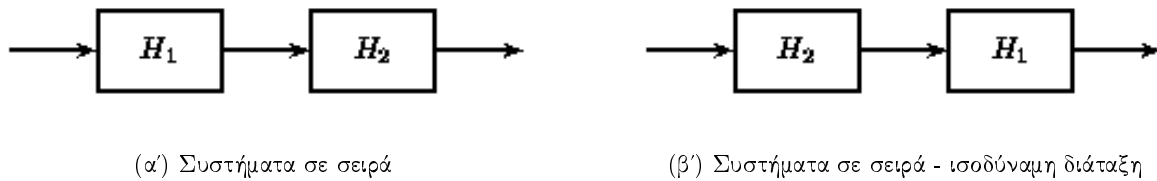
Τα συστήματα έχουν ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες, τις οποίες και θα συζητήσουμε εδώ. Οι ιδιότητες αυτές είναι οι εξής:

1. **Συστήματα με μνήμη:** τα συστήματα με μνήμη είναι αυτά για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα  $y(t) = 2x(t)$  είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ενώ το σύστημα  $y(t) = e^{x(t-1)}$  είναι ένα σύστημα με μνήμη.
2. **Αιτιατά συστήματα:** τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου ΔΕΝ απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα  $y(t) = 2x(t-1) + \sin(x(t))$  είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα  $y(t) = x(t-2)^2 + 4x(t+4)$  είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του  $y(t)$  απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η  $x(t+4)$ . Εναλλακτικά, μπορείτε να ελέγχετε την  $h(t)$ , αν σας δίνεται. Αν ισχύει ότι  $h(t) = 0, t < 0$ , τότε το σύστημα είναι αιτιατό. Μια και είπαμε ότι ένα σύστημα δεν είναι τίποτα άλλα από ένα σήμα κι αυτό, θα δείτε λίγο παρακάτω ότι ένα αιτιατό σήμα  $x(t)$  ικανοποιεί τη σχέση  $x(t) = 0, t < 0$ .
3. **Γραμμικά συστήματα:** τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \rightarrow y(t) &= T\{Ax_1(t) + Bx_2(t)\} \\ &= AT\{x_1(t)\} + BT\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Με λόγια, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα  $y(t) = 2x(t+1) - 3x(t-4)$  είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα  $y(t) = \sqrt{x(t)}$  δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το  $y(t) = x^2(t)$  δεν είναι γραμμικό. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική.

4. **Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα:** τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι η έξοδός τους ΔΕΝ εξαρτάται ρητά από το χρόνο  $t$ . Για παράδειγμα, το σύστημα  $y(t) = 3x(t+2) - 2\cos(x(t-2))$  είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα  $y(t) = tx(t)$  είναι χρονικά μεταβλητό.



(α) Συστήματα σε σειρά

(β) Συστήματα σε σειρά - ισοδύναμη διάταξη

Σχήμα 5.3: Συστήματα σε σειρά

5. **Ευσταθή συστήματα:** τα συστήματα που είναι ευσταθή είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y < +\infty \quad (5.14)$$

Με λόγια, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, το σύστημα  $y(t) = x(t - 1) + t$  δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα  $y(t) = t/x(t + 2)$ , ενώ το σύστημα  $y(t) = \sin(x(t))$  είναι ευσταθές. Ο συγκεκριμένος ορισμός της ευστάθειας λέγεται και BIBO stability - Bounded Input Bounded Output stability, που δηλώνει ακριβώς ότι είπαμε: όταν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη (κι όχι απαραίτητα από τον ίδιο αριθμό-φράγμα, όπως φαίνεται παραπάνω).

Από όλες αυτές τις κατηγορίες σημάτων, τα πιο σημαντικά είναι αυτά που είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, και σε αυτά θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα όταν μιλάμε για συστήματα. Η ευστάθεια είναι συνήθως μια επιθυμητή ιδιότητα αλλά δε θα τη θεωρήσουμε δεδομένη στη μελέτη μας.

#### 5.4.2 Συνέλιξη και συστήματα - I

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η συνέλιξη είναι μια πολύ σημαντική πράξη, γιατί συνδέει την έξοδο,  $y(t)$ , ενός συστήματος με την είσοδό του,  $x(t)$ , μέσω της σχέσης

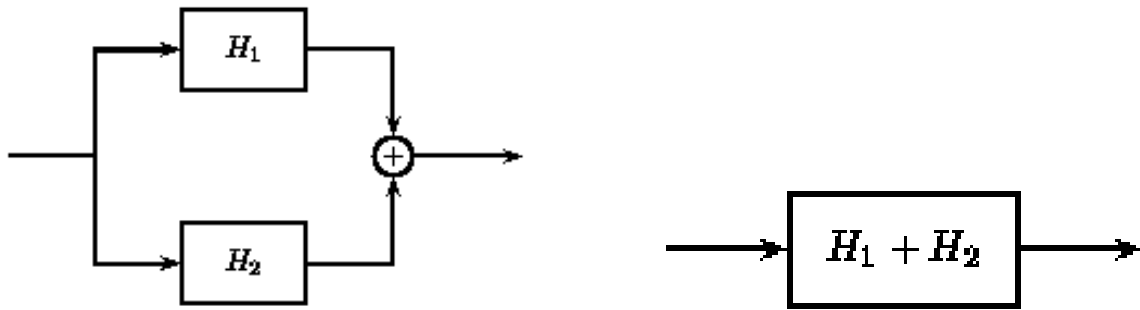
$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (5.15)$$

όπου  $h(t)$  η περίφημη χροστική απόκριση, το σήμα δηλαδή που χαρακτηρίζει το σύστημά μας και τη λειτουργία του. Η αναλυτική μελέτη συστημάτων δεν είναι αντικείμενο του μαθήματος – δυστυχώς :- ) – οπότε πριν δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος, ας δούμε μερικές διατάξεις συστημάτων που συναντώνται συχνά στην πράξη.

Στο σχήμα 5.3α', φαίνονται δυο συστήματα σε σειρά. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα,  $y_{s1}(t)$ , είναι:

$$y_{s1}(t) = (x_1(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x_1(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x_1(t) * h_2(t)) * h_1(t) \quad (5.16)$$

λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης.



(α) Παράλληλα συστήματα

(β) Παράλληλα συστήματα - ισοδύναμη διάταξη

Σχήμα 5.4: Παράλληλα συστήματα

Αν αναδιατάξουμε τη σειρά των συστημάτων, θα έχουμε τη διάταξη στο σχήμα 5.3β', για την οποία η έξοδος είναι

$$y_{s2}(t) = (x_1(t) * h_2(t)) * h_1(t) = x_1(t) * (h_2(t) * h_1(t)) = (x_1(t) * h_1(t)) * h_2(t) \quad (5.17)$$

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση 5.16, άρα οι δυο διατάξεις είναι ισοδύναμες.

Στο σχήμα 5.4α', φαίνονται δυο συστήματα σε παραλληλία. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα,  $y_{s1}(t)$ , είναι:

$$y_{s1}(t) = (x_1(t) * h_1(t)) + (x_1(t) * h_2(t)) = x_1(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \quad (5.18)$$

λόγω ιδιοτήτων της συνέλιξης.

Έστω ότι έχουμε τη διάταξη στο σχήμα 5.4β', για την οποία η έξοδος είναι

$$y_{s2}(t) = x_1(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (x_1(t) * h_1(t)) + (x_1(t) * h_2(t)) \quad (5.19)$$

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση 5.18, άρα οι δυο διατάξεις είναι ισοδύναμες.

### 5.4.3 Συνέλιξη και Συστήματα - II

Είπαμε προηγουμένως ότι η σχέση που συνδέει την είσοδο,  $x(t)$ , με την έξοδο,  $y(t)$ , ενός συστήματος,  $h(t)$ , εκφράζεται μέσω της συνέλιξης:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (5.20)$$

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα, και το αντίστροφο. Άρα η ίδια σχέση που περιγράφει το

σύστημα μπορεί να γραφεί και ως:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (5.21)$$

Ο μετασχ. Fourier του συστήματος  $h(t)$  λέγεται, στην ορολογία των συστημάτων, *απόκριση συχνότητας*. Ένα σύστημα  $h(t)$  με απόκριση σε συχνότητα  $H(f)$  ίσως μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα στο χώρο των συχνοτήτων απ' ό,τι στο χώρο του χρόνου. Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (5.22)$$

Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας  $f$ . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{N(f)}{D(f)} \quad (5.23)$$

όπου  $N(f), D(f)$  ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα  $H(f)$ , με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από μια απλή διαδικασία που λέγεται “Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα”, και περιγράφεται αναλυτικά στο Παράρτημα αυτών των σημειώσεων. Εν συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα λέει ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{\beta_k - j2\pi f} \quad (5.24)$$

Σύμφωνα με τον πίνακα με τα ζεύγη Fourier (4.2), μπορούμε, έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα, να βρούμε την  $h(t)$ , ως

$$H(f) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{\beta_k - j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^M A_k e^{-\alpha_k t} u(t) + \sum_{k=1}^L B_k e^{\beta_k t} u(-t) \quad (5.25)$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και το  $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ , αφού και το  $X(f)$  εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \quad (5.26)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά.

Παράδειγμα 1:

Έστω το σύστημα

$$h(t) = e^{-3t} u(t) \quad (5.27)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(t) \quad (5.28)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος  $y(t)$ .

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον κλασικό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον πίνακα 4.2, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 y(t) = x(t) * h(t) &\longleftrightarrow Y(f) = X(f)H(f) = \left( \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} \right) \frac{1}{3+j2\pi f} \\
 &= \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} + \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \\
 &= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{3+j2\pi f} + \frac{C}{2+j2\pi f} + \frac{D}{3+j2\pi f} \longleftrightarrow \\
 y(t) &= Ae^{-t}u(t) + (B+D)e^{-3t}u(t) + Ce^{-2t}u(t) \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

με

$$A = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \Big|_{f=-1/j2\pi} = \frac{2}{(3+j2\pi f)} \Big|_{f=-1/j2\pi} = 1 \quad (5.30)$$

$$B = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{f=-3/j2\pi} = \frac{2}{(1+j2\pi f)} \Big|_{f=-3/j2\pi} = -1 \quad (5.31)$$

$$C = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \Big|_{f=-2/j2\pi} = \frac{1}{(3+j2\pi f)} \Big|_{f=-2/j2\pi} = 1 \quad (5.32)$$

$$D = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}(3+j2\pi f) \Big|_{f=-3/j2\pi} = \frac{1}{(2+j2\pi f)} \Big|_{f=-3/j2\pi} = -1 \quad (5.33)$$

και άρα

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (5.34)$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης (χωρίς γραφική λύση, μια και δεν είναι απαραίτητο). Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\
 &\left( \begin{array}{l} \text{ισχύει ότι } u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \end{array} \right) \\
 &= \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)} d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)} d\tau \\
&= \int_0^t 2e^{2\tau-3t} d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t} d\tau \\
&= 2e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau + e^{-3t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\
&= e^{-3t} e^{2\tau} \Big|_0^t + e^{-3t} e^{\tau} \Big|_0^t \\
&= e^{-3t}(e^{2t} - 1) + e^{-3t}(e^t - 1) \\
&= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} \\
&= e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \quad 0 < t \\
&= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t)
\end{aligned} \tag{5.35}$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με την 5.34! :-) Διαλέξτε τι προτιμάτε. :-)

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο  $x(t)$ , αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

#### Παράδειγμα 2:

Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \tag{5.36}$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα  $x(t)$ , το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \tag{5.37}$$

Βρείτε την είσοδο,  $x(t)$ .

#### Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} - \frac{1}{2 + j2\pi f} \tag{5.38}$$

Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned}
 Y(f) = H(f)X(f) &\iff X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} = \frac{\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} \\
 &= \frac{\frac{1}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} \\
 &= \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)} \\
 &= \frac{A}{2+j2\pi f} + \frac{B}{1+j2\pi f} \iff \\
 x(t) &= Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

με

$$A = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \Big|_{f=-2/j2\pi} = \frac{3+j2\pi f}{(1+j2\pi f)} \Big|_{f=-2/j2\pi} = -1 \quad (5.40)$$

$$B = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \Big|_{f=-1/j2\pi} = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)} \Big|_{f=-1/j2\pi} = 2 \quad (5.41)$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \quad (5.42)$$

Μερικές παρατηρήσεις...

1. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το σύστημα  $h(t)$  αν μας δίνεται η είσοδος και η έξοδος,  $x(t), y(t)$ , αντίστοιχα. Κάντε το! :-)
2. Για τον υπολογισμό των σταθερών  $A, B, C, D$  παραπάνω, δείτε το Παράρτημα αυτών των σημειώσεων.
3. Φυσικά για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία και τριβή σε ασκήσεις. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι εμφανές με το μάτι κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε. :-)

#### 5.4.4 Φίλτρα

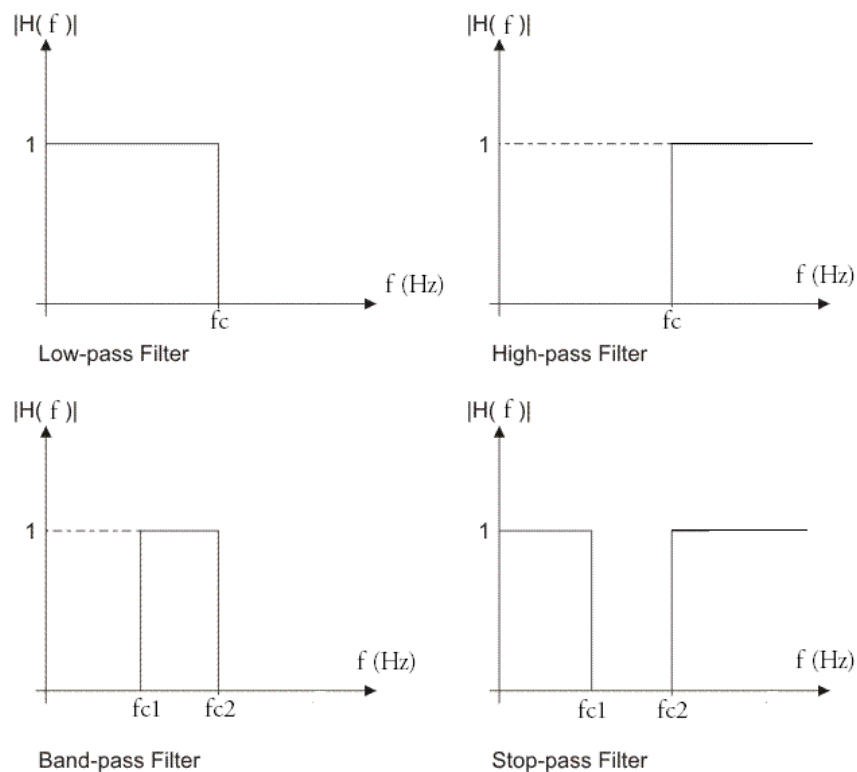
Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθειες και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα



συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο (του καφέ π.χ.) δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος τους δηλαδή) κάποιες άλλες.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων:

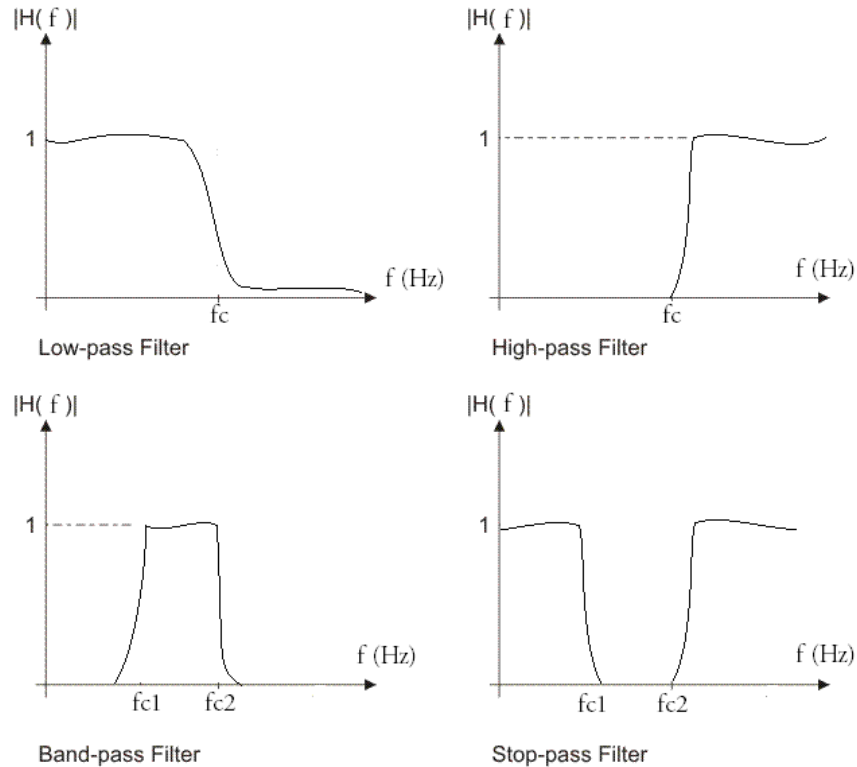
1. Το βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*,  $f_c$ .
2. Το υψιπερατό (highpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*,  $f_c$ , ως το  $+\infty$ .
3. Το ζωνοπερατό (bandpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη  $f_{c1}$ , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα,  $f_{c2}$ . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το ζωνοαπαγορευτικό (bandstop) φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη  $f_{c1}$ , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα,  $f_{c2}$ . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή. Το ζωνοαπαγορευτικό φίλτρο είναι κάπως σαν το “αντίθετο” του ζωνοπερατού. :-)



Σχήμα 5.5: Ιδανικά Φίλτρα

Τα φίλτρα αυτά φαίνονται σχηματικά στην εικόνα 5.5, μόνο για τις θετικές συχνότητες. Συμμετρικά είναι τα σχήματα και για τις αρνητικές, αφού μιλάμε για πραγματικά σήματα. Τα φίλτρα αυτά λέγονται

ιδανικά, γιατί ορίζονται μόνο θεωρητικά, δηλ. δεν μπορούμε να τα κατασκευάσουμε στην πράξη έτσι όπως φαίνονται στην εικόνα. Μπορούμε να τα προσεγγίσουμε αρκετά καλά, με φίλτρα όπως αυτά της εικόνας 5.6. Προς το παρόν και σε αυτό το μάθημα, μας ενδιαφέρουν μόνο τα ιδανικά φίλτρα,



Σχήμα 5.6: Πραγματοποιήσιμα Φίλτρα

για τα οποία μπορούμε να έχουμε μια εύκολη μαθηματική αναπαράστασή τους. Για παράδειγμα, το χαμηλοπερατό φίλτρο μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά ως:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (5.43)$$

Η Σχεδίαση Φίλτρων είναι ένας ολόκληρος τομέας της Επεξεργασίας Σήματος από μόνος του, οπότε δε θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ.

## 5.5 Σύγκριση σημάτων - Συσχέτιση

Έχοντας πλέον όλα τα εργαλεία της Ανάλυσης Fourier διαθέσιμα, μπορούμε να ρίξουμε μια γρήγορη ματιά στη σύγκριση σημάτων. Η σχέση που μας βοηθάει σε αυτήν την κατεύθυνση λέγεται *Συσχέτιση*

και για δυο σήματα  $x(t), y(t)$  δίνεται από την εξίσωση

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (5.44)$$

Η συζυγία στο  $x(t)$  εμφανίζεται επειδή εν γένει τα σήματα είναι μιγαδικά. Αν πρόκειται για πραγματικά σήματα, η συζυγία απλά παραλείπεται. Η συσχέτιση “βαφτίζεται” με διαφορετικό όνομα αν συγκρίνουμε διαφορετικά σήματα (ετεροσυσχέτιση), ενώ αν συγκρίνουμε το σήμα με τον εαυτό του ( $x(t) = y(t)$ ), λέγεται αυτοσυσχέτιση. Η συσχέτιση μεταξύ δυο σημάτων είναι εξαιρετικά σημαντική επειδή είναι ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ δυο σημάτων. Η θεωρία της συσχέτισης εμφανίζεται σε διάφορους τομείς επεξεργασίας σήματος, όπως στα ραντάρ, στα σόναρ, στις ψηφιακές επικοινωνίες, κλπ.

### 5.5.1 Περιοδική Συσχέτιση

Ας ξεκινήσουμε από την περιοδική συσχέτιση, δηλ. από τη μελέτη ομοιότητας περιοδικών σημάτων. Για να θυμηθούμε κάποια πράγματα. Δείτε:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (5.45)$$

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (5.46)$$

Βλέπετε πως η ομοιότητα είναι προφανής! (μη μου πείτε πως δεν το βλέπετε! :-)) Και μαντέψτε – η ιδέα της προβολής που συζητήσαμε παραπάνω για τους συντελεστές  $X_k$ , ισχύει κι εδώ! Παντού αυτή η προβολή, τελικά! :-) Εδώ όμως, προβάλλουμε το σήμα  $x(t)$  πάνω σε ένα άλλο σήμα  $y(t)$  το οποίο εδώ έχει την ικανότητα να μετακινείται στο χρόνο,  $y(\tau+t)$ , και για κάθε χρονική μετακίνηση  $t$ , παίρνουμε και ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ των σημάτων. Όπως ακριβώς παίρναμε ένα  $X_k$  για κάθε ακέραια πολλαπλάσια συχνότητα  $e^{-j2\pi k f_0 t}$  στη σχέση 5.45, έτσι κι εδώ παίρνουμε ένα  $\phi_{xy}(\Delta t)$  για κάθε απειροστή μετακίνηση  $\Delta t$  του σήματος  $y(t)$ , και φυσικά αυτή η διαδικασία μας δίνει στο τέλος μια συνεχή συνάρτηση  $\phi_{xy}(t)$ .

Για να καταλάβουμε διαισθητικά τη συσχέτιση, ας θεωρήσουμε πρώτα το παράδειγμα της αυτοσυσχέτισης, δηλ. της συσχέτισης ενός σήματος με τον εαυτό του:

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau)x(\tau+t)d\tau \quad (5.47)$$

Εδώ έχουμε λοιπόν ένα μέτρο της ομοιότητας του σήματος με τον εαυτό του. Πρέπει να σας είναι αντιληπτό ότι η μέγιστη ομοιότητα του σήματος θα συμβαίνει όταν δεν υπάρχει καμιά μετακίνηση, δηλ. όταν  $t = 0$ . Τότε τα δυο σήματα “πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο” και το γινόμενο τους είναι μέγιστο. Όσο το  $t$  αρχίζει να αλλάζει, δηλ. το  $x(\tau+t)$  να μετακινείται, τόσο διαφοροποιείται αυτό το γινόμενο, γιατί πλέον τα δυο σήματα αρχίζουν να μη μοιάζουν πια σε μια χρονική στιγμή  $t_0$ . Όμως, πρέπει να θυμόμαστε ότι έχουμε να κάνουμε με περιοδικό σήμα. Άρα μετά από μετακίνηση κατά  $t = T_0$ , τα σήματα

πάλι θα πέφτουν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο, και άρα πάλι η ομοιότητά τους θα είναι μέγιστη! Κι αυτό θα συνεχίζεται επ' άπειρον. Από αυτήν την παρατήρηση, συμπεραίνουμε ότι

$$|\phi_{xx}(t)| \leq \phi_{xx}(0) = \phi_{xx}(kT_0) \quad (5.48)$$

που είναι η μαθηματική γραφή της παρατήρησης που κάναμε μόλις σχετικά με τη μέγιστη ομοιότητα. Η ετεροσυσχέτιση μπορεί να γίνει αντιληπτή με παρόμοιο τρόπο, μόνο που τώρα δεν έχουμε δυο ίδια σήματα, αλλά δυο διαφορετικά  $x(t), y(t)$ . Τα σημεία μεγίστου της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης είναι εκεί που τα δυο σήματα μοιάζουν περισσότερο το ένα με το άλλο. ;-)

Στο χώρο των συχνοτήτων, αποδεικνύεται ότι το σήμα της συσχέτισης μεταφράζεται ως

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.49)$$

Πολύ πιο απλή σχέση στη συχνότητα, συμφωνείτε; Για την περίπτωση της αυτοσυσχέτισης, η παραπάνω σχέση απλά γίνεται

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(\tau)x(\tau+t)d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 t} \quad (5.50)$$

Παρατηρήστε ότι για  $t = 0$ , η αυτοσυσχέτιση μας δίνει την ισχύ του σήματος, σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval:

$$\phi_{xx}(0) = E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad (5.51)$$

### 5.5.2 Συσχέτιση για μη περιοδικά σήματα

Ας συνεχίσουμε με την συσχέτιση για μη περιοδικά σήματα. Η αντιστοιχία κι εδώ είναι εμφανής. Δείτε:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (5.52)$$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (5.53)$$

Βλέπετε πως κι εδώ η ομοιότητα είναι προφανής! (κι εδώ μη μου πείτε πως δεν το βλέπετε! :-)) Εδώ, αυτή τη φορά, προβάλλουμε το σήμα  $x(t)$  πάνω σε ένα άλλο σήμα  $y(t)$  το οποίο εδώ έχει την ικανότητα να μετακινείται στο χρόνο  $y(\tau+t)$ , και για κάθε χρονική μετακίνηση  $t$ , παίρνουμε και ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ των σημάτων. Όπως ακριβώς παίρναμε ένα  $X(\Delta f)$  για κάθε συχνότητα  $e^{-j2\pi \Delta f t}$  στη σχέση 5.52, έτσι κι εδώ παίρνουμε ένα  $\phi_{xy}(\Delta t)$  για κάθε απειροστή μετακίνηση  $\Delta t$  του σήματος  $y(t)$ , και φυσικά αυτή η διαδικασία μας δίνει στο τέλος μια συνεχή συνάρτηση  $\phi_{xy}(t)$ .

Κι εδώ η αυτοσυσχέτιση, ορίζεται ως:

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau+t)d\tau \quad (5.54)$$

Και εδώ έχουμε λοιπόν ένα μέτρο της ομοιότητας του σήματος με τον εαυτό του. Η μέγιστη ομοιότητα του σήματος θα συμβαίνει όταν δεν υπάρχει καμιά μετακίνηση, δηλ. όταν  $t = 0$ . Τότε τα δυο σήματα “πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο” και το γινόμενό τους είναι μέγιστο. Όσο το  $t$  αρχίζει να αλλάζει, δηλ. το  $x(\tau+t)$  να μετακινείται, τόσο διαφοροποιείται αυτό το γινόμενο, γιατί πλέον τα δυο σήματα αρχίζουν να μη μοιάζουν πια σε μια χρονική στιγμή  $t_0$ . Από αυτήν την παρατήρηση, συμπεραίνουμε ότι

$$|\phi_{xx}(t)| \leq \phi_{xx}(0) \quad (5.55)$$

που είναι η μαθηματική γραφή της παρατήρησης που κάναμε μόλις σχετικά με τη μέγιστη ομοιότητα. Σημειώστε ότι τα σήματα δεν είναι πια περιοδικά, οπότε υπάρχει μόνο ένα σημείο όπου η αυτοσυσχέτιση είναι μέγιστη. Η ετεροσυσχέτιση μπορεί να γίνει αντιληπτή με παρόμοιο τρόπο, μόνο που τώρα δεν έχουμε δυο ίδια σήματα, αλλά δυο διαφορετικά  $x(t), y(t)$ . Το σημείο μεγίστου της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης – δεν μπορεί να είναι παραπάνω από ένα – είναι εκεί που τα δυο σήματα μοιάζουν περισσότερο το ένα με το άλλο (όχι απαραίτητα στο 0). :-)

Στο χώρο των συχνοτήτων, αποδεικνύεται ότι το σήμα της συσχέτισης μεταφράζεται ως

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \quad (5.56)$$

όπου η

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \quad (5.57)$$

ονομάζεται Energy Interspectral Density – Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας.

Για την περίπτωση της αυτοσυσχέτισης, η παραπάνω σχέση απλά γίνεται

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau+t)d\tau \leftrightarrow \Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2 \quad (5.58)$$

όπου η

$$\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2 \quad (5.59)$$

ονομάζεται (πιο απλά) Energy Spectral Density – Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας, και μας περιγράφει την κατανομή της ενέργειας του σήματος ανά τις συχνότητες. Άρα εδώ φαίνεται ότι η ετεροσυσχέτιση στο χρόνο είναι απλά το μέτρο του μετασφ. Fourier στο τετράγωνο, στη συχνότητα!

Παρατηρήστε ότι για  $t = 0$ , η αυτοσυσχέτιση μας δίνει την ενέργεια του σήματος, σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval:

$$\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (5.60)$$

### 5.5.3 Συσχέτιση για σήματα ισχύος

Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος αλλά όχι μόνο αυτά. Θα επεκτείνουμε την ανάλυση των περιοδικών σημάτων για σήματα ισχύος. Για σήματα ισχύος, η ετεροσυσχέτιση ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau)y(\tau + t)d\tau \quad (5.61)$$

ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως

$$\phi_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau)x(\tau + t)d\tau \quad (5.62)$$

Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ονομάζεται Power Spectral Density – Φασματική Πυκνότητα Ισχύος, και μας περιγράφει την κατανομή της ισχύος ανά συχνότητα, ενώ ο αντίστοιχος της ετεροσυσχέτισης ονομάζεται Power Interspectral Density – Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Παρατηρήστε ότι για  $t = 0$ , η αυτοσυσχέτιση μας δίνει την ισχύ (και όχι πια ενέργεια – μιλάμε για σήματα ισχύος άλλωστε) του σήματος, σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval:

$$\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)df \quad (5.63)$$

Προσέξτε πως εδώ, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος ΔΕΝ ισούται με το μέτρο του μετασχ. Fourier στο τετράγωνο της αυτοσυσχέτισης, όμως μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τη σχέση

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad (5.64)$$

όπου  $X(f, T)$  είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t, T) = x(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (5.65)$$

όπου  $x(t)$  είναι το σήμα ισχύος, ενώ το  $x(t, T)$  είναι ένα κομμάτι του σήματος ισχύος, διάρκειας  $T$ , δηλ. είναι σήμα ενέργειας.

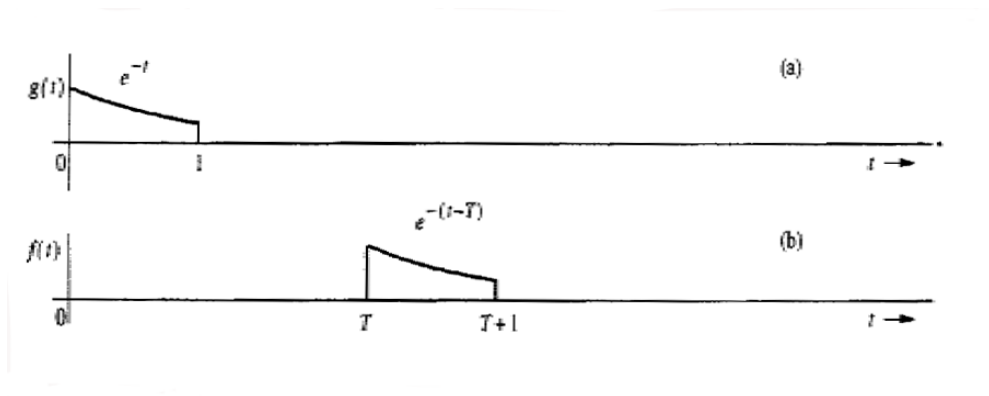
### 5.5.4 Εφαρμογές

Ας αναφέρουμε απλά δυο εφαρμογές της συσχέτισης στην πράξη, έτσι, για να σας πείσουμε για τη σημασία της. :-)

1. Ας θεωρήσουμε ένα ραντάρ, όπου στόχος του είναι να ανιχνεύσει έναν πιθανό στόχο, στέλνοντας προς αυτόν ένα σήμα. Αν ο στόχος είναι παρών, το σήμα αντανακλάται και επιστρέφει στον πομπό, ενώ αν όχι, ο πομπός λαμβάνει μόνο θόρυβο (φυσικά τα σήματα αυτά είναι μη περιοδικά). Η παρουσία ή η απουσία του ανακλώμενου σήματος επιβεβαιώνει την παρουσία ή την απουσία του στόχου (δε μιλάμε για καταστάσεις Stealth, έτσι; Μιλάμε για απλά πράγματα :-)). Το

κρίσιμο πρόβλημα σε αυτή τη διαδικασία είναι η ανίχνευση του ανακλώμενου σήματος. Φυσικά, το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνεται έχει αλλοιωθεί σοβαρά λόγω απόστασης και θορύβου του περιβάλλοντος. Σε μια τέτοια περίπτωση, η συσχέτιση του ληφθέντος σήματος με τον αρχικό, που μεταδόθηκε, μπορεί να μας βοηθήσει σημαντικά!

Ας εξηγήσουμε ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ :-) πώς γίνεται η ανίχνευση του σήματος με χρήση της συσχέτισης. Μετρώντας τη χρονική καθυστέρηση μεταξύ του σήματος που στάλθηκε και αυτού που ελήφθη, μπορούμε να προσδιορίσουμε την απόσταση του στόχου. Έστω ότι το σήμα που στάλθηκε είναι το  $g(t)$  και αυτό που ελήφθη είναι το  $f(t)$ , όπως περιγράφονται στο σχήμα 5.7. Αν



Σχήμα 5.7: Ερμηνεία της συσχέτισης

γινόταν απ' ευθείας σύγκριση για την ομοιότητα, με μια εξίσωση όπως

$$\phi_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \quad (5.66)$$

το αποτέλεσμα θα ήταν μηδέν. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε τη γνωστή σχέση συσχέτισης

$$\phi_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau+t)d\tau \quad (5.67)$$

Αν για κάποιο  $t$  (που είναι οι διαφορές καθυστερήσεις του ενός σήματος) παρατηρηθεί ισχυρή συσχέτιση (που σημαίνει μεγάλη τιμή στο ολοκλήρωμα), δεν ανιχνεύεται μόνο η παρουσία του σήματος αλλά και η σχετική χρονική μετατόπιση του  $f(t)$  σε σχέση με το  $g(t)$ . Έτσι, όχι μόνο μετράμε την παρουσία ενός στόχου αλλά και την απόστασή του. :-) Οπότε ή χτυπάμε το συναγερμό ή στέλνουμε τον πύραυλο να τον χτυπήσει... :-)

- Ένα πολύ hot θέμα στην Επεργασία Σήματος Φωνής (ω ναι, ασχολούμαστε πολύ με αυτά εμείς :-)) είναι η εύρεση της λεγόμενης θεμελιώδους συχνότητας  $f_0$  σε τμήματα φωνής που είναι έμφωνα, όπως το /α/. Σε αυτά τα τμήματα, θεωρούμε ότι οι συχνότητες του φάσματος είναι ακέραιες (ή σχεδόν ακέραιες) πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους συχνότητας. Αν βρούμε αυτή, μπορούμε να βρούμε και τις υπολοιπες. Θεωρούμε δηλαδή ότι το έμφωνο σήμα φωνής είναι περιοδικό (που δεν είναι, αλλά μας βολεύει και στην πράξη δουλεύει κιόλας! :-)) Ένας από

τους πρώτους τρόπους που προτάθηκαν για την εύρεση αυτής της συχνότητας, είναι η μέθοδος της αυτοσυσχέτισης. Θεωρώντας μικρά τμήματα φωνής που θεωρούμε με κάποια βεβαιότητα ότι είναι έμφωνα, εφαρμόζουμε την αυτοσυσχέτιση στο χρόνο σε κάθε ένα από αυτά. Συσχετίζουμε δηλαδή κάθε τμήμα με τον εαυτό του. Όπως είδαμε, η συσχέτιση περιοδικών σημάτων δίνει μέγιστα σε χρονικές στιγμές πολλαπλάσιες της περιόδου  $T_0$ . Έτσι λοιπόν, βρίσκοντας τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (εκτός φυσικά από την τιμή στη θέση 0), βρίσκουμε την περίοδο του σήματος, και άρα τη θεμελιώδη συχνότητα  $f_0 = 1/T_0$ .

### 5.5.5 Παρατηρήσεις

1. Παρατηρήστε ότι η συσχέτιση μοιάζει καταπληκτικά με τη συνέλιξη. Όμως ενώ η συνέλιξη εμπλέκει την ανάκλαση και τη μετατόπιση ενός εκ των δυο σημάτων, η συσχέτιση εμπλέκει ΜΟΝΟ τη μετατόπιση. Δείτε παρακάτω – θεωρούμε πραγματικά σήματα:

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (5.68)$$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau \quad (5.69)$$

Άρα πρέπει να σας είναι πιο εύκολο να υπολογίσετε τη συσχέτιση, απλά μετατοπίζοντας – κι όχι αναστρέφοντας – το ένα εκ των δυο σημάτων, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτή που ακολουθήσαμε στη συνέλιξη.

2. Φυσικά, αυτή η τόση μεγάλη ομοιότητα μεταξύ συνέλιξης και συσχέτισης δε θα μπορούσε παρά να μας οδηγήσει σε μια σχέση που τις συνδέει:

$$\phi_{xy}(t) = x(-t) * y(t) \quad (5.70)$$

ενώ για την αυτοσυσχέτιση είναι

$$\phi_{xx}(t) = x(-t) * x(t) \quad (5.71)$$

3. Σημαντικό είναι να παρατηρήσετε ότι ΔΕΝ ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη συσχέτιση, δηλ.

$$\phi_{xy}(t) \neq \phi_{yx}(t) \quad (5.72)$$

ενώ έχουμε δει ότι ισχύει για τη συνέλιξη:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = c_{yx}(t) \quad (5.73)$$

Αυτή είναι μια σημαντική διαφοροποίηση των δυο σχέσεων.

4. Είδαμε παραπάνω ότι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης  $\phi_{xx}(t)$  (που τον βαφτίσαμε *Φασμα-*



τική Πυκνότητα Ενέργειας) είναι ίσος με  $|X(f)|^2$ , δηλ. είναι ΠΑΝΤΑ πραγματική συνάρτηση, και ΠΑΝΤΑ θετική για όλες τις συχνότητες! Άρα η φάση του μετασχηματισμού είναι πάντα μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος οποιασδήποτε μετακίνησης στο χρόνο (φάση στη συχνότητα == μετακίνηση στο χρόνο) της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Ενδιαφέρον! :-)

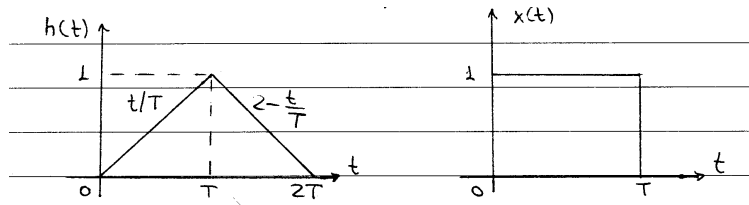
5. Σημαντικό είναι να θυμάστε ότι:

(α') Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης μας δίνει τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

(β') Ο αντίστρ. μετασχ. Fourier της Φασματικής Πυκνότητας Ενέργειας μας δίνει την αυτοσυσχέτιση

## 5.6 Ασκήσεις

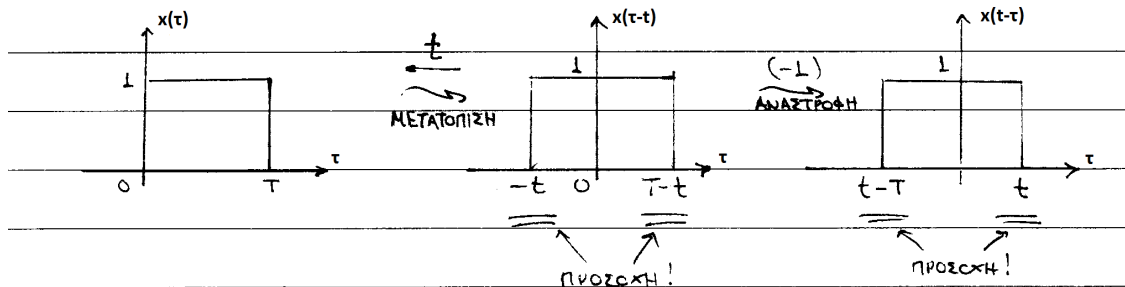
1. Έστω τα παρακάτω σήματα: Να υπολογίσετε τη συνέλιξη  $y(t) = x(t) * h(t)$ .



Σχήμα 5.8: Σχήμα Άσκησης 4.1

Λύση:

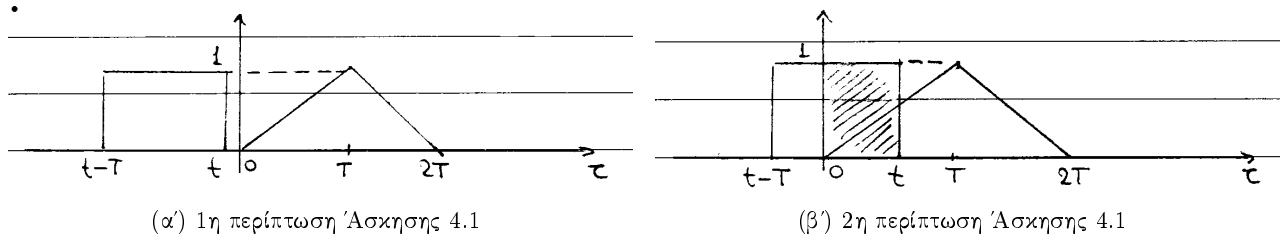
Επιλέγουμε να παίζουμε με το  $x(t)$ , καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 5.9. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο



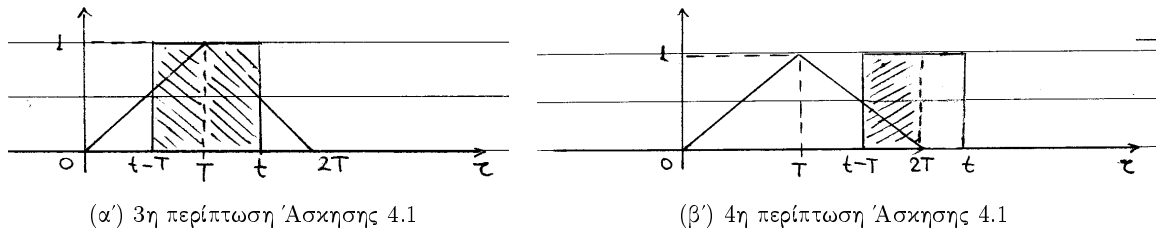
Σχήμα 5.9: Μετατόπιση και ανάκλαση για Άσκηση 4.1

5.2, θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

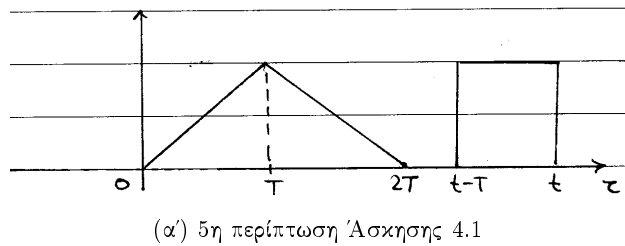
- $y(t) = 0, t < 0$  (σχήμα 5.10α')
- $y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \frac{\tau^2}{2T} \Big|_0^t = \frac{t^2}{2T}$ , για  $t \geq 0$  και  $t - T \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T$  (σχήμα 5.10β')
- $y(t) = \int_{t-T}^t \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}$ , για  $t - T < T$  και  $t \geq T \Leftrightarrow T \geq t < 2T$  (σχήμα 5.11α')
- $y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \left(2\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right) \Big|_{t-T}^{2T} = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}$ , για  $t < 3T$  και  $t \geq 2T \Leftrightarrow 2T \leq t < 3T$  (σχήμα 5.11β')
- $y(t) = 0, t \geq 3T$  (σχήμα 5.12α')



Σχήμα 5.10: Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - I



Σχήμα 5.11: Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - II



Σχήμα 5.12: Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - III

Άρα τελικά θα είναι:

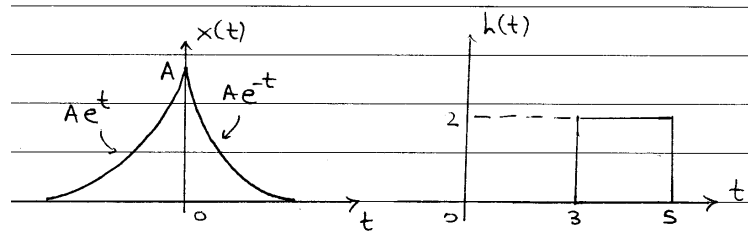
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t \geq 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 \leq t \leq T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T \geq t < 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T \leq t < 3T \end{cases} \quad (5.74)$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. Έστω τα σήματα

$$x(t) = Ae^{-|t|}, \quad h(t) = 2(u(t-3) - u(t-5))$$

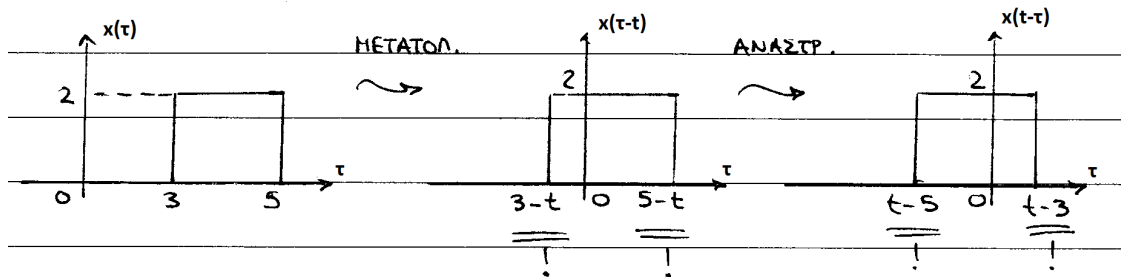
που φαίνονται στο σχήμα 5.13 Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.



Σχήμα 5.13: Σχήμα Άσκησης 4.2

Λύση:

Επιλέγουμε να παίξουμε με το  $h(t)$ , καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 5.14. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο



Σχήμα 5.14: Ανάκλαση και μετατόπιση του σήματος Άσκησης 4.2

5.2, θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{\tau} d\tau = 2A(e^{t-3} - e^{t-5})$ , για  $t-3 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3$  (σχήμα 5.15α')
- $y(t) = \int_{t-5}^0 2Ae^{\tau} d\tau + \int_0^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A(2A - e^{t-5} - e^{3-t})$ , για  $t \leq 5$  και  $t > 3 \Leftrightarrow 3 < t \leq 5$  (σχήμα 5.15β')
- $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A(e^{5-t} - e^{3-t})$ , για  $t-5 > 0 \Leftrightarrow t > 5$  (σχήμα 5.16α')

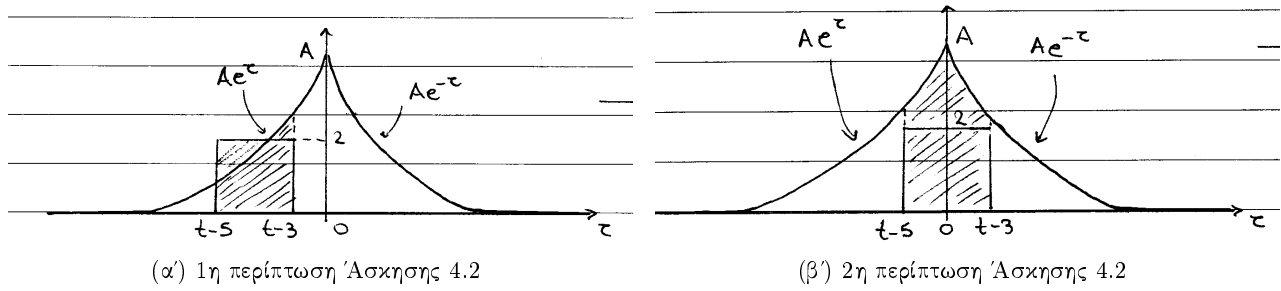
Άρα τελικά θα έχουμε

$$y(t) = \begin{cases} 2A(e^{t-3} - e^{t-5}), & t \leq 3 \\ 2A(2A - e^{t-5} - e^{3-t}), & 3 < t \leq 5 \\ 2A(e^{5-t} - e^{3-t}), & t > 5 \end{cases} \quad (5.75)$$

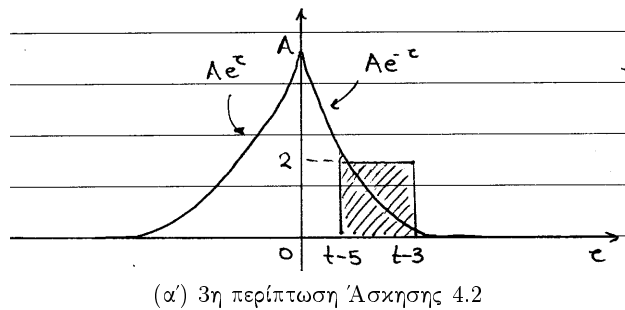
που είναι και το ζητούμενο.

3. Έστω τα σήματα

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ \frac{1}{t}, & t \geq 1 \end{cases}$$



Σχήμα 5.15: Περιπτώσεις Άσκησης 4.2 - I



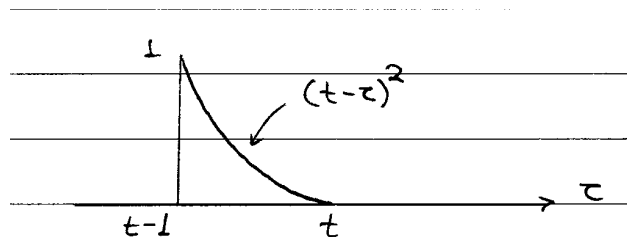
Σχήμα 5.16: Περιπτώσεις Άσκησης 4.2 - II

$$y(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.

Λύση:

Επιλέγουμε να παίζουμε με το  $h(t)$ , καθ' ότι ευκολότερο στη σχεδίαση. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 5.17. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε



Σχήμα 5.17: Ανακλασμένο και μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 4.3

στην παράγραφο 5.2, θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = 0, t \leq 1$
- $y(t) = \int_1^t \frac{1}{\tau} (t-\tau)^2 d\tau = t^2 \ln|\tau| \Big|_1^t - 2t\tau \Big|_1^t + \frac{\tau^2}{2} \Big|_1^t = \dots, \text{ για } t < 2 \text{ και } t > 1 \Leftrightarrow 1 < t < 2$

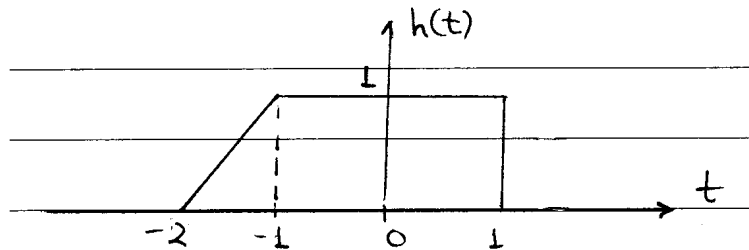
$$\bullet y(t) = \int_{t-1}^t \frac{1}{\tau} (t-\tau)^2 d\tau = t^2 \ln |\tau| \Big|_{t-1}^t - 2t\tau \Big|_{t-1}^t + \frac{\tau^2}{2} \Big|_{t-1}^t = \dots, \text{ για } t-1 \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 2$$

Επιβεβαιώστε εσείς σχηματικά ότι τα παραπάνω είναι σωστά! :-)

4. Έστω το σήμα

$$x(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t-4)$$

και το σήμα  $h(t)$  που φαίνεται στο σχήμα 5.18. Βρείτε το αποτέλεσμα της



Σχήμα 5.18: Σχήμα Άσκησης 4.4

συνέλιξης των δυο σημάτων.

Λύση:

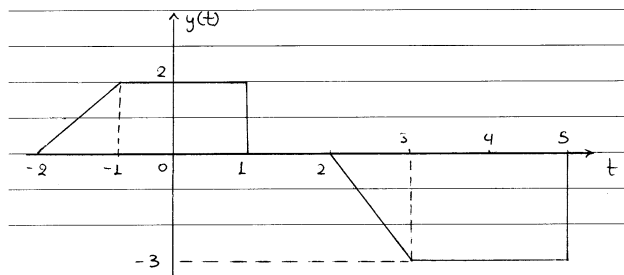
Η συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα απλά παράγει αντίγραφα των σημάτων με τα οποία συνελίσσεται, μετατοπισμένα στη θέση της συνάρτησης Δέλτα, πολλαπλασιασμένα με το πλάτος της. Ούτε ολοκληρώματα, ούτε μετατοπίσεις, ούτε αναστροφές, ούτε τίποτα! :-) Γίνεται όμως ευρεία χρήση των ιδιοτήτων της συνάρτησης Δέλτα, όπως η

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Άρα θα είναι απλά

$$y(t) = h(t) * (2\delta(t) - 3\delta(t-4)) = 2h(t) * \delta(t) - 3h(t) * \delta(t-4) = 2h(t) - 3h(t-4)$$

Το αποτέλεσμα της συνέλιξης φαίνεται στο σχήμα 5.19.

Σχήμα 5.19: Σήμα συνέλιξης  $h(t) * x(t)$  Άσκησης 4.4

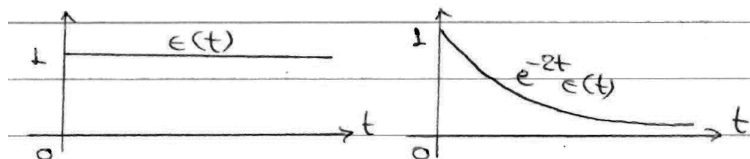
5. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = u(t)$$

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

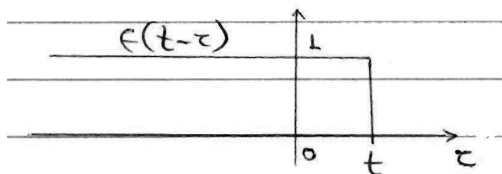
Λύση:

Τα δυο σήματα είναι όπως στο σχήμα 5.20. Παίζουμε με το  $x(t)$ . Το ανεστραμμένο και ανα-



Σχήμα 5.20: Σήματα Άσκησης 4.5

κλασμένο σήμα φαίνεται στο σχήμα 5.21. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στα

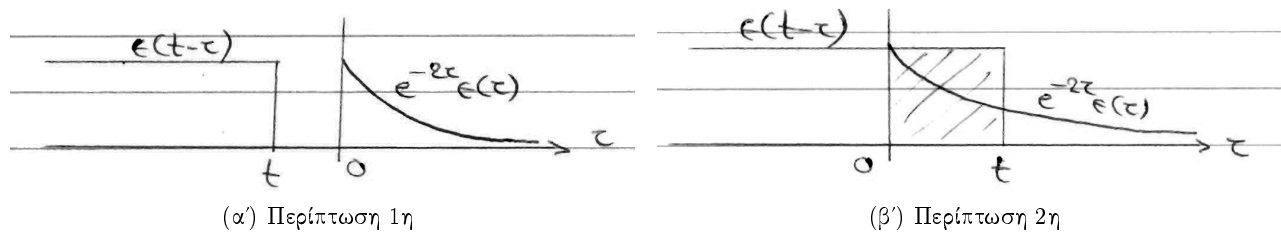


Σχήμα 5.21: Μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 4.5

σχήματα 5.22α' και 5.22β'.

- $c_{xy}(t) = 0, t \leq 0$

- $c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(t) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-2t}}{2}, t > 0$



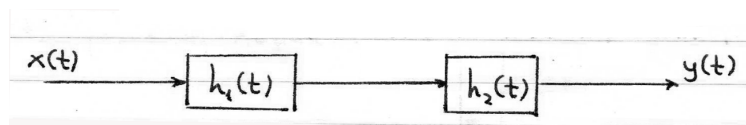
Σχήμα 5.22: Περιπτώσεις Άσκησης 4.5

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (5.76)$$

που είναι και το ζητούμενο.

6. Θεωρούμε το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα 5.23, με



Σχήμα 5.23: Σήμα Άσκησης 4.6

$$\begin{aligned} x(t) &= u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \\ h_1(t) &= \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) \\ h_2(t) &= u(t) - u(t - 3) \end{aligned}$$

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η έξοδος του συστήματος,  $y(t)$ .

Λύση:

Αφού τα συστήματα είναι σε σειρά, μπορούμε να βρούμε το συνολικό σύστημα  $h(t)$ , που είναι η συνέλιξη των δυο συστημάτων, και είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) * h_2(t) = \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) * (u(t) - u(t - 3)) \\ &= u\left(t - \frac{3}{2}\right) - u\left(t - 3 - \frac{3}{2}\right) = u\left(t - \frac{3}{2}\right) - u\left(t - \frac{9}{2}\right) \end{aligned}$$

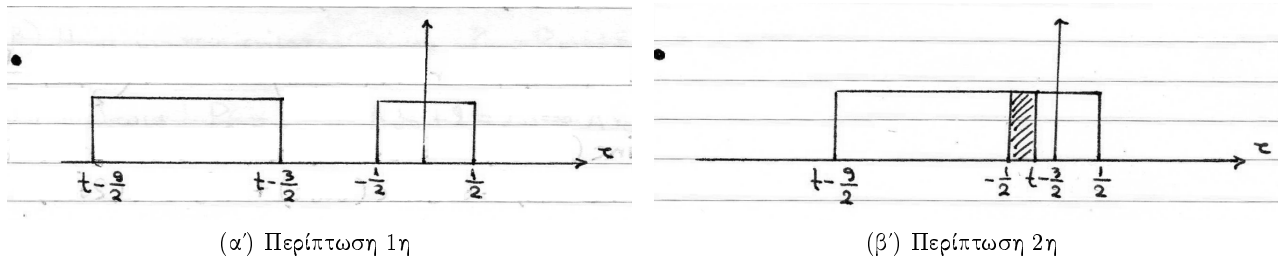


Άρα είναι σαν να περνάμε την είσοδο  $x(t)$  από το σύστημα  $h(t)$ . Παρατηρούμε ότι

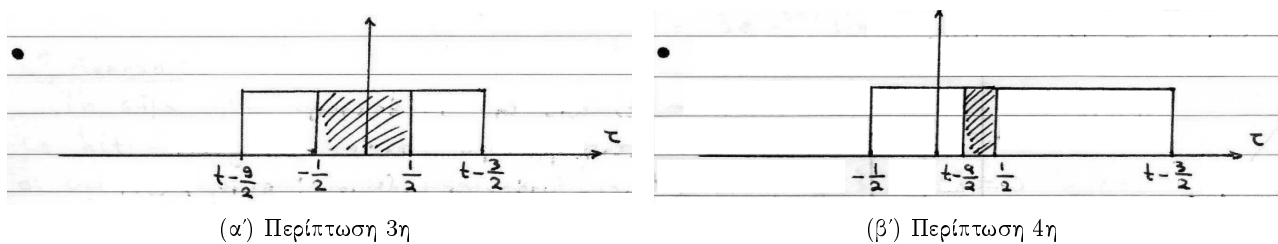
$$x(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{1}\right)$$

$$h(t) = u\left(t - \frac{3}{2}\right) - u\left(t - \frac{9}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t-3}{3}\right)$$

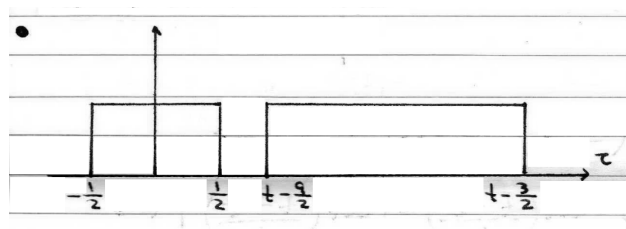
Οι περιπτώσεις φαίνονται στο σχήμα 5.24, 5.25, 5.26. Κατά τα γνωστά λοιπόν, θα παίξουμε με



Σχήμα 5.24: Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 1



Σχήμα 5.25: Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 2



Σχήμα 5.26: Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 3

το  $h(t)$ , και θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

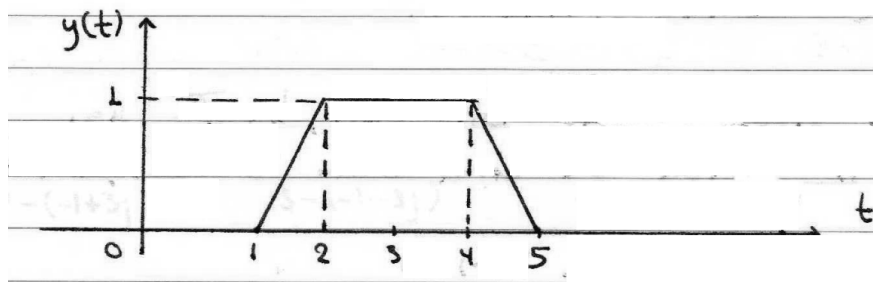
- $y(t) = 0, t \leq 1$
- $y(t) = \int_{-1/2}^{t-3/2} d\tau = \tau \Big|_{-1/2}^{t-3/2} = t - 1, \text{ για } 1 < t \leq 2.$
- $y(t) = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau = \tau \Big|_{-1/2}^{1/2} = 1, \text{ για } 2 < t \leq 4$

- $y(t) = \int_{t-9/2}^{1/2} d\tau = \tau \Big|_{t-9/2}^{1/2} = 5 - t$ , για  $4 < t \leq 5$
- $y(t) = 0$ ,  $t > 5$

Άρα συνολικά θα είναι

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \quad t > 5 \\ t - 1, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 4 \\ 5 - t, & 4 < t \leq 5 \end{cases} \quad (5.77)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 5.27.



Σχήμα 5.27: Αποτέλεσμα Άσκησης 4.6

Παρατήρηση: Μπορούμε να περάσουμε την είσοδο από το  $h_1(t)$ , να βρούμε την έξοδο  $y_1(t)$ , και έπειτα να περάσουμε την  $y_1(t)$  από το  $h_2(t)$  και να βρούμε την τελική έξοδο  $y(t)$ .

#### 7. Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος

$$\mathbf{x}(t) = e^{-at} \mathbf{u}(t), \quad \alpha > 0$$

Λύση:

Η αυτοσυσχέτιση εμπλέκει το γινόμενο του σήματος με τον εαυτό του, μετατοπισμένο κατά  $t$ . Δουλεύουμε όπως με τη συνέλιξη, απλά δεν αναστρέφουμε το σήμα, μόνο το μετατοπίζουμε. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις, ανάλογα με τη θέση του  $x(\tau + t)$ .

- Είναι

$$\begin{aligned} \phi_{xx}(t) &= \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-a(\tau+t)} d\tau = e^{-at} \int_0^{\infty} e^{-2a\tau} d\tau \\ &= e^{-at} \frac{1}{-2a} e^{-2a\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a} e^{-at}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

- Είναι

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(t) &= \int_{-t}^{\infty} e^{-a\tau} e^{-a(\tau+t)} d\tau = e^{-at} \int_{-t}^{\infty} e^{-2a\tau} d\tau \\ &= e^{-at} \frac{1}{-2a} e^{-2a\tau} \Big|_{-t}^{\infty} = \frac{1}{2a} e^{at}, \quad t < 0\end{aligned}$$

Άρα συνολικά ισχύει

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (5.78)$$

### 8. Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας του σήματος

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{u}(t), \quad \alpha > 0$$

Λύση:

Ξέρουμε ότι η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας δίνεται από το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης:

$$\Phi_{xx}(f) = F\{\phi_{xx}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Όμως έχουμε δείξει ότι

$$\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

Αρκεί να βρούμε το  $|X(f)|^2$ . Είναι:

$$\begin{aligned}X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = -\frac{1}{a+j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+j2\pi f} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right)\end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα αυτό ισχύει ότι:

$$e^{-(a+j2\pi f)t} = e^{-at} e^{-j2\pi ft} = f(t)g(t)$$

Η συνάρτηση  $f(t) = e^{-at}$  τείνει στο 0 όταν  $t \rightarrow \infty$ , ενώ η συνάρτηση  $g(t) = e^{-j2\pi ft}$  είναι φραγμένη, γιατί  $|g(t)| = |e^{-j2\pi ft}| = 1$ , για κάθε  $f, t$ . Από γνωστό θεώρημα, το όριο του γινομένου τείνει στο 0. Άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = 0$$

Άρα τελικά,

$$X(f) = -\frac{1}{a+j2\pi f} (0 - 1) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Τέλος, η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας είναι

$$\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad a > 0 \quad (5.79)$$

9. Έστω  $x(t), y(t)$  δυο μιγαδικά σήματα και

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau + t)d\tau$$

η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης τους. Έστω  $X(f), Y(f)$  ο μετασχηματισμούς Fourier τους. Δείξτε ότι

$$(\alpha') \phi_{yx}(t) \leftrightarrow Y^*(f)X(f)$$

$$(\beta') \phi_{xy}^*(-t) = \phi_{yx}(t)$$

$$(\gamma') \phi_{yx}^*(-t) = \phi_{xy}(t)$$

Λύση:

Είναι

(α')

$$\begin{aligned} F\{\phi_{yx}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)x(\tau + t)d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t)e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)X(f)e^{j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X(f) \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)e^{j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X(f) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right)^* \\ &= X(f)Y^*(f) \end{aligned} \quad (5.80)$$

(β') Είναι

$$\phi_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)x(t + \tau)d\tau \quad (5.81)$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\phi_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(t+\tau)d\tau, & (\text{θέτω } t \leftarrow -t) \\ \phi_{xy}(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau-t)d\tau \\ \phi_{xy}^*(-t) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau-t)d\tau \right)^* \\ \phi_{xy}^*(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(\tau-t)d\tau\end{aligned}$$

Θέτω  $u = \tau - t \Rightarrow du = d\tau$ . Άρα

$$\phi_{xy}^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u+t)y^*(u)du \quad (5.82)$$

Από τις σχέσεις 5.81, 5.82, αποδεικνύεται το ζητούμενο.

(γ') Είναι

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (5.83)$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\phi_{yx}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)y^*(\tau)d\tau, & (\text{θέτω } t \leftarrow -t) \\ \phi_{yx}(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t)y^*(\tau)d\tau \\ \phi_{yx}^*(-t) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t)y^*(\tau)d\tau \right)^* \\ \phi_{yx}^*(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau-t)y(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Θέτω  $u = \tau - t \Rightarrow du = d\tau$ . Άρα

$$\phi_{yx}^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(u)y(u+t)du \quad (5.84)$$

Από τις σχέσεις 5.84, 5.83, αποδεικνύεται το ζητούμενο.

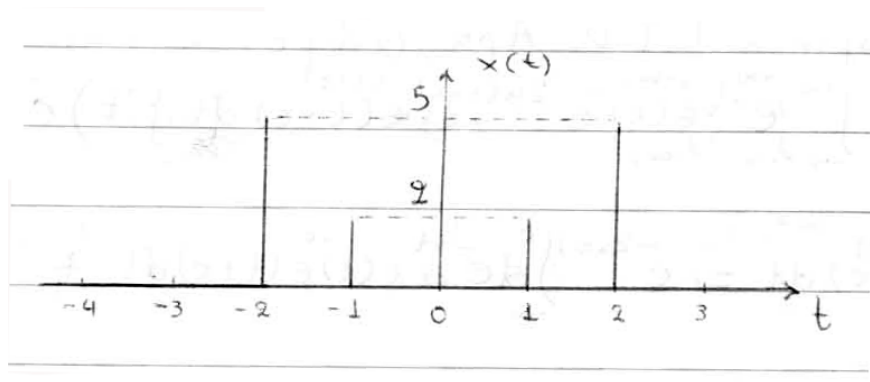
10. Έστω το σήμα

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} 5, & t = -2 \\ 2, & t = -1 \\ 2, & t = 1 \\ 5, & t = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5.85)$$

- (α') Σχεδιάστε το  $x(t)$ .
- (β') Γράψτε το  $x(t)$  ως γραμμικό συνδυασμό της συνάρτησης Δέλτα
- (γ') Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του  $x(t)$
- (δ') Δείξτε ότι  $\Phi_{xx}(f) \leq 156$ , όπου  $\Phi_{xx}(f)$  η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος.

Λύση:

- (α') Το σήμα φαίνεται στο σχήμα 5.28.



Σχήμα 5.28: Άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα

- (β') Το  $x(t)$  γράφεται ως

$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2) \quad (5.86)$$

- (γ') Ο μετασχ. Fourier είναι

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= 5e^{j2\pi f} + 2e^{j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} + 5e^{-j2\pi f} \\ &= 10\cos(4\pi f) + 4\cos(2\pi f) \\ &= 10(2\cos^2(2\pi f) - 1) + 4\cos(2\pi f) \\ &= 20\cos^2(2\pi f) - 10 + 4\cos(2\pi f) \\ &= 20\cos^2(2\pi f) + 4\cos(2\pi f) - 10 \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$(5.88)$$

(δ') Είναι

$$\begin{aligned}
 \Phi_{xx}(f) &= |X(f)|^2 & (5.89) \\
 &= |10 \cos(4\pi f) + 4 \cos(2\pi f)|^2 \\
 &= 100 \cos^2(4\pi f) + 40 \cos(4\pi f) \cos(2\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \\
 &= 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f)
 \end{aligned}$$

Προφανώς  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  και  $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$ , οπότε:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{xx}(f) &= 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \\
 &\leq 100 + 20 + 20 + 16 \\
 &= 156 & (5.90)
 \end{aligned}$$

11. Για ένα πραγματικό σήμα  $x(t)$  αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση.

Λύση:

Θέλουμε να δείξουμε ότι  $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}(-t)$ . Το σήμα μας είναι πραγματικό, άρα  $x(t) = x^*(t)$ .

Είναι:

$$\begin{aligned}
 \phi_{xx}(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau-t)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau-t)d\tau \quad (\text{θέτω } \tau-t = u \Rightarrow d\tau = du) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u+t)x(t)du \\
 &= \phi_{xx}(u) & (5.91)
 \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

12. Αποδείξτε ότι για τα σήματα

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = e^{-2\alpha t} \mathbf{u}(t), \alpha > 0$$

ισχύει  $\Phi_{xy}(f) = \mathbf{X}^*(f)\mathbf{Y}(f)$ , όπου  $\Phi_{xy}(f)$  η συνάρτηση Διαφασματικής Πυκνότητας Ενέργειας.

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
 \Phi_{xy}(f) &= F\{\phi_{xy}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{-2a(\tau+t)} u(\tau+t) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a(\tau+t)} u(\tau+t) e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau+t) e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \left( Y(f) e^{j2\pi f\tau} \right) d\tau \\
 &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= Y(f) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right)^* \\
 &= Y(f) X^*(f) = X^*(f) Y(f)
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

Παρατήρηση:

Εδώ, αποδείξαμε τη ζητούμενη σχέση γενικά, για κάθε σήμα  $x(t), y(t)$ . Αποδείξτε εσείς το πραγματικό ζητούμενο, υπολογίζοντας τη  $\Phi_{xy}(f)$  με τον ορισμό, και επιβεβαιώστε ότι ισούται με  $X^*(f)Y(f)$ , υπολογίζοντας και αυτό το γινόμενο. :-)

### 13. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

δείξτε ότι:

(α') η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης έχει μέγιστο για  $t = 0$ .

(β') η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει μέγιστο για  $t = 0$ .

Λύση:

(α') Έχουμε

$$\begin{aligned}
 |\phi_{xy}(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(t+\tau)d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)|^2 d\tau \\
 &= \phi_{xx}(0)\phi_{yy}(0) \Rightarrow |\phi_{xy}(t)| \leq \sqrt{\phi_{xx}(0)\phi_{yy}(0)}
 \end{aligned} \tag{5.93}$$



(β') Έχουμε

$$\begin{aligned} |\phi_{xx}(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t+\tau)d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \\ &= \phi_{xx}(0)\phi_{xx}(0) = \phi_{xx}^2(0) \Rightarrow |\phi_{xx}(t)| \leq |\phi_{xx}(0)| \end{aligned} \quad (5.94)$$



## Κεφάλαιο 6

# Ο μετασχηματισμός Laplace

### 6.1 Εισαγωγή

Έχουμε ήδη δει ότι ο μετασχ. Fourier είναι ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να αναπαριστούμε ένα σήμα  $x(t)$  σαν ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) εκθετικών σημάτων της μορφής  $e^{j2\pi ft}$ , δηλ.

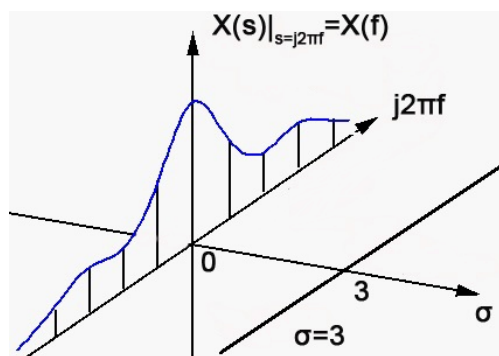
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (6.1)$$

που δεν είναι άλλη σχέση φυσικά εκτός από τον αντίστρ. μετασχ. Fourier.

Έστω λοιπόν ένα σήμα

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad (6.2)$$

Έστω, για λόγους ευκολίας, ότι  $X(f) \in \mathfrak{R}$ . Γνωρίζετε πώς να σχεδιάσετε ένα φάσμα πλάτους. Δείτε το σχήμα 6.1. Ο άξονας πάνω στον οποίο ορίζεται ο  $X(f)$  είναι οι γνωστές μας συχνότητες, που έχουμε απλά αντικαταστήσει το  $f$  με το  $j2\pi f$ , μια αυτό είναι το όρισμα των εκθετικών μας στο μετασχ. Fourier. Σε αυτό το σχήμα, απλά έχουμε ορίσει ένα χώρο, στον οποίο οι  $x, y$  διαστάσεις του είναι το μιγαδικό επίπεδο, και η τρίτη διάσταση είναι οι τιμές του μετασχ. Fourier. Δε σας το είχαμε πει ρητά



Σχήμα 6.1: Ο μετασχ. Fourier στο μιγαδικό  $s$ -επίπεδο

(το κρατούσαμε για έκπληξη :-P ), αλλά όσο δουλεύετε με το μετασχ. Fourier, ουσιαστικά ένα τέτοιο

σήμα βλέπετε, υπό αυτή την οπτική, απλά προφανώς είναι πολύ πιο βολικό να το σχεδιάζουμε όπως έχουμε δει πολλές φορές, σε ένα διδιάστατο επίπεδο, παρά όπως στο σχήμα 6.1. :-) Βλέπετε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier  $X(f)$  ορίζεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα των φανταστικών συχνοτήτων  $j2\pi f$  του μιγαδικού επιπέδου. ΜΟΝΟΝ εκεί όμως. Το βλέπετε άλλωστε, το σήμα είναι σαν μια “φέτα” που φεύγει μόνο προς τα “πάνω” από το φανταστικό άξονα. Όμως, το μιγαδικό επίπεδο έχει προφανώς κι άλλες ευθείες πάνω στις οποίες μπορούμε να ορίσουμε μετασχηματισμούς. Μια από αυτές φαίνεται στο σχήμα 6.1, κι αυτή είναι η  $\Re\{s\} = \sigma = 3$ . Πάνω σε αυτόν τον άξονα, θα είχαμε συχνότητες  $s = \sigma + j2\pi f = 3 + j2\pi f$ , και η προβολή του σήματος  $x(t)$  θα γινόταν πάνω σε εκθετικά της μορφής  $e^{-(3+j2\pi f)t}$ . Σταματάμε εδώ προσωρινά, αν και πρέπει ήδη να έχετε υποψιαστεί τι πρόκειται να συμβεί. :-)

Επιστρέφουμε στο μετασχ. Fourier λοιπόν. Μια τέτοια αναπαράσταση είναι πολύτιμη στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων. ΟΜΩΣ (παντού υπάρχει ένα “όμως” που μας χαλάει τη διάθεση :-)) είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει μόνο για μια περιορισμένη κατηγορία σημάτων, π.χ. ο μετασχ. Fourier δεν ορίζεται για σήματα της μορφής

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0 \quad (6.3)$$

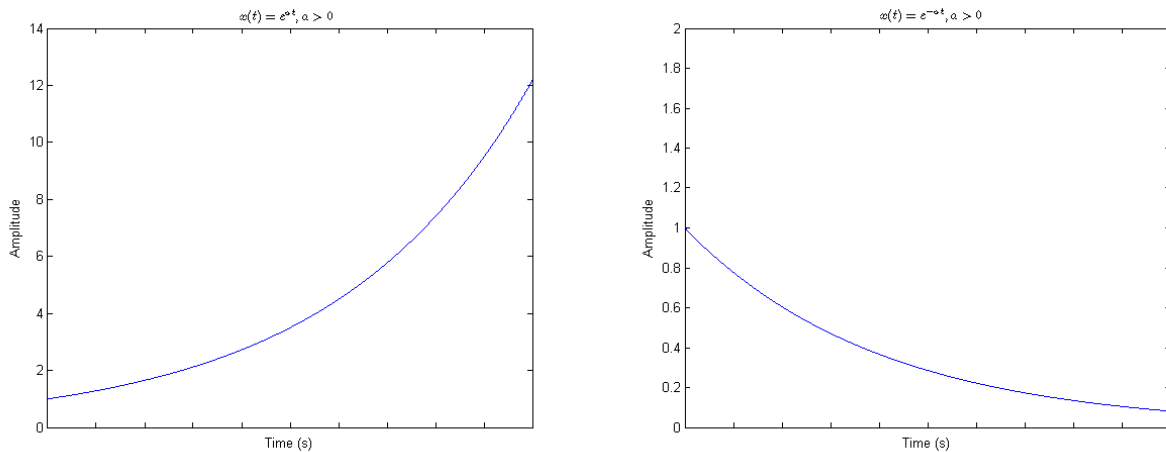
δηλ. για αύξοντα εκθετικά (δε μου αρέσει ούτε κι εμένα ο όρος – growing exponentials είναι στα Αγγλικά – αλλά ας μου το επιτρέψετε :-P). Επίσης, υπάρχουν περιοχές όπως η Ανάλυση Συστημάτων, που ο μετασχ. Fourier δε μας βοηθά πολύ.



Σχήμα 6.2: Δεν αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς όλοι με τον ίδιο τρόπο... :-)

### 6.1.1 Ο μετασχηματισμός Laplace

Ο βασικός λόγος για τις δυσκολίες που μας προκύπτουν είναι ότι για μερικά σήματα, όπως το σήμα στη σχέση (6.3), ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει, επειδή τα συνήθη ημίτονα ή εκθετικά της μορφής  $e^{j2\pi ft}$  είναι ανίκανα να συνθέσουν αύξοντα εκθετικά σήματα, όπως το παραπάνω (λογικό, αν σκεφτείτε ότι έχουν σταθερό πλάτος  $X(f)$ , όπως είδαμε στη σχέση (6.1)). Αν αφήσουμε τη φαντασία μας ελεύθερη (ΠΟΛΥ ελεύθερη :-)), θα δούμε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί. Πώς; Αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως σήματα βάσης εκθετικά της μορφής  $e^{st}$ , με το  $s$  να μην περιορίζεται μόνο πάνω στο φανταστικό άξονα (όπως γίνεται στον μετασχ. Fourier). Αυτό ακριβώς γίνεται στον περίφημο

(α') Το αύξον εκθετικό  $x(t)$ (β') Το φθίνον εκθετικό  $\hat{x}(t)$ 

Σχήμα 6.3: Εκθετικά σήματα

**μετασχηματισμό Laplace.** Εδώ, η συχνότητες είναι μιγαδικές, της μορφής  $s = \sigma + j2\pi f$ , και αυτή η γενίκευση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αύξοντα εκθετικά (και άρα αύξοντα ημίτονα) για να συνθέσουμε ένα σήμα  $x(t)$ . Ποιά είναι αυτά; Μα φυσικά τα  $e^{\sigma t} e^{j2\pi f t}$ ! :-) Πριν πάμε στα μαθηματικά, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και με ένα απλό παράδειγμα τι ακριβώς κερδίζουμε με το μετασχηματισμό αυτό.

### 6.1.2 Διαισθητική κατανόηση του μετασχ. Laplace

Αν ένα σήμα λοιπόν, όπως το  $x(t) = e^{at}u(t)$ ,  $a > 0$ , στο σχήμα 6.3α', δεν έχει μετασχ. Fourier, μπορούμε να το κάνουμε να έχει, πολλαπλασιάζοντάς το με ένα φθίνον εκθετικό, όπως το  $e^{-\sigma t}$ . Για παράδειγμα, το σήμα

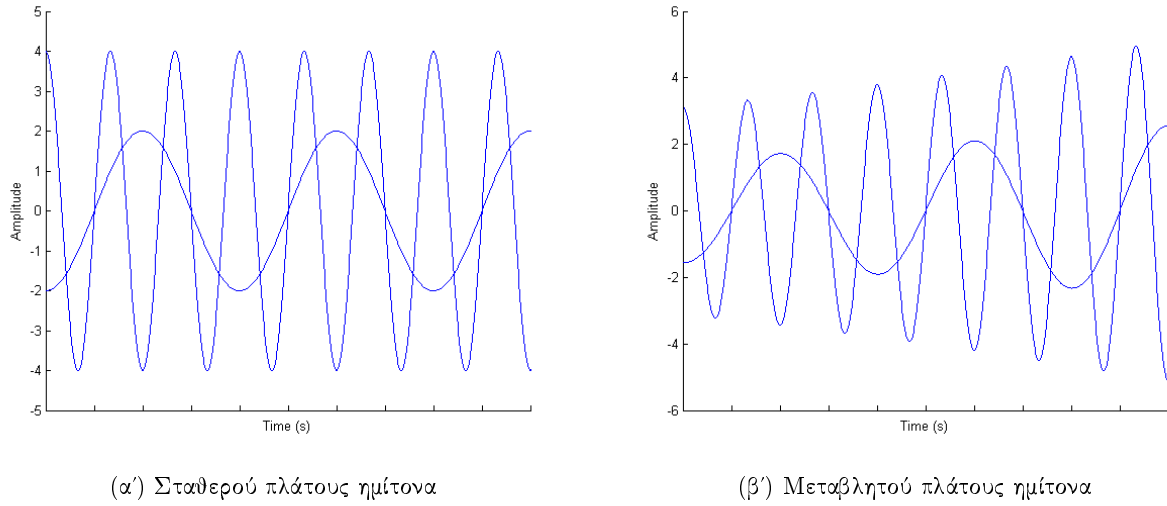
$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad (6.4)$$

μπορεί να γίνει μετασχηματίσιμο (πολύ κουλτούρα :-) ) κατά Fourier, απλά πολλαπλασιάζοντάς το με το  $e^{-\sigma t}$ , με  $\sigma > 2$ , ορίζοντας έτσι το

$$\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} = e^{(2-\sigma)t}u(t) \quad (6.5)$$

Αυτό το νέο σήμα είναι σήμα ενέργειας πια, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.3β' – πάντα για  $\sigma > 2$ . Άρα το σήμα  $\hat{x}(t)$  έχει πλέον μετασχ. Fourier,  $\hat{X}(f)$ , και οι συνιστώσες του είναι της μορφής  $e^{j2\pi f t}$ , με συχνότητες  $f$  που τρέχουν από  $-\infty$  ως  $\infty$ . Τα εκθετικά της μορφής  $e^{j2\pi f t}$  και  $e^{-j2\pi f t}$  θα προστεθούν και θα μας δώσουν ένα ημίτονο, όπως καλά ξέρουμε από τις σχέσεις του Euler. Ας το δείξουμε ξανά εδώ, για να μην ψάχνετε σε άλλο κεφάλαιο :-) και για λόγους σύγκρισης με το μετασχ. Laplace.

Έστω μια συχνότητα  $\Delta f$  του συνεχούς φάσματος του σήματος. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και η αντίστοιχη συχνότητα  $-\Delta f$  και το πλάτος καθεμιάς θα είναι  $\hat{X}(\Delta f)$  και  $\hat{X}^*(\Delta f)$



Σχήμα 6.4: Ημίτονα των δυο μετασχηματισμών

αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων για τα πραγματικά σήματα. Άρα προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + (|\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft} \\
 &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft} \\
 &= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})} \\
 &= 2|\hat{X}(\Delta f)|\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους  $2|\hat{X}(\Delta f)|$ . Θα ήταν πολύ χρονοβόρο να σχεδιάσουμε όλα αυτά τα ημίτονα, έτσι στο σχήμα 6.4α' δείχνουμε μόνο δυο από αυτά. Η πρόσθεση όλων αυτών των συνιστωσών (άπειρων σε αριθμό) θα μας δώσει το  $\hat{x}(t)$ . Είναι όμως προφανές ότι το επιθυμητό σήμα  $x(t)$  μπορεί να συντεθεί από τον πολλαπλασιασμό του  $\hat{x}(t)$  με τα  $e^{+\sigma t}$ , έτσι δεν είναι; Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε φασματική συνιστώσα  $\hat{X}(f)$  του  $\hat{x}(t)$  με  $e^{+\sigma t}$ , και μετά τις προσθέτουμε. Ιδού:

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int \hat{X}(f)e^{j2\pi ft} df = \int e^{+\sigma t}[\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}] df \quad (6.7)$$

Αλλά μια τέτοια κίνηση σημαίνει επίσης ότι τα ημίτονα που προκύπτουν θα έχουν αύξοντα πλάτη! Η πρόσθεση όλων αυτών των αύξοντων ημιτόνων θα μας δώσει το  $x(t)$ ! Γιατί; Ας κάνουμε το ίδιο με τη σχέση (6.6), μόνο που τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε πλάτη  $\hat{X}(\Delta f)e^{\sigma t}$ :

$$e^{\sigma t}\hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft} + e^{\sigma t}\hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft} = 2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t}\cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \quad (6.8)$$

Είναι φανερό εδώ ότι τα πλάτη των ημιτόνων ΔΕΝ είναι σταθερά, όπως στην περίπτωση του μετασχ. Fourier, αλλά είναι συναρτήσε του χρόνου,  $2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t}$ , και μάλιστα είναι και αύξοντα, όπως στο σχήμα 6.4β'!

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός των συνιστωσών του  $\hat{x}(t)$  με το  $e^{+\sigma t}$  θα μας δώσει συνιστώσες της μορφής  $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$ , όπως είναι φανερό από τη σχέση (6.7), ενώνοντας τα δυο εκθετικά μέσα στο ολοκλήρωμα! Άρα, κάθε συχνότητα της μορφής  $j2\pi f$  του  $\hat{x}(t)$  μετασχηματίζεται σε μια άλλη συχνότητα  $\sigma + j2\pi f$  στο φάσμα του  $x(t)$ . Άρα πού θα βρίσκονται αυτές οι νέες συχνότητες; Πού αλλού, εκτός από πάνω σε μια νέα ευθεία στο μιγαδικό  $s$ -επίπεδο, στην ευθεία που περιλαμβάνει τις συχνότητες  $\sigma + j2\pi f$ !

Πλέον είναι ξεκάθαρο ότι το σήμα  $x(t)$  μπορεί να συντεθεί από αύξοντα εκθετικά που βρίσκονται στο μονοπάτι  $\sigma + j2\pi f$ , με το  $f$  να κυμαίνεται από  $-\infty$  έως  $\infty$ . Η τιμή του  $\sigma$  είναι μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν  $x(t) = e^{2t}u(t)$ , τότε το  $\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$  μπορεί να γίνει μετασχηματίσιμο κατά Fourier αν διαλέξουμε  $\sigma > 2$ . Άρα καταλαβαίνετε ότι έχουμε άπειρες επιλογές για την τιμή του  $\sigma$ . Αυτό σημαίνει ότι το φάσμα του  $x(t)$  δεν είναι μοναδικό, και ότι υπάρχουν άπειροι τρόποι να συνθέσουμε το  $x(t)$ . Όμως, το  $\sigma$  έχει μια ελάχιστη, συγκεκριμένη τιμή  $\sigma_0$  για ένα δεδομένο  $x(t)$  (όπως εδώ,  $\sigma_0 = 2$ , για  $x(t) = e^{2t}u(t)$ ). Αυτή η περιοχή του μιγαδικού  $s$ -επιπέδου που ορίζονται άπειροι τρόποι σύνθεσης του  $x(t)$  από τα αύξοντα εκθετικά λέγεται **Πεδίο Σύγκλισης** του μετασχηματισμού του  $x(t)$ .

Αυτός ο νέος μετασχηματισμός λοιπόν, που χρησιμοποιεί εκθετικά της μορφής  $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$  λέγεται **Μετασχηματισμός Laplace** και ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.9)$$

ενώ ο αντίστροφός του ως:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (6.10)$$

ο οποίος όμως δε θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς μας, μια και υπάρχουν πιο εύκολοι τρόποι από την επίλυση ενός ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο... :-)

### 6.1.3 Ύπαρξη του μετασχ. Laplace

Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχ. Laplace είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (6.11)$$

Όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποια τιμή  $\sigma$ , τότε υπάρχει ο μετασχ. Laplace. Αποδεικνύεται ότι κάθε σήμα που αυξάνει όχι γρηγορότερα από το εκθετικό σήμα  $Me^{\sigma_0 t}$ , για κάποια  $M, \sigma_0$ , ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη (6.11). Για παράδειγμα, το σήμα  $x(t) = e^{t^2}$  αυξάνει πιο γρήγορα από το  $e^{\sigma_0 t}$ , και άρα δεν έχει μετασχ. Laplace. Ευτυχώς, τέτοια σήματα έχουν ελάχιστη θεωρητική ή πρακτική σημασία.

Βέβαια, όπως και στο μετασχ. Fourier, αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  απειρίζεται στο  $t = 0$  και η σχέση (6.11) δεν ικανοποιείται, αλλά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και είναι ο  $X(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ . Εμείς δεν ασχολούμαστε με τέτοια σήματα, και πάντα όταν ζητείται ο μετασχ. Laplace, υποθέτουμε ότι υπάρχει, δηλ. ότι το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace συγκλίνει.

#### 6.1.4 Συνοψίζοντας...

Ο μετασχ. Laplace είναι γενικά μια “επέκταση” του μετασχ. Fourier, για σήματα των οποίων το συχνοτικό περιεχόμενο δεν μπορεί να υπολογιστεί απ’ την κλασική θεωρία Fourier. Ο μετασχ. Fourier προβάλλει το σήμα πάνω σε συχνότητες που ορίζονται στο φανταστικό άξονα ( $e^{-j2\pi ft}$ ). Αλλάζοντας τις συναρτήσεις βάσης  $e^{-j2\pi ft}$  σε  $e^{-(\sigma+j2\pi f)t}$ , προβάλλουμε το σήμα σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα των φανταστικών. Οι νέες συχνότητες  $\sigma + j2\pi f$  είναι, όπως είναι φανερό, μιγαδικές πλέον.

Ο μετασχ. Laplace ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.12)$$

με  $s = \sigma + j2\pi f$ ,  $\sigma, f \in \mathbb{R}$ . Όπως εύκολα διαπιστώνετε, αν θέσουμε  $\sigma = 0$ , ο μετασχ. Laplace μετατρέπεται στον μετασχ. Fourier:

$$X(s) \Big|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(0+j2\pi f)t} dt = X(f) \quad (6.13)$$

Για αιτιατά σήματα, ορίζεται ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace ως:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.14)$$

που δε διαφέρει σε πολλά από τον δίπλευρο μετασχ. Laplace που συζητούσαμε ως τώρα.

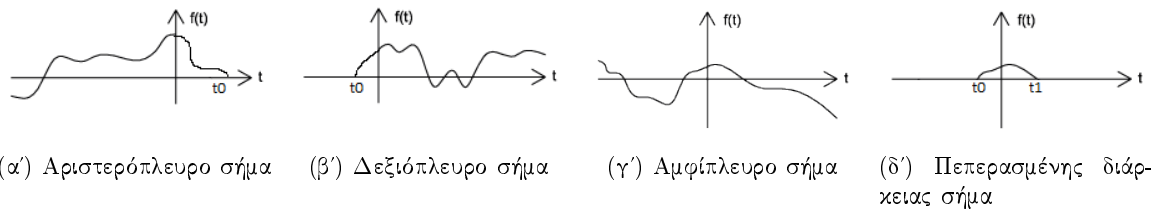
## 6.2 Είδη σημάτων

Αν και έχει προηγηθεί μια διαισθητική παρουσίαση των ειδών σημάτων στη θεωρία σχετικά με την ανάλυση Fourier, εδώ θα ορίσουμε τυπικά τα σήματα ανάλογα με τη θέση και τη διάρκεια τους στο χρόνο. Αυτή η διάκριση θα μας βοηθήσει πολύ στο να ορίζουμε εύκολα και γρήγορα την περίφημη περιοχή σύγκλισης - *region of convergence* του μετασχ. Laplace, στην οποία θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο. Πρώτα όμως, ας δούμε τα είδη σημάτων:

- Αριστερόπλευρο λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 6.5α')

$$f(t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (6.15)$$





Σχήμα 6.5: Είδη σημάτων

- Δεξιόπλευρο λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 6.5β')

$$f(t) = 0, \quad t \leq t_0 \quad (6.16)$$

- Αμφίπλευρο (ή δίπλευρο) λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 6.5γ')

$$f(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (6.17)$$

- Πεπερασμένης διάρκειας λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (σχήμα 6.5δ')

$$f(t) \neq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (6.18)$$

Η διάκριση των ειδών είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, είτε από τον ορισμό τους είτε από τη γραφική τους παράσταση. Ας γνωρίσουμε όμως εδώ και δυο νέες κατηγορίες σημάτων:

- Αιτιατά λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$f(t) = 0, \quad t < 0 \quad (6.19)$$

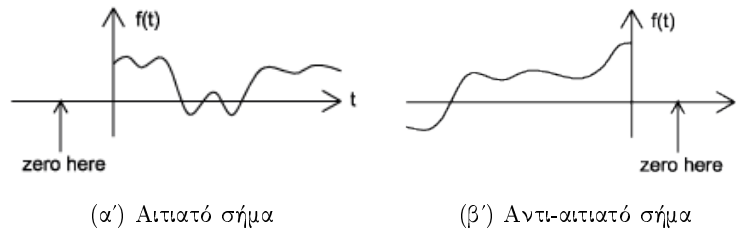
όπως στο σχήμα 6.6α'.

- Αντί-αιτιατά λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$f(t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.20)$$

όπως αυτό στο σχήμα 6.6β'.

- Υπάρχουν και τα μη αιτιατά σήματα, για τα οποία η σχέση (6.19) δεν ισχύει, όπως τα σήματα σε όλα τα σχήματα 6.5.



Σχήμα 6.6: Αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα



Σχήμα 6.7: Τα αντι-αιτιατά συστήματα μπορούν να γίνουν πραγματοποιήσιμα με χρονική καθυστέρηση!

### 6.3 Περιοχή Σύγκλισης

Η περιοχή σύγκλισης (region of convergence - ROC) προκαλεί συχνά σύγχυση τόσο όσον αφορά την προέλευσή της, όσο και τη χρήση της και τη σημασία της. Εδώ θα ξεκαθαρίσουμε όλα αυτά, χρησιμοποιώντας τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα.

1. Ας πάρουμε ένα σήμα για το οποίο ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (6.21)$$

Γι' αυτό το σήμα, δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, μόνο αν  $a > 0$ . Ας το δείξουμε, ελέγχοντας το κριτήριο σχετικά με την απόλυτη ολοκλήρωση. Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{at}| dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^{\infty} \quad (6.22)$$

Αν  $a \in \mathbb{R}^+$ , το ολοκλήρωμα για  $t = \infty$  θα αποκλίνει στο  $+\infty$ . Άρα ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Φυσικά γνωρίζουμε ότι το κριτήριο αυτό είναι ικανό αλλά όχι και αναγκαίο, γιατί π.χ. και για τα ημιτονοειδή σήματα το κριτήριο της απόλυτης ολοκλήρωσης δεν ισχύει αλλά γνωρίζουμε ότι υπάρχει ο μετασχ. Fourier, με χρήση των συναρτήσεων Δέλτα. Παρ' όλα αυτά, για το συγκεκριμένο σήμα, αυτό είναι αρκετό. Επίσης, αν κάποιος από εσάς μήχη στον κόπο να σκεφτεί

πώς είναι η γραφική παράσταση του σήματος αυτού, θα διαπίστωσε ότι πρόκειται για σήμα ισχύος, άρα θα είχε μια υποψία για το ότι δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier. :-)

Απ' την άλλη, αν  $a < 0$ , τότε ο μετασχ. Fourier υπάρχει, μια και το σήμα μας είναι σήμα ενέργειας. Ας θεωρήσουμε στο παράδειγμά μας, ότι  $a \in \mathfrak{R}$ , για περισσότερη γενικότητα. Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τον μετασχ. Laplace και να δούμε μερικά πράγματα:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (6.23)$$

Εδώ τώρα πρέπει να σταματήσουμε. Πρέπει να έχετε καταλάβει τι πρόκειται να συμβεί από παρόμοια διαδικασία που είδαμε στο μετασχ. Fourier... Για να μην αποκλίνει αυτό το όριο στο  $\infty$ , θα πρέπει το όρισμα του εκθετικού να είναι αρνητικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν. Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει να ισχύει  $a - s < 0$ . Ένα λεπτό όμως. Το  $s = \sigma + j2\pi f$  είναι μιγαδικός αριθμός, άρα και ο  $a - s$ . Ως γνωστόν, οι μιγαδικοί αριθμοί ΔΕΝ έχουν διάταξη, άρα το να πούμε ότι πρέπει να ισχύει  $a - s < 0$  είναι ΛΑΘΟΣ!

Θα εκμεταλλευτούμε λοιπόν το πλέον γνωστό λήμμα της Μιγαδικής Ανάλυσης, που υπενθυμίζεται ότι λέει ότι

$$\text{εάν } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \text{ και } g(t) \text{ είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)g(t) = 0.$$

Για να δούμε αν μπορούμε κατ' αρχάς να το δείξουμε αυτό για το σήμα μας. Μπορούμε να γράψουμε το σήμα μας ως γινόμενο μιας φραγμένης και μιας συνάρτησης που συγκλίνει στο μηδέν; Είναι:

$$e^{(a-s)t} = e^{(a-(\sigma+j2\pi f)t)} = e^{((a-\sigma)-j2\pi f)t} = e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi ft} = f(t)g(t) \quad (6.24)$$

Όμως

$$|e^{-j2\pi ft}| = 1, \quad (6.25)$$

για κάθε  $f, t$ , όπως έχουμε δει. Οπότε να η φραγμένη μας συνάρτηση, η  $g(t) = e^{-j2\pi ft}$ . Άρα αρκεί να δούμε πότε ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-\sigma)t} = 0 \quad (6.26)$$

και μετά μπορούμε να συνεχίσουμε τη λύση της άσκησής μας. Εδώ πλέον, στον εκθέτη μας έχουμε πραγματικούς αριθμούς, άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση  $e^{(a-\sigma)t}$  φθίνει στο 0 όταν  $t \rightarrow +\infty$ , **μόνο αν**

$$a - \sigma < 0 \Leftrightarrow a < \sigma \Leftrightarrow \Re\{s\} > a \quad (6.27)$$

Αυτή η σχέση λέγεται **πεδίο σύγκλισης**, γιατί αποτελεί το χώρο πάνω στο επίπεδο για τον οποίο υπάρχει ο μετασχ. Laplace, δηλ. το σχετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει! Οπότε δείξαμε ότι η

συνάρτηση  $e^{(a-s)t}$  γράφεται ως γινόμενο δυο συναρτήσεων, εκ των οποίων η μια είναι φραγμένη και η άλλη συγκλίνει το μηδέν, και άρα, απ' το γνωστό λήμμα, το γινόμενο τους συγκλίνει κι αυτό στο μηδέν. Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$(6.23) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{a-s} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) = \frac{1}{a-s} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (6.28)$$

Άρα ο μετασχ. Laplace του σήματος  $x(t) = e^{at}u(t)$ ,  $a \in \mathfrak{R}$ , είναι

$$x(t) = e^{at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (6.29)$$

Ο αριθμός  $a$  λέγεται **πόλος** του μετασχ. Laplace, και το πεδίο σύγκλισης είναι το ημιεπίπεδο ΔΕΞΙΑ της κατακόρυφης ευθείας  $\sigma = a$ , όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει. Φυσικά, στο ημιεπίπεδο  $\Re\{s\} \leq a$ , ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ συγκλίνει!

2. Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα. Έστω τώρα το σήμα  $x(t) = -e^{at}u(-t)$ , του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace. Αν  $a \in \mathfrak{R}^+$ , τότε το σήμα είναι σήμα ενέργειας, και ο μετασχ. Fourier του υπάρχει. Αν όμως  $a \in \mathfrak{R}^-$ , τότε δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, μια και τότε το σήμα είναι σήμα ισχύος, και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier αποκλίνει στο  $\infty$ . Ας θεωρήσουμε ότι  $a \in \mathfrak{R}$ , χωρίς περιορισμούς. Ο μετασχ. Laplace θα είναι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 = - \frac{1}{a-s} \left( 1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \right) \quad (6.30)$$

Έχουμε ξανά την ίδια κατάσταση με το προηγούμενο παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \quad (6.31)$$

Σκεπτόμενοι ακριβώς όμοια, καταλήγουμε ότι το όριο αυτό φθίνει στο 0 **μόνο αν**

$$a - \sigma > 0 \Leftrightarrow a > \Re\{s\} \Leftrightarrow \Re\{s\} < a \quad (6.32)$$

και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Στο πεδίο αυτό, το όριο φθίνει στο μηδέν, και άρα από τη σχέση (6.30) έχουμε:

$$(6.30) \Rightarrow X(s) = - \frac{1}{a-s} (1 - 0) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (6.33)$$

Άρα τελικά, έχουμε ότι

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (6.34)$$

3. Είμαι σίγουρος ότι ο πειρασμός σας να προσθέσετε τα σήματα των παραπάνω παραδειγμάτων και

να δείτε αν υπάρχει ο μετασχ. Laplace του αθροίσματός τους, είναι μεγάλος (όσο και η επιθυμία σας να περάσετε το μάθημα :-)). Ας ορίσουμε λοιπόν το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (6.35)$$

Δεν το αναφέραμε παραπάνω, αλλά δεν είναι και μυστικό, αφού αποδεικνύεται εύκολα. Ο μετασχ. Laplace είναι γραμμικός. Άρα το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Laplace το άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών. Όσο για το πεδίο σύγκλισης, αυτό είναι η **τομή** των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Άρα λοιπόν,

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2}{s-a}, \quad ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < a\} = \emptyset \quad (6.36)$$

Άρα βλέπουμε ότι παρ' όλο που μπορούμε να προσθέσουμε τους επιμέρους μετασχηματισμούς, ο συνολικός μετασχηματισμός Laplace ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, γιατί δεν υπάρχει πεδίο στο  $s$ -επίπεδο στο οποίο να συγκλίνει! :-)

Άρα βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ο μετασχ. Laplace για όλα τα σήματα. :-)

Ας δούμε όμως τι θα συνέβαινε αν είχαμε

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{\beta t}u(-t), \quad a, \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq \beta \quad (6.37)$$

Τότε

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-\beta} = \frac{(s-\beta) + (s-a)}{(s-a)(s-\beta)}, \quad ROC = ROC_1 \cap ROC_2 = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < \beta\} \quad (6.38)$$

το οποίο δεν είναι απαραίτητα το κενό σύνολο. Εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των  $a, \beta$ . Π.χ. αν  $a < \beta$ , τότε το πεδίο σύγκλισης είναι μια "λωρίδα" στο  $s$ -επίπεδο, το  $a < \Re\{s\} < \beta$ , ενώ αν  $a > \beta$ , τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο.

Ας ξεκινήσουμε τις παρατηρήσεις μας...

1. Η πιο σημαντική παρατήρηση έρχεται αν συγκρίνουμε τις σχέσεις (6.29) και (6.34). Ας τις ξαναγράψουμε εδώ:

$$x(t) = e^{at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} > a \quad (6.39)$$

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \Re\{s\} < a \quad (6.40)$$

Παρατηρούμε ότι δυο εντελώς διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν την ΙΔΙΑ μαθηματική αναπαράσταση στο χώρο του μετασχ. Laplace! Σωστά; Λάθος! :-) Ο μετασχηματισμός Laplace περιλαμβάνει ΚΑΙ το πεδίο σύγκλισης! Αυτό είναι που ξεχωρίζει τους δυο, ίδιους κατά τα άλλα,

μετασχηματισμούς. Χωρίς το πεδίο σύγκλισης, δε θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε σε ποιό σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο μετασχηματισμός Laplace  $X(s)$  που έχουμε παραπάνω!

2. Είδατε παραπάνω ότι το πεδίο σύγκλισης δεν είναι κάτι τυχαίο. Προκύπτει απ' την ανάγκη να συγκλίνει το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace! Κάθε μετασχ. Laplace έρχεται “παρέα” με το πεδίο σύγκλισης. Χωρίς αυτό, ο μετασχ. Laplace είναι χωρίς νόημα! Συνηθίστε λοιπόν να γράφετε το μετασχηματισμό MAZI με το εκάστοτε πεδίο σύγκλισης. :-)
3. Προφανώς δε χρειάζεται σε κάθε άσκηση να αποδεικνύετε το πεδίο σύγκλισης, εκτός αν σας ζητείται ρητά, π.χ. σε εφαρμογή του ορισμού. Ακόμα και τότε, δε χρειάζεται να δείχνετε αναλυτικά ότι οι συναρτήσεις είναι φραγμένες, κλπ. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε έτοιμα τα αποτελέσματα της θεωρίας.
4. Ο πόλος  $a$  που είδαμε στα παραδείγματα 1 και 2 θα μπορούσε να είναι μιγαδικός αριθμός. Γενικά, οι πόλοι δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντα πραγματικοί. Δεν αλλάζει τίποτα σε όσα είπαμε παραπάνω, παρά μόνον ότι πλέον τα πεδία σύγκλισης θα είναι στη μορφή

$$\Re\{s\} \geq \Re\{a\} \quad (6.41)$$

δηλ. χρησιμοποιούμε το πραγματικό μέρος του, κατάλληλου κάθε φορά, μιγαδικού πόλου στην περιγραφή του πεδίου σύγκλισης.

5. Από τη στιγμή που οι συναρτήσεις  $(\sigma + j2\pi f)t$  ορίζουν ευθείες στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών (το λεγόμενο  $s$ -επίπεδο), τα πεδία σύγκλισης θα είναι μια περιοχή του επιπέδου αριστερά ή δεξιά μιας κατακόρυφης γραμμής, ή μια “λωρίδα” μεταξύ δυο κατακόρυφων γραμμών.
6. Τα πεδία σύγκλισης δεν περιέχουν ΠΟΤΕ πόλους!
7. Ένας μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους.
8. Αν το  $x(t)$  είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο, για παράδειγμα,  $\Re\{s\} > \Re\{a\}$  με  $a =$  δεξιότερος πόλος.
9. Αν το  $x(t)$  είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι αριστερόπλευρο, για παράδειγμα,  $\Re\{s\} < \Re\{a\}$  με  $a =$  αριστερότερος πόλος.
10. Αν  $x(t)$  είναι αμφίπλευρο ή άθροισμα δεξιόπλευρων και αριστερόπλευρων σημάτων, το πεδίο σύγκλισης είναι μια “λωρίδα” στο ημιεπίπεδο (π.χ.  $\Re\{a\} < \Re\{s\} < \Re\{b\}$ ), ή το κενό σύνολο (γιατί τα επιμέρους πεδία σύγκλισης δε θα επικαλύπτονται). Στην περίπτωση που το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, προφανώς ο μετασχ. Laplace δεν ορίζεται.
11. Αν  $x(t)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισης είναι ΟΛΟ το  $s$ -επίπεδο.
12. Συχνά, το πεδίο σύγκλισης συμβολίζεται ως ROC, από τα αρχικά της αγγλικής μετάφρασης του πεδίου σύγκλισης (region of convergence).

## 6.4 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier

Είπαμε στην εισαγωγή νωρίτερα ότι αν θέσουμε  $\sigma = 0$ , τότε ο μετασχ. Laplace μας δίνει το μετασχ. Fourier. Αυτό δεν ισχύει εν γένει! Όταν θέτουμε  $\sigma = 0$ , αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Laplace σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία  $\sigma = 0$ , που δεν είναι άλλη απ’ τον άξονα των φανταστικών αριθμών! Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, ΠΡΕΠΕΙ ο κατακόρυφος άξονας των φανταστικών να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του  $X(s)|_{\sigma=0}$ ! Γι’ αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace, πρέπει να προσέχουμε πρώτα αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Αν περιέχεται, καλώς, αντικαθιστούμε  $\sigma = 0$  στον τύπο του μετασχ. Laplace και έχουμε το μετασχ. Fourier. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier ΔΕΝ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace! Ας μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά...

Ο ορισμός του μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.42)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (6.43)$$

αν στη σχέση (6.43) θέσουμε όπου  $j2\pi f$  το  $s = \sigma + j2\pi f$ . Είναι ευλογοφανές να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Laplace,  $X(s)$ , ενός σήματος  $x(t)$ , να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier,  $X(f)$ , του ίδιου σήματος, με το  $j2\pi f$  να έχει αντικατασταθεί από το  $s$ . Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι

$$e^{-at}u(t), a > 0 \xrightarrow{F} \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (6.44)$$

Αντικαθιστώντας το  $j2\pi f$  με το  $s$ , έχουμε ότι

$$X(f) \Big|_{j2\pi f \leftarrow s = \sigma + j2\pi f} = \frac{1}{a + s} = X(s) \quad (6.45)$$

που είναι ο μετασχ. Laplace, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα  $x(t)$ . Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιέχει το φανταστικό ( $j2\pi f$ ) άξονα.

Για παράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης  $x(t) = u(t)$  είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (6.46)$$

Ο αντίστοιχος μετασχ. Laplace είναι ο

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}, \Re\{s\} > 0 \quad (6.47)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας  $\sigma = \Re\{s\} = 0$ . Άρα, ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του ολοκληρώματος του μετασχ. Fourier, όπου η ολοκλήρωση περιορίζεται πάνω στον φανταστικό άξονα. Λόγω αυτού του περιορισμού, το ολοκλήρωμα Fourier για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση ( $\delta(f)$ ) για τη σύγκλιση. Αντιθέτως, το ολοκλήρωμα Laplace για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για  $\Re\{s\} > 0$ , μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! :-)

Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Laplace είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Laplace ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ, ενώ ο μετασχ. Fourier ΥΠΑΡΧΕΙ! :-) (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του ολοκληρώματος).

## 6.5 Ιδιότητες και ζεύγη του μετασχ. Laplace

Οι ιδιότητες του μετασχ. Laplace είναι παρόμοιες με αυτές των σειρών και του μετασχ. Fourier. Οι κυριότερες βρίσκονται στον πίνακα 6.1, όπου ξεχωριστά εμφανίζονται μόνο οι ιδιότητες του μονόπλευρου

Ιδιότητες δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Laplace	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	$R_x$
	$y(t)$	$Y(s)$	$R_y$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	Τουλάχιστον το $R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	$R_x$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του $R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	$R_x$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο $R_x$
Συνέλιξη	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	Τουλάχιστον το $R_x \cap R_y$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	Τουλάχιστον το $R_x$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tu(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R_x$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(t) dt$	Τουλάχιστον $R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\}$
Ολοκλήρωση στη συχνότητα	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} X(z) dz$	
Ιδιότητες μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace			
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	Τουλάχιστον το $R_x$
Ολοκλήρωση	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R_x$

Πίνακας 6.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Laplace

μετασχ. Laplace που είναι διαφορετικές από αυτές του δίπλευρου.

Ο πίνακας 6.2 παραθέτει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.



Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	$\frac{1}{s}$	Όλο το $s$ -επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{1}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$	όλο το $s$ -επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$

Πίνακας 6.2: Πίνακας ζευγών μετασχ. Laplace

## 6.6 Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Ο μετασχ. Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο ΚΑΙ για την ανάλυση συστημάτων. Πολυεργαλείο δηλαδή. :-) Η ικανότητά του να ερμηνεύει συχνοτικά πλήθος σημάτων, σημαντικά περισσότερων από το μετασχ. Fourier, τον κάνει ιδανικό για τη μελέτη συστημάτων.

Έχουμε δει κάποια πράγματα για τα συστήματα σε προηγούμενο κεφάλαιο, και κάποια άλλα σχετικά με αιτιατότητα αλλά και με τα είδη σημάτων σε προηγούμενη παράγραφο. Τα τελευταία ισχύουν και για τα συστήματα, αφού κι αυτά είναι σήματα και περιγράφονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Υπάρχουν δεξιόπλευρα, αριστερόπλευρα, αμφίπλευρα, αιτιατά και μη, συστήματα, που ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην παράγραφο 6.2.

Ας τονίσουμε εδώ ότι ένα σύστημα  $h(t)$  έχει μετασχ. Laplace  $H(s)$  ο οποίος είναι της μορφής  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ , με  $Y(s), X(s)$  οι μετασχ. Laplace της εξόδου και της εισόδου, αντίστοιχα. Αυτό προκύπτει εύκολα από την εφαρμογή της περιφημής σχέσης συνέλιξης και πολλαπλασιασμού στους δυο χώρους (χρόνος και συχνότητα). Στην παράγραφο 5.4.3 είδαμε πώς αναλύεται ένα σύστημα με βάση το μετασχ. Fourier και την Ανάπτυξη σε Μερικά Κλάσματα. Ακριβώς όμοια έχουμε και στην περίπτωση

του μετασχ. Laplace. Για αιτιατά συστήματα ( $h(t) = 0, t < 0$ ), έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (6.48)$$

με  $s_k$  οι πόλοι του μετασχ. Laplace. Ένα νέο στοιχείο που θα εισάγουμε τώρα είναι η έννοια της ευστάθειας, με όρους μετασχ. Laplace. Ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν παράγει φραγμένη έξοδο για μια δεδομένη φραγμένη είσοδο. Δηλ.

$$\text{Αν } |x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y \quad (6.49)$$

όπου  $B_x, B_y$  πραγματικοί αριθμοί. Αυτό το γνωρίζετε ήδη από τη θεωρία και από προηγούμενες παραγράφους. Ας δούμε τη σχέση αυτή με το μετασχ. Laplace:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau < B_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau \quad (6.50)$$

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος  $y(t)$ , θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau \quad (6.51)$$

που σημαίνει ότι το  $h(t)$  πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο. Δεδομένου ότι το  $h(t)$ , για ένα αιτιατό σύστημα (χωρίς βλάβη της γενικότητας), εκφράζεται, όπως είδαμε, ως αντίστροφος μετασχ. Laplace ως

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) \quad (6.52)$$

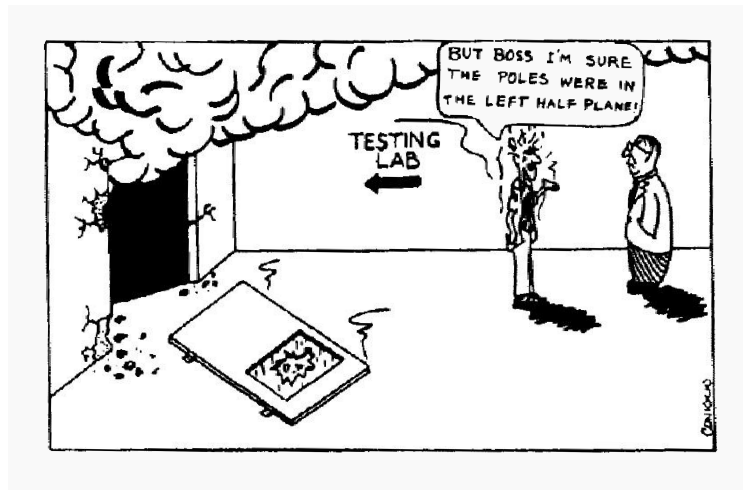
όπου  $s_k$  οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} u(t)| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| |e^{j2\pi f t}| dt = \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{\sigma_k t}| dt \quad (6.53)$$

Καταλήξαμε πλέον ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος, και άρα το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει ότι η  $e^{\sigma_k t}$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αυτό προφανώς συμβαίνει MONON όταν  $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$ ! Πότε ισχύει όμως αυτό; Φυσικά όταν όλοι οι πόλοι του  $H(s)$  βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο! Άρα  
**ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές όταν έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.**

## 6.7 Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Σε κάποιες εφαρμογές είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε τις τιμές ενός σήματος  $x(t)$  όταν αυτό τείνει στο 0 και στο  $\infty$ , μέσω του μετασχ. Laplace του. Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής μας



Σχήμα 6.8: Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!!

βοηθούν σε αυτό.

Το *θεώρημα της αρχικής τιμής - Θ.Α.Τ.* δηλώνει ότι αν το  $x(t)$  και η παράγωγός του,  $dx(t)/dt$ , έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (6.54)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Το *θεώρημα της τελικής τιμής - Θ.Τ.Τ.* δηλώνει ότι αν το  $x(t)$  και η παράγωγός του,  $dx(t)/dt$ , έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (6.55)$$

δεδομένου ότι το  $sX(s)$  δεν έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή πάνω στον φανταστικό άξονα.

Το Θ.Α.Τ. πρέπει να εφαρμόζεται μόνον αν το  $X(s)$  έχει αυστηρά μεγαλύτερη τάξη παρονομαστή απ' ότι αριθμητή, αλλιώς το όριο δεν υπάρχει, και το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

Αντίστοιχα, το Θ.Τ.Τ. εφαρμόζεται μόνον αν οι πόλοι του  $sX(s)$  είναι όλοι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν υπάρχει πόλος στο φανταστικό άξονα, το  $\lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$  δεν υπάρχει, ενώ αν υπάρχει πόλος στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  δεν υπάρχει.

## 6.8 Ασκήσεις

1. Έστω το σήμα

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.56)$$

(α') Να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του.

(β') Να υπολογίσετε το μετασχ. Laplace του. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, χρησιμοποιώντας τον μετασχ. Laplace.

Λύση:

Είναι

(α') Είναι

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \leftrightarrow X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j2\pi T/2f} = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \quad (6.57)$$

(β') Είναι

$$X(s) = \int_0^T A e^{-st} dt = \frac{A}{-s} e^{-st} \Big|_0^T = -\frac{A}{s} (e^{-sT} - 1) = \frac{A}{s} (1 - e^{-sT}) \quad (6.58)$$

Επειδή το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισής του είναι όλο το  $s$ -επίπεδο. Επειδή το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, ας βρούμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace που μόλις υπολογίσαμε. Είναι

$$\begin{aligned} X(s) \Big|_{\sigma=0} &= \frac{A}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi fT}) = \frac{A}{j2\pi f} e^{-j\pi fT} (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) \\ &= \frac{A}{j2\pi f} e^{-j\pi fT} 2j \sin(\pi fT) \\ &= \frac{A}{\pi f} e^{-j\pi fT} \sin(\pi fT) \\ &= \frac{AT}{\pi fT} e^{-j\pi fT} \sin(\pi fT) \\ &= AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT} \end{aligned} \quad (6.59)$$

που είναι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με αυτό που υπολογίσαμε παραπάνω.

2. Υπολογίστε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \mathbf{u}(t) + e^{2\alpha t} \mathbf{u}(-t), \quad \alpha > 0 \quad (6.60)$$

Υπολογίζεται για το σήμα αυτό ο μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace;

Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε.

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{(2a-s)t} dt \\
 &= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2a-s} e^{(2a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{1}{a-s} 0 - \frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} - \frac{1}{2a-s} 0 \\
 &= -\frac{1}{a-s} + \frac{1}{2a-s} \\
 &= \frac{a-s-2a+s}{(2a-s)(a-s)} \\
 &= \frac{-a}{(s-2a)(s-a)}
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

αν  $a - \Re\{s\} < 0$  και  $2a - \Re\{s\} > 0 \Leftrightarrow a < \Re\{s\} < 2a$ .

Τα δυο πεδία σύγκλισης προέκυψαν απ' τους γνωστούς περιορισμούς στα ολοκληρώματα, όταν  $t = \pm\infty$ , ώστε αυτά να συγκλίνουν. Επειδή έχουμε άθροισμα σημάτων, το πεδίο σύγκλισης θα είναι η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης.

Ο μετασχηματισμός Fourier δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace, γιατί το πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα  $\Re\{s\} = \sigma = 0$ .

### 3. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = te^{\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

είναι ο

$$X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \quad \Re\{s\} > -\alpha$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int te^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t} (-\alpha t - 1)$$

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} te^{at}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-(a+s)t} dt \\
 &= \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} \left( -(a+s)t - 1 \right) \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{te^{-(a+s)t}}{a+s} - \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} \right) + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-te^{-(a+s)t}}{a+s} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(a+s)t}}{(a+s)^2} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= \frac{1}{a+s} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{e^{(a+s)t}} - 0 + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= \frac{1}{(a+s)^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^{(a+s)t}} + \frac{1}{(a+s)^2} \\
 &= 0 + \frac{1}{(a+s)^2} = \frac{1}{(a+s)^2}, \text{ αν } \Re\{s\} + a > 0 \Leftrightarrow \Re\{s\} > -a. \quad (6.62)
 \end{aligned}$$

Εδώ, το πεδίο σύγκλισης προέκυψε από τους γνωστούς περιορισμούς, ώστε τα όρια να φθίνουν στο μηδέν. Επίσης, στο τελευταίο όριο, εφαρμόσαμε τον κανόνα του De L' Hospital για να το λύσουμε.

#### 4. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{u}(t)$$

είναι

$$\mathbf{X}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0.$$

$$\text{Δίνεται ότι } \int te^{-at} dt = \frac{1}{a^2} e^{-at} (-at - 1)$$

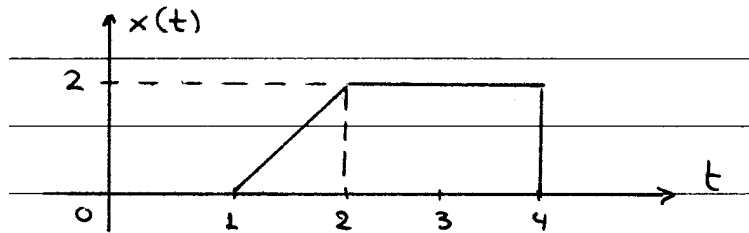
Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2} (-st - 1) \Big|_0^{\infty} = \left( -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_0^{\infty} \\
 &= -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{-st}}{s} + \frac{1}{s^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{st}} + \frac{1}{s^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{se^{st}} + \frac{1}{s^2} = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}, \quad \Re\{s\} > 0. \quad (6.63)
 \end{aligned}$$

Εδώ και πάλι χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του De L' Hospital, ενώ το πεδίο σύγκλισης προκύπτει κατά τα γνωστά (πλέον :-).

5. Δείξτε ότι ο μετασχ. Laplace του σήματος 6.9 είναι ο



Σχήμα 6.9: Σχήμα Άσκησης 5.5

$$X(s) = \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s}$$

Δίνεται ότι  $\int te^{-at} dt = \frac{1}{a^2}e^{-at}(-at - 1)$

Λύση:

1ος τρόπος:

Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_1^2 (2t - 2)e^{-st} dt + \int_2^4 2e^{-st} dt = \int_1^2 2te^{-st} dt - \int_1^2 2e^{-st} dt + \int_2^4 2e^{-st} dt \\ &= 2 \frac{e^{-st}}{s^2} (-st - 1) \Big|_1^2 + 2 \frac{e^{-st}}{s} \Big|_1^2 - 2 \frac{e^{-st}}{s} \Big|_2^4 \\ &= -2 \frac{e^{-2s}}{s^2} + 2 \frac{e^{-s}}{s^2} - 2 \frac{e^{-4s}}{s} \\ &= \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το  $s$ -επίπεδο, αφού το  $x(t)$  είναι πεπερασμένο.

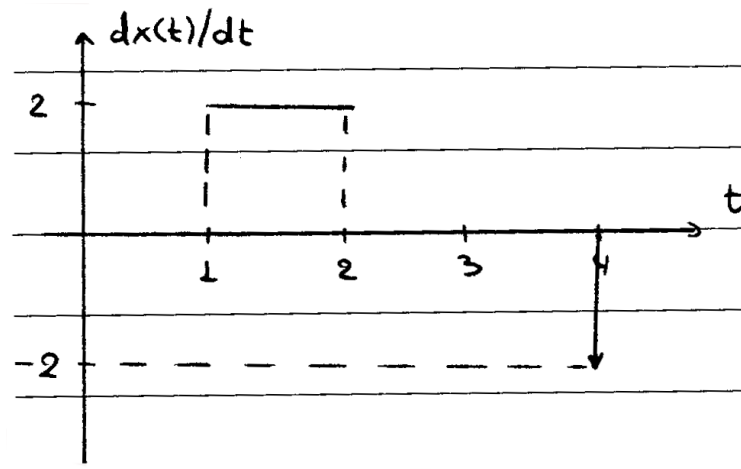
2ος τρόπος:

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{3}{2}}{1}\right) - 2\delta(t - 4) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{2}{s}e^{-\frac{3}{2}s}(e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}) - 2e^{-4s} \\ &= \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s}e^{-2s} - 2e^{-4s} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-) = sX(s)$$



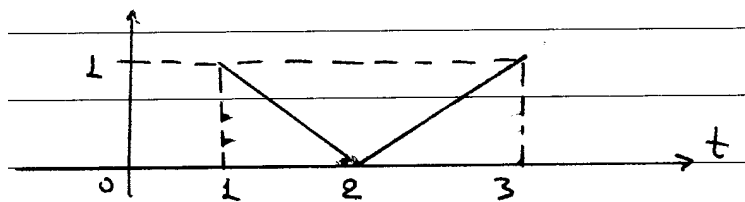
Σχήμα 6.10: Παράγωγος Άσκησης 5.5

Άρα

$$\frac{2}{s}(e^{-s} - e^{-2s}) - 2e^{-4s} = sX(s) - x(0^-) \Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s^2}(e^{-s} - e^{-2s}) - \frac{2}{s}e^{-4s} \quad (6.66)$$

Ο δεύτερος τρόπος λύσης είναι πιο εύκολος, με την προϋπόθεση ότι θα παραγωγιστεί σωστά το σχήμα και θα εφαρμόσετε σωστά την ιδιότητα.

6. Να υπολογιστεί ο μετασχ. Laplace του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 6.11.

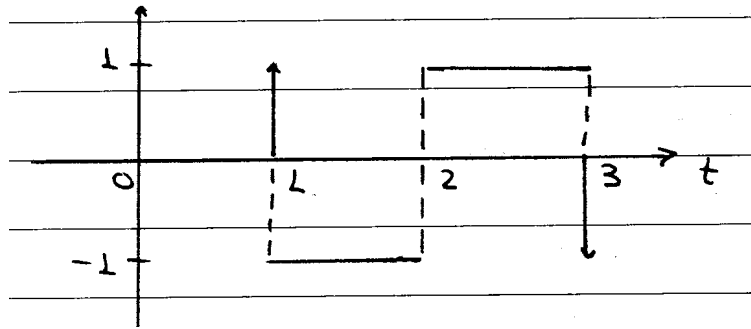


Σχήμα 6.11: Σχήμα Άσκησης 5.6

Λύση:

Παραγωγίζοντας, έχουμε το σήμα του σχήματος 6.12. Είναι





Σχήμα 6.12: Παράγωγος σχήματος Άσκησης 5.6

$$\begin{aligned}
 sX(s) - x(0^-) &= \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\delta(t-1) - \text{rect}\left(\frac{t-\frac{3}{2}}{1}\right)\right\} + \text{rect}\left(\frac{t-\frac{5}{2}}{1}\right) - \delta(t-3) \\
 &= e^{-s} - \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) + \frac{1}{s}(1 - e^{-s})e^{-2s} - e^{-3s} \Leftrightarrow \\
 sX(s) &= e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} - e^{-3s} \\
 &= e^{-s}\left(1 - \frac{1}{s}\right) + e^{-2s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s} + 1\right) \Leftrightarrow \\
 X(s) &= \frac{e^{-s}(s-1)}{s^2} + 2\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}(s+1)}{s^2} \tag{6.67}
 \end{aligned}$$

Το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, άρα το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το  $s$ -επίπεδο.

7. Έστω

$$X(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

με ROC :  $-2 < \Re\{s\} < -1$ . Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace,  $x(t)$ .

Λύση:

Προφανώς δε θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για να βρούμε τον αντιστρ. μετασχ. Laplace, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε ήδη γνωστά μας ζεύγη μετασχηματισμών, σπάζοντας το μεγάλο κλάσμα σε μικρότερα. Ισχύει ότι η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερη απ' την αντίστοιχη του παρονομαστή, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.

Είναι:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} \\
 A_1 &= X(s)(s+1) \Big|_{\sigma=-1} = \frac{3s+5}{s+2} \Big|_{\sigma=-1} = 2 \\
 A_2 &= X(s)(s+2) \Big|_{\sigma=-2} = \frac{3s+5}{s+1} \Big|_{\sigma=-2} = 1
 \end{aligned}$$

Άρα θα είναι

$$X(s) = 2\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

Το πεδίο σύγκλισης δίδεται ότι είναι

$$ROC : -2 < \Re\{s\} < -1 \Leftrightarrow \Re\{s\} > -2 \cap \Re\{s\} < -1$$

Άρα, γνωρίζοντας ότι το  $X(s)$  είναι άθροισμα δυο σημάτων της παραπάνω μορφής, με πεδία σύγκλισης τα δυο παραπάνω, θέλουμε να βρούμε τα δυο σήματα στο χρόνο. Από τους πίνακες των ζευγών μετασχηματισμών, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} e^{-2t}u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \\ -e^{-t}u(-t) &\leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} < -1 \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$x(t) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(-t) \quad (6.68)$$

είναι το σήμα που ψάχνουμε.

8. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace του σήματος

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)}$$

όταν:

(α') **ROC** :  $-2 < \Re\{s\} < 1$

(β') **ROC** :  $\Re\{s\} > 1$

(γ') **ROC** :  $\Re\{s\} < -2$

Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε την περιοχή σύγκλισης.

Λύση:

Είναι

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s-1}$$

με

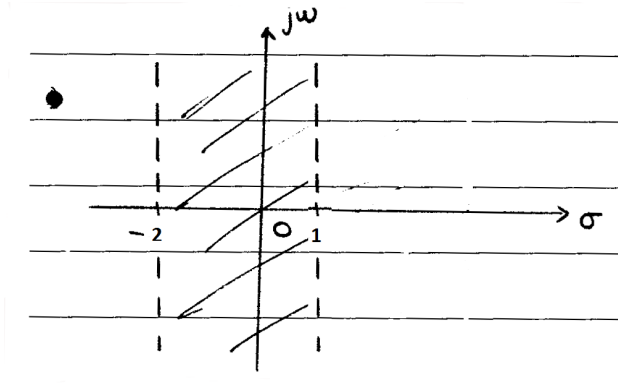
$$\begin{aligned} A_1 &= X(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{-3}{s-1} \Big|_{s=-2} = 1 \\ A_2 &= X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{-3}{s+2} \Big|_{s=1} = -1 \end{aligned}$$

Ανάλογα με τα πεδία σύγκλισης που δίνονται, θα καθορισθεί και το σήμα στο χρόνο που θα προκύψει.

(α') Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[-2 < \Re\{s\} < 1 = \{-2 < \Re\{s\}\} \cap \{\Re\{s\} < 1\}]{L^{-1}} x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t) \quad (6.69)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 6.13.

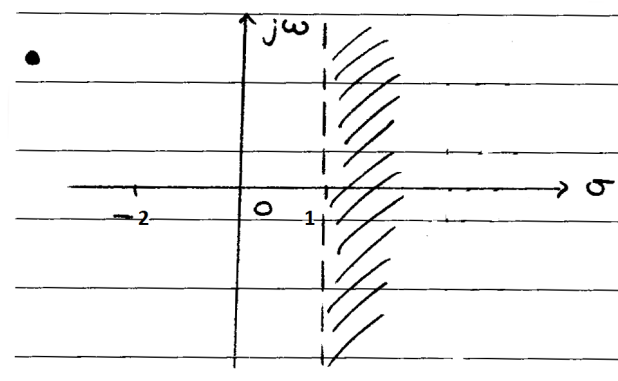


Σχήμα 6.13: 1ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

(β') Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[\Re\{s\} > 1 = \{\Re\{s\} > -2\} \cap \{\Re\{s\} > 1\}]{L^{-1}} x(t) = e^{-2t}u(t) - e^t t u(t) \quad (6.70)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 6.14.

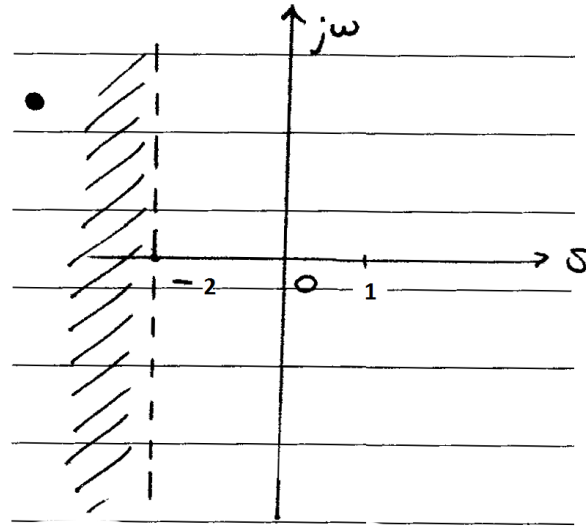


Σχήμα 6.14: 2ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

(γ') Άρα

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow[\Re\{s\} < -2 = \{\Re\{s\} < -2\} \cap \{\Re\{s\} < 1\}]{L^{-1}} x(t) = -e^{-2t}u(-t) + e^t t u(-t) \quad (6.71)$$

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο σχήμα 6.15.



Σχήμα 6.15: 3ο Πεδίο Σύγκλισης Άσκησης 5.8

9. Ο μετασχ. Laplace δίνεται από τη σχέση

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2-2s-3}$$

(α') Για όλα τα δυνατά πεδία σύγκλισης, βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace,  $x(t)$ .

(β') Σε ποιά περίπτωση υπολογίζεται ο μετασχ. Fourier; Υπολογίστε τον.

Λύση:

Είναι

(α') Οι πόλοι του παρονομαστή είναι οι  $s_1 = 3, s_2 = -1$ , όπως εύκολα διαπιστώνουμε. Άρα

$$X(s) = \frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A_1}{s-3} + \frac{A_2}{s+1}$$

Τα  $A_1, A_2$  δίνονται από τις σχέσεις

$$A_1 = X(s)(s-3) \Big|_{s=3} = \frac{s+2}{s+1} \Big|_{s=3} = \frac{5}{4}$$

$$A_2 = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s-3} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4}$$

Άρα έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{5}{4} \frac{1}{s-3}$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης τα

$$ROC = \begin{cases} \Re\{s\} < -1, \\ \Re\{s\} > 3, \\ -1 < \Re\{s\} < 3 \end{cases}$$

- Για την περίπτωση  $\Re\{s\} < -1$ , χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο  $\sigma < -1$ . Αυτό γίνεται μόνον αν  $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} < -1\}$ . Γί αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}e^{-t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(-t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \quad (6.72)$$

- Για την περίπτωση  $\Re\{s\} > 3$ , χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο  $\sigma > 3$ . Αυτό γίνεται μόνον αν  $\{\Re\{s\} > 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$ . Γί αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ \frac{5}{4}e^{3t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{5}{4}e^{3t}u(t) \quad (6.73)$$

- Για την περίπτωση  $-1 < \Re\{s\} < 3$ , χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο  $-1 < \sigma < 3$ . Αυτό γίνεται μόνον αν  $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$ . Γί αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} > -1} \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{\Re\{s\} < 3} \frac{5}{4} \frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \quad (6.74)$$

(β') Ο μετασχηματισμός Fourier υπολογίζεται μόνο στην περίπτωση  $ROC = -1 < \Re\{s\} < 3$ , γιατί μόνο σε αυτό το πεδίο περιλαμβάνεται ο άξονας των φανταστικών,  $\sigma = 0$ .

Άρα για  $\sigma = 0$ , θα έχουμε

$$X(s) \Big|_{\sigma=0} = \frac{2(j\pi f + 1)}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f - 3)} \quad (6.75)$$

10. Υπολογίστε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7 \frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες  $y(0) = 0$ ,  $\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = -2$  και  $x(t) = u(t)$ .

Λύση:

Παίρνουμε το μετασχ. Laplace των δυο μερών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} + 7\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 12\mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{x(t)\} \\ s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0) + 7sY(s) - 7y(0^-) + 12Y(s) &= X(s) \\ s^2 Y(s) - (-2) + 7sY(s) + 12Y(s) &= X(s) \\ Y(s)(s^2 + 7s + 12) &= X(s) - 2 \\ Y(s) &= \frac{1 - 2s}{s(s^2 + 7s + 12)} \\ Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+3} \end{aligned} \quad (6.76)$$

Θα είναι

$$\begin{aligned} A &= Y(s)s \Big|_{s=0} = \frac{1}{12} \\ B &= Y(s)(s+4) \Big|_{s=-4} = \frac{9}{4} \\ C &= Y(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{12} \frac{1}{s} + \frac{9}{4} \frac{1}{s+4} - \frac{7}{3} \frac{1}{s+3} \rightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{12} u(t) + \frac{9}{4} e^{-4t} u(t) - \frac{7}{3} e^{-3t} u(t) \\ &= \left( \frac{1}{12} + \frac{9}{4} e^{-4t} - \frac{7}{3} e^{-3t} \right) u(t) \end{aligned} \quad (6.77)$$

Παρατήρηση:

Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$$

11. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace της

$$\mathbf{X}(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10}$$

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10} = \frac{3s + 2}{(s - (-1 + 3j))(s - (-1 - 3j))} \\ &= \frac{A}{s - (-1 + 3j)} + \frac{A^*}{s - (-1 - 3j)} \end{aligned}$$

Τα  $A, A^*$  δίνονται από

$$\begin{aligned} A &= X(s)(s - (-1 + 3j)) \Big|_{s=-1+3j} = \frac{3s + 2}{s - (-1 - 3j)} \Big|_{s=-1+3j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{6} \\ A^* &= \frac{3}{2} - j\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Οπότε

$$X(s) = \left(\frac{3}{2} + j\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s - (-1 + 3j)} + \left(\frac{3}{2} - j\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s - (-1 - 3j)}$$

Οι πιθανοί πόλοι είναι οι  $s_0 = -1 - 3j, s_1 = s_0^* = -1 + 3j$ , οι οποίοι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία,  $\sigma = -1$ . Άρα τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα  $\Re\{\sigma\} > -1, \Re\{\sigma\} < -1$ . Ανάλογα με αυτά τα πεδία σύγκλισης, θα έχουμε και τα αντίστοιχα  $x(t)$ . Βρείτε τα! :-)

12. Για ένα σήμα και το μετασχ. Laplace του γνωρίζετε ότι:

(α') το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό και άρτιο

(β') έχει 4 πόλους και κανένα μηδενικό στο μιγαδικό επίπεδο

(γ') ένας πόλος βρίσκεται στο  $s = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

(δ')  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$

Βρείτε το  $\mathbf{X}(s)$ .

Λύση:

Προφανώς το  $X(s)$  θα είναι της μορφής:

$$X(s) = \frac{A}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$$

Δίδεται όμως ότι το σήμα είναι πραγματικό και άρτιο, άρα θα είναι

$$x(t) = x^*(t) \leftrightarrow X(s) = X^*(s^*) \text{ και } x(t) = x(-t) \leftrightarrow X(s) = X(-s)$$

Άρα αν έχει έναν πόλο στη θέση  $s_k$ , θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση  $-s_k$  (από τη σχέση του άρτιου σήματος). Όμοια, αν έχει έναν πόλο στη θέση  $-s_k$  θα έχει επίσης έναν πόλο στη θέση  $-s_k^*$  (από τη σχέση του πραγματικού σήματος). Γνωρίζουμε ότι έχει έναν πόλο  $s_1$ , άρα θα έχει κι έναν  $-s_1$ , κι έναν  $-s_1^*$  και έναν  $s_1^*$ . Οπότε το σήμα θα γράφεται:

$$X(s) = \frac{A}{(s - s_1)(s - s_1^*)(s + s_1)(s + s_1^*)}$$

Μένει να βρούμε το  $A$ .

Δίνεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 4$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned} X(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 4 \Leftrightarrow \\ 4 &= \frac{A}{(0 - s_1)(0 - s_1^*)(0 + s_1)(0 + s_1^*)} = \frac{A}{|s_1|^2 |s_1^*|^2} = \frac{A}{\frac{1}{4} \frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{1}{16}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα που ψάχνουμε είναι το

$$X(s) = \frac{\frac{1}{4}}{(s - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}})(s - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})(s + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})} \quad (6.78)$$

13. Σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία για ένα πραγματικό σήμα  $x(t)$  και το μετασχ. Laplace του.

- (α') Το  $X(s)$  έχει ακριβώς δυο πόλους
- (β') Το  $X(s)$  δεν έχει κανένα μηδενικό
- (γ') Το  $X(s)$  έχει πόλο στο  $s = -1 + j$
- (δ') Το  $e^{2t}x(t)$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο
- (ε')  $X(0) = 8$

Βρείτε το  $X(s)$  και την περιοχή σύγκλισης.



Λύση:

Λύστε το! :-)

Hint: Βρείτε πρώτα τη μαθηματική μορφή του  $X(s)$ . Βρείτε τα πιθανά πεδία σύγκλισης. Τέλος, το (δ') στοιχείο αξιοποιήστε το για να βρείτε το πεδίο σύγκλισης. Ερμηνεύστε σωστά τι σημαίνει το  $e^{2t}x(t)$  δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμο.

14. Αποδείξτε ότι ένα αντι-αιτιατό σήμα είναι ευσταθές αν και μόνο αν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Γενικεύστε για ένα μη-αιτιατό σύστημα, αποδεικνύοντας ότι το πεδίο σύγκλισής του πρέπει να περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα.

Λύση:

Για ένα αντι-αιτιατό σύστημα θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longleftrightarrow h(t) = - \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(-t) \quad (6.79)$$

όπου  $s_k$  οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| |e^{s_k t} u(-t)| dt \\ &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\sigma_k t}| |e^{j2\pi f t}| dt \\ &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\sigma_k t}| dt \end{aligned} \quad (6.80)$$

το οποίο και σημαίνει ότι το σύστημα είναι ευσταθές μόνο αν  $\sigma_k > 0$ . Άρα όλοι οι πόλοι του αντι-αιτιατού συστήματος πρέπει να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Γενικεύοντας για ένα οποιοδήποτε σήμα, θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{s - \lambda_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t) - \sum_{k=1}^L B_k e^{\lambda_k t} u(-t) \quad (6.81)$$

όπου  $s_k, \lambda_k$  οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, θα είναι

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^N |A_k| e^{s_k t} u(t) + \sum_{k=1}^L |-B_k| e^{\lambda_k t} u(-t) \right) dt \\
 &< \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N |A_k| e^{s_k t} u(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^L |B_k| e^{\lambda_k t} u(-t) dt \\
 &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{s_k t}| |e^{j2\pi f t}| dt + \sum_{k=1}^L |B_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\zeta_k t}| |e^{j2\pi f t}| dt \\
 &= \sum_{k=1}^N |A_k| \int_0^{\infty} |e^{s_k t}| dt + \sum_{k=1}^L |B_k| \int_{-\infty}^0 |e^{\zeta_k t}| dt \quad (6.82)
 \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν  $\Re\{s_k\} = \sigma_k < 0$  και το δεύτερο όταν  $\Re\{\lambda_k\} = \zeta_k > 0$ . Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι πόλοι  $s_k$  του αιτιατού τμήματος του σήματος βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, ενώ όλοι οι πόλοι  $\lambda_k$  του αντι-αιτιατού τμήματος του σήματος βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Έστω  $s_r$  ο δεξιότερος πόλος του συνόλου των πόλων  $s_k$  και  $\lambda_l$  ο αριστερότερος πόλος του συνόλου των πόλων  $\lambda_k$ . Το πεδίο σύγκλισης θα είναι  $\sigma_r < \Re\{s\} < \zeta_l$ , και αφού  $\sigma_r < 0$  και  $\zeta_l > 0$ , το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

Άρα κριτήριο ευστάθειας για τα συστήματα είναι η περίληψη του φανταστικού άξονα μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace που το περιγράφει.

15. Δίνεται η παρακάτω γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης:

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} + 5 \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + 6\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$$

με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{y}(0^-) = \mathbf{2}, \quad \left. \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = \mathbf{1}$$

και

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{-t} \mathbf{u}(t)$$

Βρείτε το  $y(t)$ .

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &\longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \\
 \frac{d^2x(t)}{dt^2} &\longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)
 \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) &= x(t) \longleftrightarrow \\ s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) &= X(s) \\ s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) &= X(s) \\ Y(s)(s^2 + 5s + 6) &= X(s) + 2s + 11 \\ Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \\ Y(s) &= \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα (μπορούμε κατευθείαν, γιατί η τάξη του αριθμητή είναι μικρότερη αυτής του παρονομαστή):

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

με

$$\begin{aligned} A &= (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \\ B &= (s+2)Y(s) \Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-2} = 6 \\ C &= (s+3)Y(s) \Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-3} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Άρα τελικά,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + 6 \frac{1}{s+2} - \frac{9}{2} \frac{1}{s+3} \longleftrightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + 6e^{-2t} u(t) - \frac{9}{2} e^{-3t} u(t) \end{aligned} \quad (6.83)$$

που είναι και το ζητούμενο.

16. Έστω το σήμα

$$\mathbf{x}(t) = e^{-2t} \mathbf{u}(t) + e^{-t} \cos(3t) \mathbf{u}(t)$$

(α') Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace

(β') Να βρεθεί η αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0^+)$  μέσω του μετασχ. Laplace

(γ') Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$  μέσω του μετασχ. Laplace

(δ') Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των παραπάνω δυο ερωτημάτων υπολογίζοντας αναλυτικά τα όρια

Λύση:

(α')

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\cos(3t)u(t)\} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+9}, \quad \Re\{s\} > -1$$

και κάνοντας λίγες πράξεις, έχουμε

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20}$$

(β')

$$\begin{aligned} x(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \\ \text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s^2 + 10s + 12}{3s^2 + 10s + 14} \\ \text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12s + 10}{6s + 10} \\ \text{(De L' Hospital)} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12}{6} = 2 \iff \\ x(0^+) &= 2 \end{aligned} \tag{6.84}$$

(γ')

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

(δ') Δικό σας. :-)

# Κεφάλαιο 7

## Δειγματοληψία

### 7.1 Εισαγωγή

Οι περισσότερες μετρήσιμες φυσικές διαδικασίες που συμβαίνουν στον κόσμο μας είναι αναλογικές. Από την ηλιακή ακτινοβολία, την ανθρώπινη φωνή, τον ήχο μιας λύρας, τα σεισμικά κύματα, ως μια φωτογραφία, το χτύπο της καρδιάς, και τα εγκεφαλικά κύματα, όλα αυτά είναι *αναλογικά σήματα*.

Αυτά τα σήματα είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλ. αλλάζουν τιμές με την πάροδο του. Ο όρος *αναλογικός* έχει την έννοια της συνεχούς συνάρτησης, σε χρόνο και πλάτος, δηλ. ένα αναλογικό σήμα ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή και έχει τιμή με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Οι τιμές αυτές εκφράζουν κάτι διαφορετικό, ανάλογα με την εφαρμογή (π.χ. στη φωτογραφία εκφράζουν το χρώμα του pixel, ενώ στον ήχο την ένταση του ήχου). Με την έκρηξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τη δεκαετία του '50, αναζητήθηκε ο τρόπος να μπορούν να αποθηκευτούν τέτοια σήματα σε έναν υπολογιστή, για περαιτέρω επεξεργασία. Φυσικά, ένας υπολογιστής δεν καταλαβαίνει στην ουσία τίποτα άλλο εκτός από 0 και 1, ενώ η χωρητικότητα και η ακρίβειά του είναι πεπερασμένες. Έτσι λοιπόν έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος να καταγραφούν αυτά τα αναλογικά σήματα σε ψηφιακή μορφή, αλλά με την ικανότητα να μπορούν να “δώσουν πίσω” το αναλογικό σήμα από το οποίο προήλθαν. Με άλλα λόγια, από το συνεχές/αναλογικό σήμα, να μπορώ να πάρω κάποια *δείγματά* του, αλλά αυτά τα δείγματα να είναι ικανά να μου δώσουν πίσω ολόκληρο το συνεχές σήμα! Δύσκολη δουλειά! :-). Η διαδικασία μετατροπής, λοιπόν, ενός αναλογικού σήματος σε ΔΙΑΚΡΙΤΟ (κι όχι ψηφιακό) λέγεται **Δειγματοληψία**.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα της όλης διαδικασίας από την καθημερινότητά σας. :-). Ο Πλούταρχος (respect), όταν τραγουδάει μπροστά σε ένα μικρόφωνο, τα ηχητικά κύματα από τη φωνή του ταξιδεύουν στον αέρα και φτάνουν ως το μικρόφωνο. Τα ηχητικά αυτά κύματα χτυπούν ένα διάφραγμα μέσα στο μικρόφωνο, το οποίο πάει μπρος - πίσω (ταλαντώνεται). Ένα πηνίο, που είναι συνδεδεμένο με το διάφραγμα, κινείται κι αυτό μπρος - πίσω. Ένας μαγνήτης που είναι μαζί με το πηνίο, παράγει μαγνητικό πεδίο που το διαπερνά, και λόγω της μπρος - πίσω κίνησης του πηνίου, παράγεται ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Το ρεύμα αυτό ρέει προς έναν ενισχυτή ή μια συσκευή καταγραφής (άλλα μικρόφωνα χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο αλλά στην ουσία πάλι μετατρέπουν ηχητική ενέργεια σε ηλεκτρική). Άρα στην περίπτωσή μας, το αναλογικό σήμα είναι ηλεκτρικό, αλλά δε μας απασχολεί η φύση του σήματος.

Είναι ένα σήμα. Αυτό το σήμα θέλουμε να το αποθηκεύσουμε σε έναν υπολογιστή. Πρέπει λοιπόν να το δειγματοληπτήσουμε, δηλ. να διαλέξουμε κάποιες χρονικές στιγμές και να πάρουμε τις τιμές του ηλεκτρικού σήματος σε εκείνες τις στιγμές, να πάρουμε δηλ. δείγματα του σήματος.

Εδώ ας κάνουμε μια παρένθεση για να ορίσουμε λίγο την ορολογία. Ορίζουμε ως **περίοδο δειγματοληψίας**  $T_s$  την απόσταση (σε δευτερόλεπτα) μεταξύ των δειγμάτων που παίρνουμε. Συνήθως είναι σταθερή. Επίσης, ορίζουμε ως **συχνότητα δειγματοληψίας**  $f_s$  το αντίστροφο της περιόδου δειγματοληψίας ( $f_s = \frac{1}{T_s}$ ), και είναι ένας αριθμός που μας λέει πόσα δείγματα παίρνουμε ανά δευτερόλεπτο. Για παράδειγμα, στα μουσικά CD του εμπορίου, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44100Hz. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο ηχητικού κομματιού, έχουμε πάρει 44100 δείγματα, τα οποία απέχουν  $\frac{1}{44100}$  δευτερόλεπτα μεταξύ τους! Πολλά δείγματα, πολύ κοντά το ένα με το άλλο! Γι' αυτό και η ποιότητα της μουσικής είναι τόσο καλή. Ας κλείσουμε όμως εδώ την παρένθεση κι ας επιστρέψουμε στη θεωρία...

Τα ερωτήματα που μπορεί κανείς να σκεφτεί και να θέσει άμεσα είναι: ποιά δείγματα να πάρω; Όποια θέλω; Και κάθε πότε να τα παίρνω; Όποτε θέλω; Να πάρω δηλ. ένα δείγμα τώρα κι ένα δείγμα μετά από 5 sec, κι άλλο ένα μετά από 40 sec; Ή πρέπει να υπάρχει ένα σταθερό χρονικό διάστημα στο οποίο θα πρέπει να παίρνω δείγματα; Κι αν τα πάρω αυτά τα δείγματα, μετά θα μπορώ να ανακατασκευάσω και να ακούσω το τραγούδι του Πλούταρχου από ένα ηχείο ή θα ακούσω Μπετόβεν; (που λέει ο λόγος :-)) - εννοώ κάτι άσχετο) Όλα αυτά τα ερωτήματα τα απάντησε ο Nyquist και ο Shannon, το 1928 ο πρώτος, και το 1949 ο δεύτερος, με κάποιες διαφορές στις εργασίες τους. Το θεώρημα που απαντάει σε αυτά τα ερωτήματα ονομάστηκε Θεώρημα των Shannon-Nyquist.

Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα  $B$ , μπορεί να ανακτηθεί από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s > 2B$ , δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s < \frac{1}{2B}$ .

Η συνθήκη:

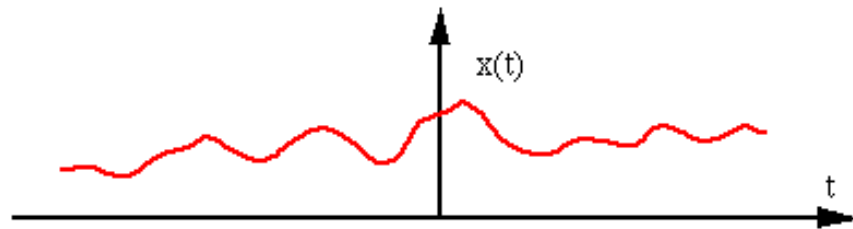
$$f_s > 2B \text{ (ή } T_s < \frac{1}{2B} \text{)} \quad (7.1)$$

λέγεται *συνθήκη του Shannon* (η μέγιστη συχνότητα  $B$  συνήθως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία ως  $f_{max}$ )

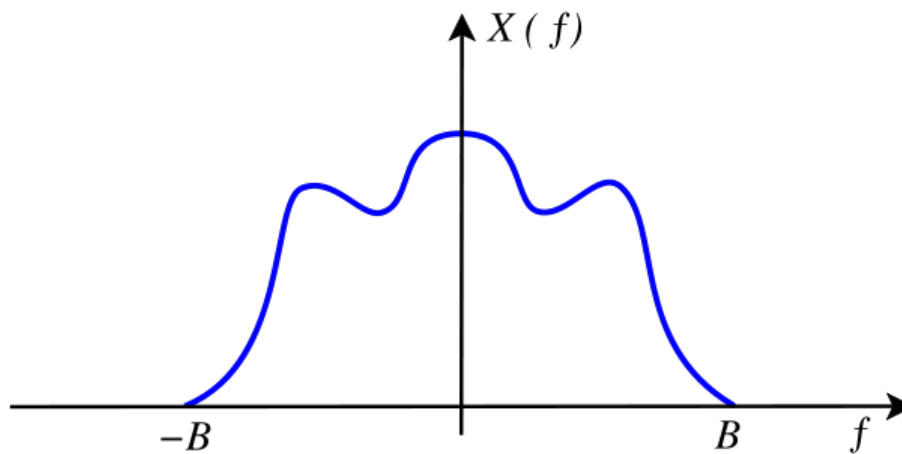
## 7.2 Θεωρία

Όπως πρέπει να σας έχει γίνει ήδη αντιληπτό, το θεώρημα της δειγματοληψίας εμπλέκει μέσα το πεδίο της συχνότητας, εκτός από αυτό του χρόνου. Το πεδίο της συχνότητας, όπως ΠΡΕΠΕΙ να ξέρετε, δεν είναι τίποτα άλλο από την αναπαράσταση του ίδιου σήματος ως προς τη συχνότητα  $f$ , κι όχι ως προς το χρόνο  $t$ .

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα αναλογικό σήμα  $x(t)$  που θέλουμε να δειγματοληπτήσουμε, σαν κι αυτό στο σχήμα 7.1: και αυτό το σήμα έχει φάσμα (αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας)  $X(f)$  όπως φαίνεται στο σχήμα 7.2. Παρατηρείτε ότι το φάσμα του σήματος έχει μέγιστη συχνότητα  $B$ . Μετά



Σχήμα 7.1: Αναλογικό σήμα



Σχήμα 7.2: Φάσμα αναλογικού σήματος

τη συχνότητα αυτή, δεν υπάρχουν τιμές (μπλε γραμμή) για τις υπόλοιπες συχνότητες. Το ίδιο και για το αρνητικό μέρος των συχνοτήτων. Ας κάνουμε τώρα δειγματοληψία στο σήμα μας στο χρόνο, με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s = \frac{1}{f_s}$ . Η συνάρτηση δειγματοληψίας δεν είναι τίποτα άλλο από μια σειρά από τις γνωστές μας συναρτήσεις Δέλτα:

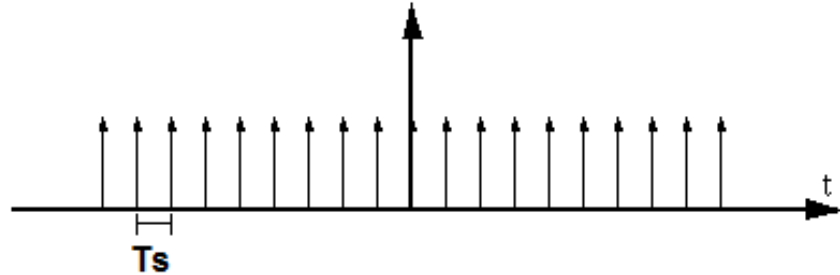
$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \quad (7.2)$$

Η συνάρτηση δειγματοληψίας φαίνεται στο σχήμα 7.3. Όπως φαίνεται, αυτές οι συναρτήσεις Δέλτα απέχουν μεταξύ τους χρόνο  $T_s$ .

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δειγματοληψίας εύκολα μπορεί να δειχθεί (κάντε το) ότι είναι:

$$\Delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) \quad (7.3)$$

Βλέπουμε ότι και ο μετασχ. Fourier είναι μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους  $f_s$  Hz. Η δειγματοληψία μπορεί να αναπαρασταθεί λοιπόν μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό

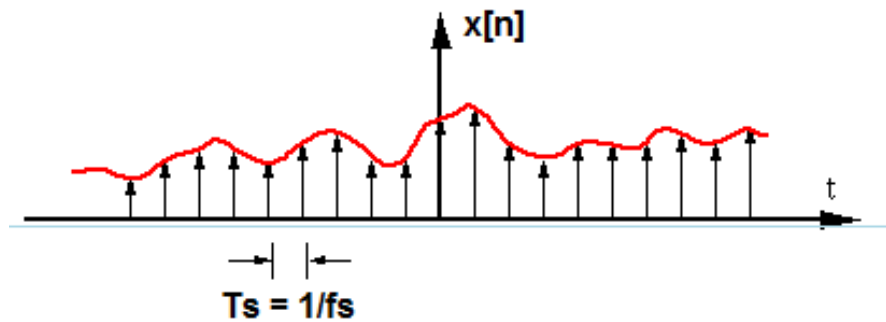


Σχήμα 7.3: Συνάρτηση Δειγματοληψίας

στο χρόνο του σήματος πληροφορίας  $x(t)$  με τη σειρά από συναρτήσεις Δέλτα,  $x_s(t)$ . Άρα θα έχουμε:

$$x_s(t) = x(t)x_\delta(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \quad (7.4)$$

Οπότε αυτό που θα πάρουμε θα είναι οι κόκκινες τιμές στις κορυφές των συναρτήσεων Δέλτα. Οι υπόλοιπες τιμές χάνονται. Αυτό που μένει λοιπόν είναι το ΔΙΑΚΡΙΤΟ σήμα μας, αυτό που στα πλαίσια του μαθήματος ονομάζουμε  $x[n]$ . Αυτό το  $x[n]$  δεν είναι τίποτα άλλο από τις τιμές  $x(kT_s)$  που πήραμε παραπάνω. Όλα αυτά μας τα δείχνει εποπτικά η εικόνα 7.4 και 7.5: Ας δούμε τι συμβαίνει στο πεδίο



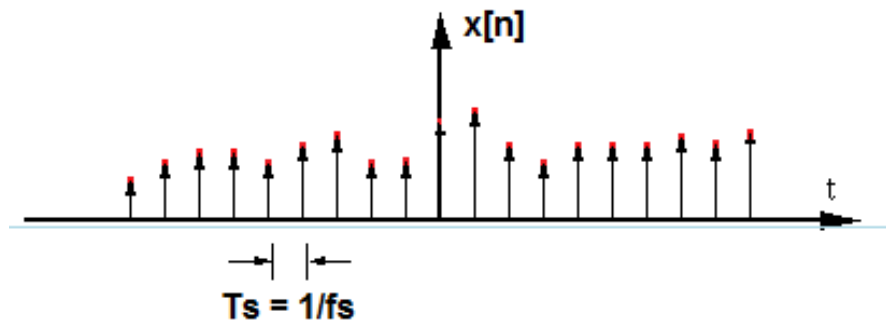
Σχήμα 7.4: Δειγματοληψία

της συχνότητας. Το γινόμενο των δυο παραπάνω σημάτων,  $x_s(t) = x(t)x_\delta(t)$ , γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα:

$$X_s(f) = X(f)*\Delta(f) = X(f)*\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (X(f)*\delta(f - kf_s)) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s) \quad (7.5)$$

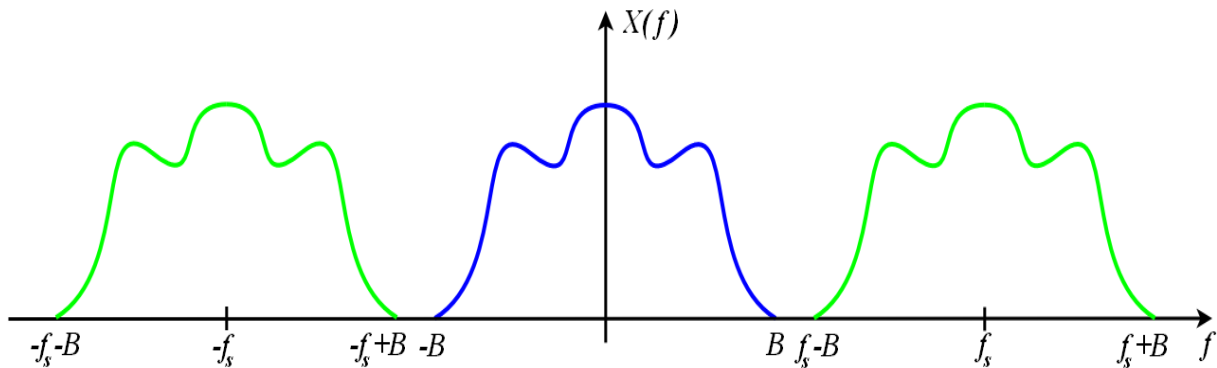
Άρα λοιπόν, αυτό που παίρνουμε στο πεδίο της συχνότητας σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, είναι επαναλήψεις του φάσματος  $X(f)$  γύρω από τις συχνότητες  $\pm kf_s$ . Αν η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  που επιλέξαμε ικανοποιεί το κριτήριο του Shannon, δηλ. είναι  $f_s > 2B$ , όπου  $B$  η μέγιστη συχνότητα





Σχήμα 7.5: Δειγματοληπτημένο σήμα

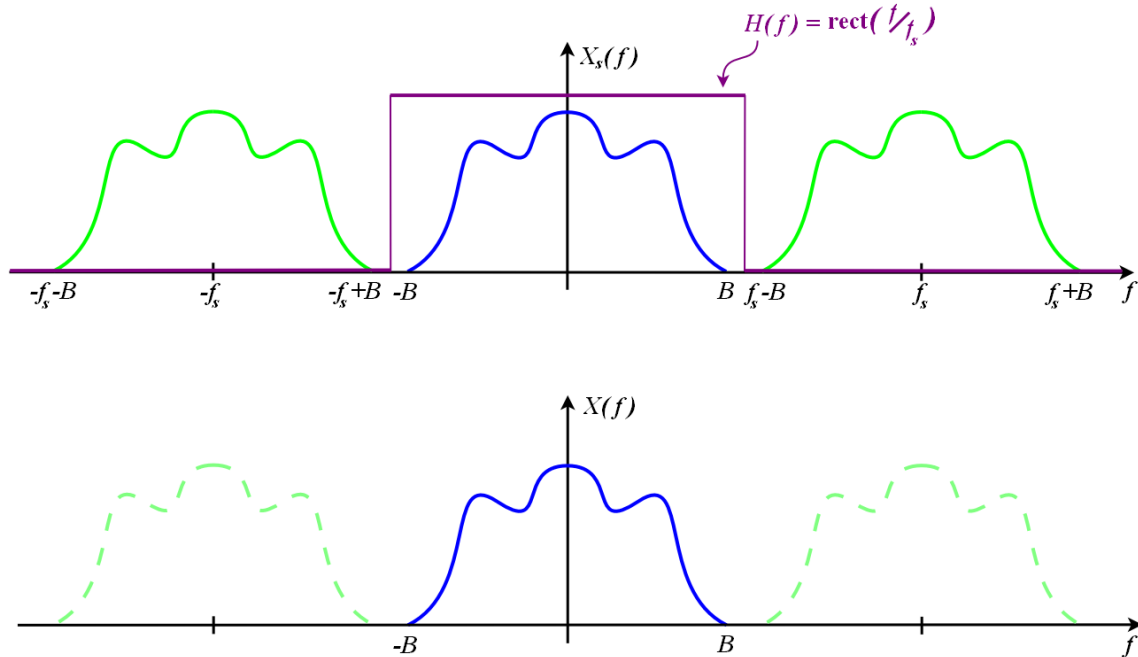
του σήματος  $x(t)$ , τότε αυτό που θα συμβεί στο πεδίο της συχνότητας φαίνεται στο σχήμα 7.6: Τι



Σχήμα 7.6: Μη επικαλυπτόμενο φάσμα

παρατηρούμε και στο σχήμα 7.6; Παρατηρούμε ξανά ότι, λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας, εμφανίστηκαν από το πουθενά περιοδικές “επαναλήψεις” του αρχικού φάσματος γύρω από τις συχνότητες  $\pm kf_s$ . Αυτό είναι το φάσμα του δειγματοληπτημένου (== ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ) σήματος. Στο σχήμα φαίνονται μόνο οι “επαναλήψεις” του φάσματος γύρω από τις συχνότητες  $\pm f_s$ , αλλά αυτή η επανάληψη συνεχίζεται σε όλα τα πολλαπλάσια της  $f_s$ , από το  $-\infty$  ως το  $+\infty$ . Το ίδιο φάσμα δηλ. εμφανίζεται και γύρω από τη συχνότητα  $2f_s, 3f_s$ , κλπ. Το ίδιο και στις αρνητικές τους. Απλά για λόγους ευκολίας, εδώ δείχνουμε μόνο τις επαναλήψεις γύρω από την  $f_s$  και την  $-f_s$ .

Υπενθυμίζεται ότι μετά την επεξεργασία του διακριτού σήματος που θα κάνουμε στον υπολογιστή, σκοπός μας είναι να μπορούμε να πάρουμε πίσω το αρχικό σήμα, δηλ. την μπλέ γραμμή. Αυτό γίνεται με την εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού (lowpass) φίλτρου γύρω από το κεντρικό φάσμα, κόβοντας τα “περισσευόμενα” φάσματα και κρατώντας μόνο το κεντρικό, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Θυμίζεται ότι το κεντρικό (μπλε) φάσμα είναι το φάσμα του αρχικού αναλογικού σήματος, ενώ τα πράσινα “ξεφύτρωσαν” λόγω της διαδικασίας της δειγματοληψίας. Οπότε αν θέλουμε να ανακτήσουμε το αναλογικό σήμα, θα πρέπει να κρατήσουμε μόνο το κεντρικό φάσμα, γιατί ΜΟΝΟ αυτό αντιστοιχεί στο αναλογικό σήμα, όπως δείχνει το σχήμα 7.7. Το φίλτρο αυτό, που προφανώς το ορίζουμε παραπάνω



Σχήμα 7.7: Φίλτρο ανακατασκευής

στη συχνότητα, δίνεται από την εξίσωση:

$$H(f) = \frac{1}{f_s} \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) \quad (7.6)$$

Αυτό σημαίνει ότι το παράθυρο ορίζεται στο διάστημα  $[-f_s/2, f_s/2]$ . Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του σήματος αυτού -δείξτε το- είναι:

$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad (7.7)$$

Πολλαπλασιάζοντας το σήμα  $H(f)$  με το φάσμα του διακριτού σήματος  $\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$ , θα έχουμε:

$$\frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \frac{1}{f_s} X(f) = X(f), \quad (7.8)$$

αφού το  $H(f)$  είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[-f_s/2, f_s/2]$ .

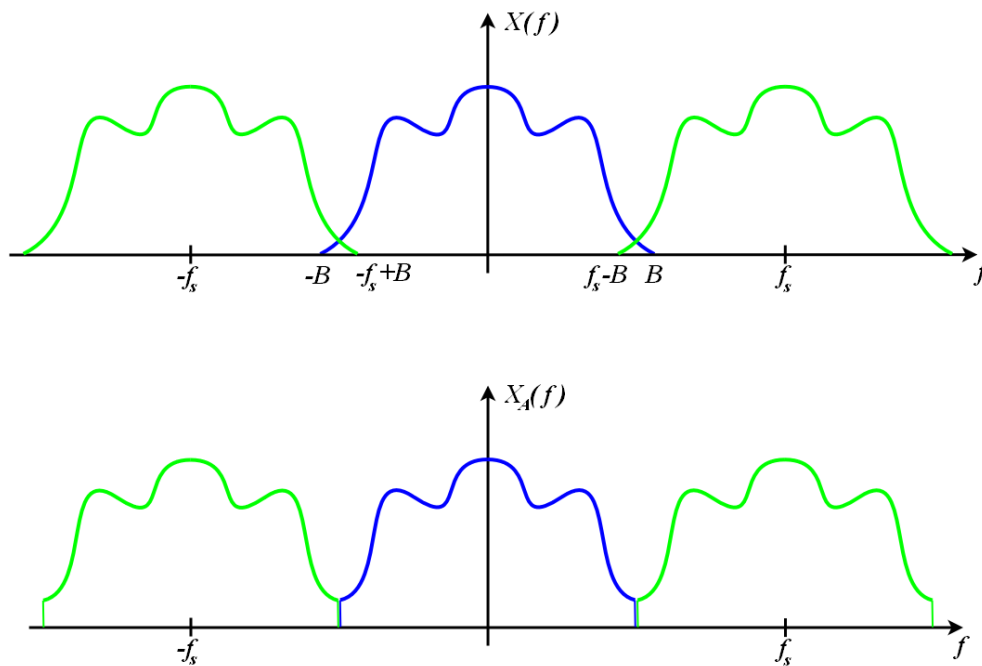
Το γινόμενο στη συχνότητα γίνεται συνέλιξη στο χρόνο:

$$h(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) h(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - k\right) \quad (7.9)$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική. Μας λέει ότι, ιδανικά, ένα αναλογικό σήμα (το οποίο ορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή - άρα σε άπειρες χρονικές στιγμές) μπορεί να ανακατασκευαστεί όταν τα

δείγματά του  $x(kT_s)$  (δηλ. από κάποιες διακριτές μόνο χρονικές στιγμές του σήματος) συνδυαστούν γραμμικά με τη συνάρτηση sinc.

Ας επανέλθουμε λίγο στο φάσμα του διακριτού σήματος, που το παραθέτουμε παρακάτω για ευκολία. Παρατηρήστε λίγο το δεξί άκρο της μπλέ γραμμής και το αριστερό άκρο της πράσινης γραμμής (του δεξιού φάσματος). Βλέπετε ότι το ένα έχει συχνότητα  $B$  και το άλλο έχει συχνότητα  $f_s - B$ . Αν αυτά τα δυο άκρα ήταν πιο κοντά απ' ότι φαίνεται στο σχήμα (δηλ. αν η  $f_s$  ήταν “πιο κοντά” στο μηδέν απ' ότι φαίνεται στο σχήμα), τότε πιθανόν να “έμπαινε” το ένα μέσα στο άλλο, να είχαμε δηλ. επικάλυψη στα φάσματα. Για να μη συμβαίνει αυτό, καταλαβαίνετε ότι πρέπει το αριστερό άκρο της πράσινης γραμμής να είναι ΠΑΝΤΑ μεγαλύτερο από το δεξί άκρο της μπλέ γραμμής, δηλ. να ισχύει  $B < f_s - B \Leftrightarrow f_s > 2B$ , που είναι το κριτήριο του Shannon. Αυτή ουσιαστικά είναι η απόδειξη του θεωρήματος της δειγματοληψίας (χωρίς μαθηματικά :-). Προέρχεται απλά από την παρατήρηση αυτού του σχήματος. Δείτε παρακάτω, στο σχήμα 7.8, τι συμβαίνει αν το κριτήριο του Shannon παραβιάζεται, δηλ. η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  είναι μικρότερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα  $B$  του σήματος. Βλέπετε ότι πλέον η μπλέ γραμμή δεν είναι η ίδια με πριν. Στα άκρα της έχουν προστεθεί συχνότητες



Σχήμα 7.8: Φάσμα με ξένες συχνότητες

“ξένες”, και έχουν αλλοιώσει το κεντρικό φάσμα. Καταλαβαίνετε τι γίνεται αν η  $f_s$  είναι ακόμα πιο κοντά στο μηδέν... χαμός! Το φαινόμενο αυτό της επικάλυψης των φασμάτων ονομάζεται **Aliasing** στα Αγγλικά, ενώ δεν έχω ιδέα πως μπορεί κάποιος να το μεταφράσει στα Ελληνικά χωρίς να βγει μια λέξη που να ηχεί παράξενα. :-)

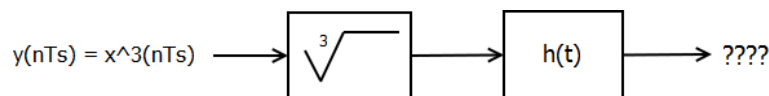
### 7.3 Παρατηρήσεις

1. Προσέξτε ότι στην παραπάνω ανάλυσή μας, θεωρήσαμε ότι το  $x(t)$  είναι ένα σήμα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων, δηλ. το φάσμα του,  $X(f)$ , είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων. Αυτό μπορεί να ΜΗΝ ισχύει πάντα, και πράγματι ΔΕΝ ισχύει για όλα τα σήματα που μπορούμε να κατασκευάσουμε στην πράξη, μια και όλα τα υπαρκτά σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, άρα άπειρης διάρκειας στη συχνότητα! :-). Τότε πρέπει να εφαρμόσουμε στο φάσμα του σήματος ένα φίλτρο, σαν το  $H(f)$  που είδαμε, ώστε να περιορίσουμε το εύρος ζώνης του, ώστε να ισχύει η ανάλυση που κάναμε παραπάνω. Το φίλτρο αυτό πρέπει να είναι κατάλληλο ώστε να μην “κόβει” μεγάλο κομμάτι απ’ την πληροφορία του σήματος.
2. Δείτε το φίλτρο  $H(f)$  που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας (σχήμα 7.7). Αυτό το φίλτρο είναι ιδανικό, αλλάζει τιμές στα άκρα του με ακαριαίο τρόπο, είναι ασυνεχές και άρα μη υλοποιήσιμο στην πράξη, όμως υπάρχουν αρκετά παρόμοια που το προσεγγίζουν. Αυτή η “παραχώρηση” που κάνουμε εισάγει παραμόρφωση στο σήμα μας, αλλά δεν μπορεί να γίνει αλλιώς... :-)
3. Η συνάρτηση δειγματοληψίας  $x_\delta(t)$  επίσης δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη. Προσεγγίζεται αρκετά καλά όμως από τετραγωνικούς παλμούς (αντί για συναρτήσεις Δέλτα) με πολύ μικρό εύρος, όπως ο παλμός που είδαμε στο Κεφάλαιο για το μετασχ. Fourier

$$\delta(t) \approx \frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad (7.10)$$

όπου όσο το  $\epsilon \rightarrow 0$ , τόσο η προσέγγιση πλησιάζει πιο κοντά στη θεωρητική συνάρτηση Δέλτα.

4. Η συνθήκη του Shannon δεν είναι αναγκαία για τη σωστή ανάκτηση του σήματος. Γιατί; Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:  
Έστω  $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , με  $f \in [-B, B]$ . Έστω  $y(t) = x^3(t)$ , άρα θα είναι  $Y(f) \neq 0$  στο  $[-3B, 3B]$ . Για ανάκτηση του σήματος σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει, πρέπει  $f_s > 6B$ . Έστω ότι το δειγματοληπτούμε με  $f_s = 2B$ . Τι συμβαίνει; Προφανώς υπάρχουν επικαλύψεις στο φάσμα του διακριτού σήματος  $y(nT_s)$ . Όμως για δείτε την διάταξη στο σχήμα 7.9. Γίνεται ή όχι σωστή ανάκτηση του σήματος από την παραπάνω διάταξη; :-)



Σχήμα 7.9: Διάταξη ανάκτησης σήματος

## 7.4 Συνοψίζοντας...

Κατά τη διάρκεια της δειγματοληψίας, πρέπει να προσέχουμε ώστε η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  να είναι μεγαλύτερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα  $B$  του σήματος που θέλουμε να δειγματοληψήσουμε, δηλ. να είμαστε σύμφωνοι με το κριτήριο του Shannon.

Αν συμβαίνει αυτό, τότε ΔΕΝ έχουμε επικαλύψεις στο κεντρικό φάσμα, και μπορούμε να ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα μέσω ενός χαμηλοπερατού φίλτρου που κόβει τις επαναλήψεις του φάσματος στις συχνότητες  $\pm kf_s$ .

Αν δεν ικανοποιείται το κριτήριο του Shannon, τότε έχουμε επικαλύψεις (aliasing) στο φάσμα του διακριτού σήματος, και τότε δεν μπορούμε να ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα με χρήση του χαμηλοπερατού φίλτρου. Αυτό δε σημαίνει ότι δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα. Ανάλογα την περίπτωση ίσως μπορούμε να καταφύγουμε σε διάφορες λύσεις για να ανακτήσουμε ξανά το σήμα μας (οι οποίες δε μας ενδιαφέρουν εδώ φυσικά :-).

## 7.5 Ασκήσεις

1. Ένα συνεχές σήμα της μορφής

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t)$$

δειγματοληπτείται με  $f_s = 4\text{kHz}$ , παράγοντας την ακολουθία  $x[n]$ . Βρείτε τη μαθηματική έκφραση του  $x[n]$ .

Λύση:

Προφανώς  $t = nT_s = n\frac{1}{4000}\text{sec}$ . Άρα θα είναι:

$$x[n] = 3 \cos(400\pi nT_s) + 5 \sin(1200\pi nT_s) + 6 \cos(4400\pi nT_s) = 3 \cos\left(\frac{n\pi}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{12n\pi}{40}\right) + 6 \cos\left(\frac{44n\pi}{40}\right)$$

2. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kt/T}$$

Λύση:

Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των συναρτήσεων Δέλτα είναι περιοδικό: επαναλαμβάνεται κάθε  $T$  χρονικές στιγμές. Άρα μπορούμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier. Προφανώς η περίοδος του είναι  $T$  και κάθε μια περίοδος περιλαμβάνει μόνο μια συνάρτηση Δέλτα. Ας βρούμε τους συντελεστές Fourier,  $X_k$ :

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T}$$

γιατί

$$\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{j2\pi k \frac{1}{T} t} dt = 1e^0 = 1$$

Άρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi kt/T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt/T} \quad (7.11)$$

που είναι και το ζητούμενο.

3. Δείξτε ότι το φίλτρο

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi f_s t},$$

με  $f_M < f_c < f_s - f_M$  και  $f_s = \frac{1}{T_s}$  παίρνει την τιμή  $h[nT_s] = \delta[n]$  για κάθε  $n$ , αν ισχύει ότι  $f_c = \frac{f_s}{2}$ . Δίνεται ότι η διακριτή συνάρτηση Δέλτα (ή αλλιώς Dirac

Δέλτα) ορίζεται ως:

$$\delta[\mathbf{n}] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση:

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi f_s t} = \frac{\sin(2\pi f_s t/2)}{\pi f_s t} = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} = \text{sinc}(f_s t)$$

Δειγματοληπτόντας με  $f_s = \frac{1}{T_s}$ , έχουμε

$$h[nT_s] = \text{sinc}(n/T_s) \longleftrightarrow h[n] = \text{sinc}(n/T_s)$$

Προφανώς, επειδή το συγκεκριμένο *sinc* μηδενίζεται στις θέσεις

$$\frac{\pi n}{T_s} = k\pi \Leftrightarrow n = kT_s, \quad k \in Z$$

και οι τιμές του  $h[n]$  είναι ακριβώς πάνω σε αυτά τα σημεία μηδενισμού, ισχύει ότι

$$h[n] = \begin{cases} \text{sinc}(0) = 1, & n = 0, \\ \text{sinc}(nT_s) = 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

που ουσιαστικά είναι ο ορισμός της διακριτής συνάρτησης Δέλτα, άρα

$$h[n] = \delta[n] \tag{7.12}$$

4. Έστω το σήμα  $x(t)$  με μετασχ. Fourier  $X(f)$ , ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα  $[-B, B]$ . Βρείτε την συχνότητα Nyquist για τη δειγματοληψία των παρακάτω σημάτων:

(α')  $x(t)$

(β')  $x(t - t_0)$

(γ')  $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ')  $x(t - t_0) + x(t + t_0)$

(ε')  $\frac{dx(t)}{dt}$

(ς')  $x(t)x(t)$

(ζ')  $x(t) * x(t)$

Λύση:

Προφανώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (συχνότητα Nyquist) καθορίζεται ΜΟΝΟ από το φάσμα του σήματος. Άρα:

(α') Η μέγιστη συχνότητα είναι  $B$ , άρα η συχνότητα Nyquist είναι  $f_s = 2B$ .

(β') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος παραμένει  $B$ , άρα η συχνότητα Nyquist είναι  $f_s = 2B$ .

(γ') Ισχύει ότι

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$$

Το σήμα έχει μετατοπιστεί γύρω από τη συχνότητα  $f_0$ , άρα η μέγιστη συχνότητά του είναι πλέον  $f_0 + B$ , άρα  $f_s = 2(f_0 + B)$ .

(δ') Ισχύει ότι

$$x(t - t_0) + x(t + t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0} + X(f)e^{j2\pi ft_0} = 2X(f) \cos(2\pi ft_0)$$

Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει  $B$ , άρα  $f_s = 2B$ .

(ε') Ισχύει ότι

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Κι εδώ, η μέγιστη συχνότητα του φάσματος παραμένει  $B$ , άρα  $f_s = 2B$ .

(ς') Ισχύει ότι

$$x(t)x(t) \leftrightarrow X(f) * X(f)$$

Η συνέλιξη, όπως έχουμε δει, δυο σημάτων που είναι μη μηδενικά σε πεπερασμένα διαστήματα είναι μη μηδενική στο διάστημα που ορίζεται ως το άθροισμα των άκρων των διαστημάτων. Άρα το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[-B - B, B + B] = [-2B, 2B]$ . Οπότε η συχνότητα Nyquist είναι  $f_s = 4B$ .

(ζ') Ισχύει ότι

$$x(t) * x(t) \leftrightarrow X(f)X(f) = X^2(f)$$

Προφανώς η συχνότητα Nyquist είναι  $f_s = 2B$ .

##### 5. Βρείτε τη συχνότητα Nyquist για τα σήματα

(α')  $\text{sinc}^2(100t)$

(β')  $0.01\text{sinc}^2(100t)$

(γ')  $\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t)$

(δ')  $\text{sinc}(50t)\text{sinc}(100t)$



Λύση:

Είναι

(α')  $\text{sinc}^2(100t) \leftrightarrow \frac{1}{100} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$  Άρα η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz, άρα η συχνότητα Nyquist θα είναι  $f_s = 200$  Hz.

(β') Η αλλαγή στο πλάτος δεν επηρεάζει το φάσμα, άρα κι εδώ  $f_s = 200$  Hz.

(γ')  $\text{sinc}(100t) + 3\text{sinc}^2(60t) \leftrightarrow \frac{1}{100} \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 3\frac{1}{60} \text{tri}\left(\frac{f}{60}\right)$ , άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 60 Hz, οπότε η συχνότητα Nyquist είναι  $f_s = 120$  Hz.

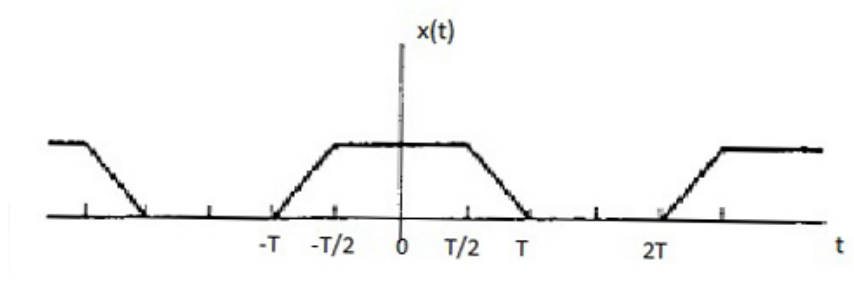
(δ')  $\text{sinc}(50t)\text{sinc}(100t) \leftrightarrow \frac{1}{50} \text{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \frac{1}{100} \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$ , άρα η μέγιστη συχνότητα είναι 50 Hz, οπότε η συχνότητα Nyquist θα είναι  $f_s = 100$  Hz.



## Κεφάλαιο 8

# Επαναληπτικά/Προχωρημένα Θέματα

1. Βρείτε το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier του σήματος στο σχήμα 8.1



Σχήμα 8.1: Τραπεζοειδές σήμα Άσκησης 7.1

Λύση:

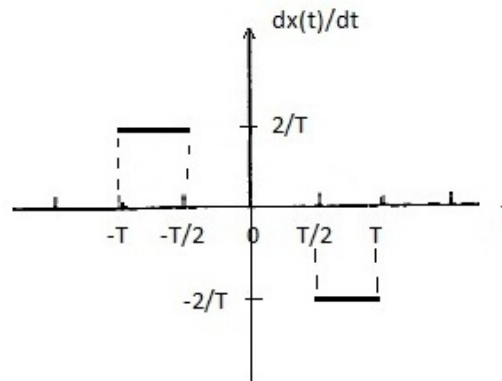
Ο αναλυτικός υπολογισμός της σειράς μέσω των τύπων είναι χρονοβόρος. Μπορούμε να πάμε μέσω του Μετασχ. Fourier. Γνωστό θεώρημα λέει ότι η εύρεση των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier μπορεί να γίνει μέσω του μετασχ. Fourier σε μια περίοδο, δηλ.

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} \quad (8.1)$$

όπου  $X_{T_0}(f)$  είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος σε μια περίοδο (δηλ. θεωρούμε το σήμα ως μη περιοδικό, κρατώντας μόνο μια περιόδό του). Προφανώς η περίοδος του σήματος είναι  $T_0 = 3T$ . Έστω  $x_{T_0}(t)$  η μια περίοδος του  $x(t)$ . Ο μετασχ. Fourier αυτού του σήματος μπορεί να υπολογιστεί αρκετά εύκολα μέσω της ιδιότητας των παραγώγων:

$$F\left\{\frac{dx_{T_0}(t)}{dt}\right\} \longleftrightarrow j2\pi f X_{T_0}(f) \quad (8.2)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν το σήμα, παίρνουμε το σήμα του σχήματος 8.2.



Σχήμα 8.2: Παράγωγος του τραπεζοειδούς σήματος Άσκησης 7.1

Αυτό μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{T_0}(t)}{dt} &= \frac{2}{T} \text{rect}\left(\frac{t + \frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) - \frac{2}{T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) \leftrightarrow \\ F\left\{\frac{dx_{T_0}}{dt}\right\} &= \frac{T}{2} \frac{2}{T} \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) e^{j2\pi \frac{3T}{4}f} - \frac{T}{2} \frac{2}{T} \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) e^{-j2\pi \frac{3T}{4}f} \\ &= \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) (e^{j2\pi \frac{3T}{4}f} - e^{-j2\pi \frac{3T}{4}f}) = \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) 2j \sin\left(2\pi \frac{3T}{4}f\right) \Leftrightarrow \\ j2\pi f X(f) &= \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) 2j \sin\left(2\pi \frac{3T}{4}f\right) \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$X(f) = \frac{\sin(\pi \frac{3T}{2}f)}{\pi f} \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \Leftrightarrow \quad (8.4)$$

$$X(f) = \frac{3T}{2} \text{sinc}\left(\frac{3T}{2}f\right) \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \quad (8.5)$$

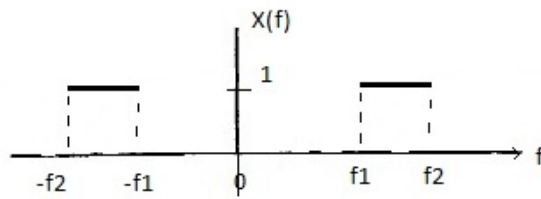
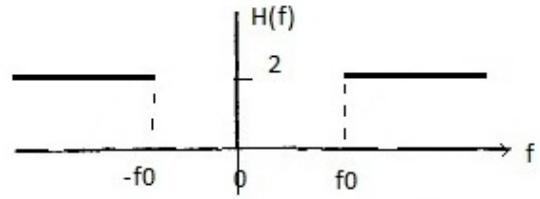
Άρα τελικά

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(f) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{k}{6}\right) \quad (8.6)$$

Οπότε η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να γραφεί ως εξής:

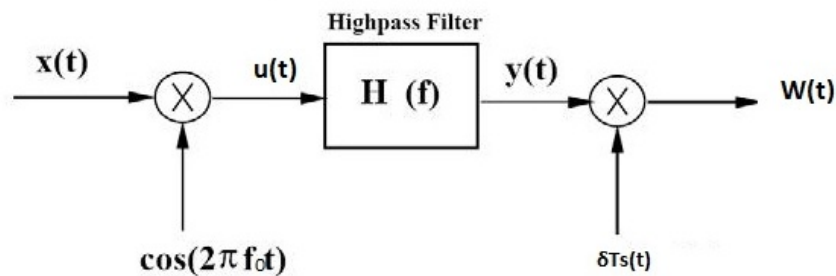
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi \frac{k}{3T}t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{k}{6}\right) e^{j2\pi \frac{k}{3T}t} \quad (8.7)$$

που είναι και το ζητούμενο.

(α) Φάσμα  $X(f)$  Άσκησης 7.2(β) Φίλτρο  $H(f)$  Άσκησης 7.2

Σχήμα 8.3: Σήματα συστήματος Άσκησης 7.2

2. Έστω πραγματικό σήμα  $x(t)$  με μετασχ. Fourier όπως στο παρακάτω σχήμα 8.3α' Το σήμα αυτό περνάει από το σύστημα του σχήματος 8.4 με το  $H(f)$  όπως



Σχήμα 8.4: Σύστημα Άσκησης 7.2

στο σχήμα 8.3β' και

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

- (α') Βρείτε το  $y(t)$  μέσω του  $Y(f)$   
 (β') Βρείτε το  $w(t)$  και σχεδιάστε το φάσμα του. Ποιά γνωστή σας διαδικασία σας θυμίζει η κατασκευή του  $w(t)$ ;  
 (γ') Βρείτε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  για να μπορεί να ανακατασκευαστεί το  $y(t)$  από το  $w(t)$ .

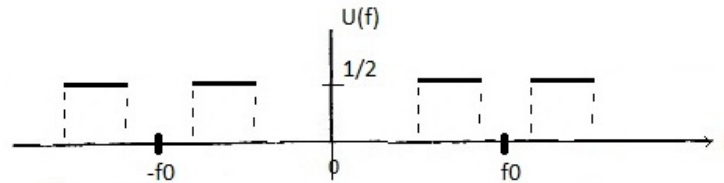
Λύση:

(α') Είναι

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow U(f) = X(f) * \left( \frac{1}{2} \delta(f + f_0) + \frac{1}{2} \delta(f - f_0) \right) \Leftrightarrow \\ U(f) &= \frac{1}{2} X(f + f_0) + \frac{1}{2} X(f - f_0) \end{aligned}$$

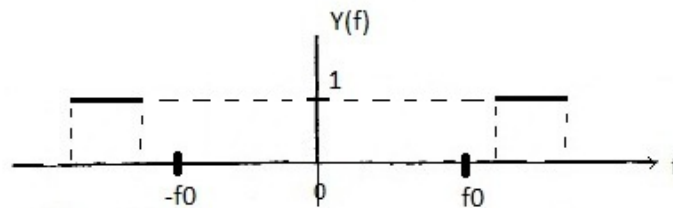
από γνωστή ιδιότητα της συνέλιξης σήματος με συναρτήσεις Δέλτα.

Το παραπάνω λέει ουσιαστικά ότι το φάσμα του  $U(f)$  αποτελείται από το φάσμα του  $X(f)$  μετατοπισμένο γύρω από τη συχνότητα  $f = -f_0$  ( $X(f + f_0)$ ) και γύρω από τη συχνότητα  $f = f_0$  ( $X(f - f_0)$ ), με πλάτος  $1/2$  το καθένα. Σχηματικά, φαίνεται στο σχήμα 8.5. Ο



Σχήμα 8.5: Το φάσμα του σήματος  $U(f)$  Άσκησης 7.2

πολλαπλασιασμός των δυο σημάτων,  $U(f)$  και  $H(f)$ , στη συχνότητα θα μας δώσει το  $Y(f)$  όπως φαίνεται στο σχήμα 8.6. Πρέπει να βρούμε τώρα το  $Y(f)$ . Υπάρχουν δυο τρόποι για



Σχήμα 8.6: Το φάσμα του σήματος  $H(f)U(f)$  Άσκησης 7.2

να το κάνουμε αυτό.

1ος τρόπος:

Παρατηρούμε ότι το φάσμα αποτελείται από 2 παράθυρα, που έχουν κέντρο τη συχνότητα  $f_c = \pm(f_0 + \frac{f_1+f_2}{2})$ . Άρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $x(t)e^{\pm j2\pi f_c t} \leftrightarrow X(f \mp f_c)$ , θα έχουμε ότι:

$$Y(f) = \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{f_2 - f_1}\right) + \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{f_2 - f_1}\right) \leftrightarrow$$

$$y(t) = (f_2 - f_1)\text{sinc}((f_2 - f_1)t)e^{-j2\pi f_c t} + (f_2 - f_1)\text{sinc}((f_2 - f_1)t)e^{j2\pi f_c t}$$

2ος τρόπος:

Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι τα δυο παράθυρα μπορούν να προκύψουν αν θεωρήσουμε ένα μεγάλο παράθυρο που ξεκινάει από το  $-f_0 - f_2$  και τελειώνει στο  $f_0 + f_2$ , και από αυτό να αφαιρέσουμε ένα λίγο μικρότερο, που ξεκινάει από το  $-f_0 - f_1$  και τελειώνει

στο  $f_0 + f_1$ . Αυτό θα μας δώσει:

$$Y(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2(f_0 + f_2)}\right) - \text{rect}\left(\frac{f}{2(f_0 + f_1)}\right) \leftrightarrow$$

$$y(t) = 2(f_0 + f_2)\text{sinc}(2(f_0 + f_2)t) - 2(f_0 + f_1)\text{sinc}(2(f_0 + f_1)t)$$

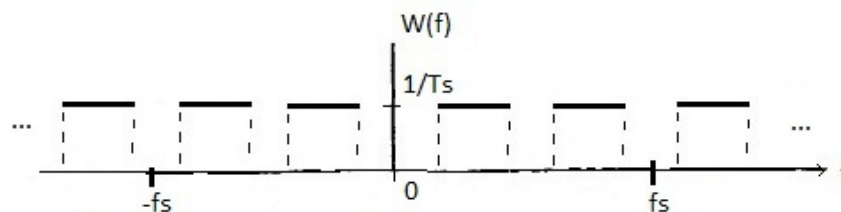
(β') Είναι

$$w(t) = \delta_{T_s}(t)y(t) = y(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

Ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος με μια άπειρη σειρά από συναρτήσεις δέλτα, οι οποίες ισαπέχουν μεταξύ τους κατά χρόνο  $T_s$ , είναι η γνωστή μας διαδικασία της δειγματοληψίας. Περίοδος δειγματοληψίας είναι η  $T_s$  και συχνότητα δειγματοληψίας η  $f_s = \frac{1}{T_s}$ . Για να βρούμε το φάσμα, έχουμε:

$$W(f) = Y(f) * F\{\delta_{T_s}(t)\} = Y(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(f - kf_s)$$

λόγω της γνωστής ιδιότητας  $X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0)$ . Αυτό μας λέει ότι το φάσμα του  $W(f)$  είναι το φάσμα του  $Y(f)$  επαναλαμβανόμενο γύρω από τις συχνότητες  $kf_s$ , που θα μπορούσαμε να το εξάγουμε κατευθείαν από τη θεωρία μας σχετικά με τη δειγματοληψία - απλά εδώ το δείξαμε και με μαθηματικά. Αν το  $f_s$  είναι αρκετά μεγάλο, τότε το φάσμα θα είναι όπως στο σχήμα 8.7.



Σχήμα 8.7: Το φάσμα του σήματος  $W(f)$  Άσκησης 7.2

(γ') Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, για να μπορεί να ανακατασκευαστεί ένα σήμα από τη δειγματοληπτημένη μορφή του, θα πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι μεγαλύτερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος που πρόκειται να δειγματοληπτηθεί. Αν κοιτάξουμε το φάσμα του  $Y(f)$ , βλέπουμε ότι η μέγιστη συχνότητά του είναι η  $f_{max} = f_0 + f_2$ . Άρα η  $f_s$  πρέπει να είναι γνήσια μεγαλύτερη με  $2(f_0 + f_2)$ , για να μπορεί να ανακτηθεί το σήμα από τα δείγματά του. Άρα πρέπει  $f_s > 2(f_0 + f_2)$ .

3. Έστω

$$H(s) = \frac{2s^2 e^{-2s}}{(s-2)(s-3)}$$

το οποίο έχει αντίστρ. μετασχ. Laplace ένα  $h(t)$  που είναι αμφίπλευρο σήμα. Βρείτε την περιοχή σύγκλισης και το  $h(t)$ .

Λύση:

Αφού το  $H(s)$  είναι αμφίπλευρο και έχει πόλους, το πεδίο σύγκλισής του θα είναι μια “λωρίδα” στο μιγαδικό επίπεδο. Οι πόλοι είναι στις θέσεις  $s = 2, s = 3$ , άρα το πεδίο σύγκλισης (από τα 3 πιθανά) θα είναι το  $ROC : 2 < \Re\{s\} < 3$ .

Είναι

$$H(s) = \frac{2s^2 e^{-2s}}{(s-2)(s-3)} = \frac{2s^2}{(s-2)(s-3)} e^{-2s} = 2G(s)e^{-2s} \leftrightarrow h(t) = 2g(t-2)$$

με

$$G(s) = \frac{s^2}{(s-2)(s-3)}$$

Οπότε αρκεί να βρούμε το  $g(t)$  και να αντικαταστήσουμε. Θα κάνουμε ανάλυση σε μερικά κλάσματα στο  $G(s)$  λοιπόν. Παρατηρώντας το  $G(s)$ , βλέπουμε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι ίσος με τον βαθμό του αριθμητή, άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως ανάλυση σε μερικά κλάσματα. Για να γίνει αυτό, πρέπει να έχουμε βαθμό πολυωνύμου παρονομαστή  $>$  βαθμό πολυωνύμου αριθμητή. Για να έρθουμε σε μια τέτοια περίπτωση, θα κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Οπότε θα έχουμε:

$$G(s) = \frac{s^2}{(s-2)(s-3)} = 1 + \frac{5s-6}{(s-2)(s-3)} = 1 + \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

με

$$A = \frac{5s-6}{(s-2)(s-3)}(s-2) \Big|_{s=2} = -4 \text{ και}$$

$$B = \frac{5s-6}{(s-2)(s-3)}(s-3) \Big|_{s=3} = 9$$

άρα τελικά

$$G(s) = 1 - \frac{4}{s-2} + \frac{9}{s-3}$$

Ξέρουμε ότι  $2 < \Re\{s\} < 3 \Leftrightarrow \Re\{s\} > 2$  και  $\Re\{s\} < 3$ . Προφανώς το πρώτο πεδίο αντιστοιχεί στον πρώτο όρο και το δεύτερο πεδίο στο δεύτερο όρο. Κοιτώντας τους πίνακες με τα ζεύγη των μετασχ. Laplace, καταλήγουμε ότι:

$$G(s) = 1 - \frac{4}{s-2} + \frac{9}{s-3} \leftrightarrow g(t) = \delta(t) - 4e^{2t}\epsilon(t) - 9e^{3t}\epsilon(-t) \quad (8.8)$$



Οπότε τελικά θα έχουμε:

$$h(t) = 2g(t-2) = 2\delta(t-2) - 8e^{2(t-2)}\epsilon(t-2) - 18e^{3(t-2)}\epsilon(t-2) \quad (8.9)$$

που είναι το ζητούμενο.

4. Έστω  $h(t)$  πραγματικό σήμα, που έχει ρητό μετασχ. Laplace με 4 πόλους εκ των οποίων ένας είναι στο  $s_1 = -1 + j$ , και δυο στο  $s_2 = 2$ . Επίσης, έχει δυο μηδενικά στο  $s_0 = 1$ . Τέλος, γνωρίζουμε ότι  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 1$ . Να βρεθούν:

(α') το  $H(s)$ .

(β') τα πιθανά πεδία σύγκλισης.

(γ') το  $h(t)$ , αν γνωρίζετε ότι το  $h(t)e^{4t}$  ΕΙΝΑΙ απολύτως ολοκληρώσιμο.

(δ') πότε το  $H(s)$  είναι ευσταθές;

Λύση:

Από εκφώνηση, ξέρουμε ότι

$$H(s) = \frac{A(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))(s-s_3)}$$

(α') Επειδή το σήμα  $h(t)$  είναι πραγματικό, οι πόλοι είναι σε συζυγή θέση, άρα ο τέταρτος πόλος είναι ο  $s_3 = s_1^* = -1 - j$ . Άρα θα είναι

$$H(s) = \frac{A(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))(s-(-1-j))}$$

Επίσης, από το ολοκλήρωμα της εκφώνησης, ισχύει ότι

$$H(0) = \frac{A(0-1)^2}{(0-2)^2(0-(-1+j))(0-(-1-j))} = \frac{A}{8} = 1 \Leftrightarrow A = 8$$

Άρα τελικά το  $H(s)$  θα είναι

$$H(s) = \frac{8(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))(s-(-1-j))} \quad (8.10)$$

(β') Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα  $\Re\{s\} > 2$ ,  $-1 < \Re\{s\} < 2$ , ή  $\Re\{s\} < -1$ .

(γ') Για να βρούμε το  $h(t)$  πρέπει να γνωρίζουμε το πεδίο σύγκλισης, αφού αυτό θα μας ορίσει μονοσήμαντα το ζεύγος του μετασχηματισμού Laplace. Ο μετ. Laplace του σήματος  $H(s)e^{4t}$  υπάρχει, και είναι ο  $H(s-4)$ . Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα  $\Re\{s\} < 3$ ,

$3 < \Re\{s\} < 6$ , ή  $\Re\{s\} > 6$ . Αφού το  $h(t)e^{4t}$  είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier του υπάρχει, άρα ο φανταστικός άξονας υπάρχει στο πεδίο σύγκλισης του. Από τα τρία πιθανά πεδία, μόνο το  $\Re\{s\} < 3$  περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα. Το πεδίο αυτό προέρχεται από το πεδίο  $\Re\{s\} < -1$  του σήματος  $h(t)$ . Άρα το πεδίο σύγκλισης του  $H(s)$  είναι το  $\Re\{s\} < -1$ .

Οπότε πάμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{8(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))(s-(-1-j))} \\ &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-(-1+j)} + \frac{D}{s-(-1-j)} \end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{d}{ds} H(s)(s-2)^2 \right|_{s=2} \\ &= \left. \frac{16(s-1)(s-(-1-j))(s-(-1+j)) - 8(s-1)^2(2s+2)}{(s-(-1+j))^2(s-(-1-j))^2} \right|_{s=2} = -\frac{16}{5} \\ B &= \left. H(s)(s-2)^2 \right|_{s=2} = \left. \frac{8(s-1)^2}{(s-(-1-j))(s-(-1+j))} \right|_{s=2} = \frac{8}{(3+j)(3-j)} = \frac{4}{5} \\ C &= \left. H(s)(s-(-1+j)) \right|_{s=-1+j} = \left. \frac{8(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1-j))} \right|_{s=-1+j} = 2.24 - 7.68j \\ D &= \left. H(s)(s-(-1-j)) \right|_{s=-1-j} = \left. \frac{8(s-1)^2}{(s-2)^2(s-(-1+j))} \right|_{s=-1-j} = 2.24 + 7.68j \end{aligned} \quad (8.11)$$

Άρα το  $h(t)$  θα είναι

$$h(t) = -Ae^{2t}u(-t) - Bte^{2t}u(-t) - Ce^{(-1+j)t}u(-t) - De^{(-1-j)t}u(-t) \quad (8.12)$$

με  $A, B, C, D$  όπως παραπάνω.

(δ') Το  $H(s)$  είναι ευσταθές μόνον αν  $-1 < \Re\{s\} < 2$  γιατί μόνο τότε το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

5. Βρείτε το Μετασχηματισμό Fourier του σήματος:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ -2t + 6, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

με χρήση παραγώγων.

Λύση:

Παραγωγίζοντας το σήμα, έχουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ -2, & 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

το οποίο γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) - 2\text{rect}\left(\frac{t-\frac{5}{2}}{1}\right) \leftrightarrow \\ F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= 2\text{sinc}(2f)e^{-j2\pi f} - 2\text{sinc}(f)e^{-j5\pi f} \\ j2\pi f X(f) &= 2\text{sinc}(2f)e^{-j2\pi f} - 2\text{sinc}(f)e^{-j5\pi f} \\ X(f) &= \frac{e^{-j2\pi f}}{j\pi f} \text{sinc}(2f) - \frac{e^{-j5\pi f}}{j\pi f} \text{sinc}(f) \\ X(f) &= e^{-j\pi/2} \frac{e^{-j2\pi f}}{\pi f} \text{sinc}(2f) - e^{-j\pi/2} \frac{e^{-j5\pi f}}{j\pi f} \text{sinc}(f) \\ X(f) &= \frac{e^{-j(2\pi f + \pi/2)}}{\pi f} \text{sinc}(2f) - \frac{e^{-j(5\pi f + \pi/2)}}{j\pi f} \text{sinc}(f) \end{aligned} \quad (8.13)$$

6. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2\mathbf{y}(t)}{dt^2} + 5\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + 6\mathbf{y}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \mathbf{x}(t)$$

με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{y}(0^-) = \mathbf{2}$ ,  $\mathbf{y}'(0^-) = \mathbf{1}$  και είσοδο  $\mathbf{x}(t) = e^{-4t}\mathbf{u}(t)$ .

Λύση:

Εφαρμόζοντας το μετασχ. Laplace και στα δυο μέλη, έχουμε:

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + L\left\{5\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{6y(t)\} &= L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + L\{x(t)\} \\ s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) &= sX(s) - x(0^-) + X(s) \\ s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) &= sX(s) - 0 + X(s) \\ Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 &= X(s)(s + 1) \\ Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 &= \frac{s+1}{s+4} \\ Y(s)(s^2 + 5s + 6) &= \frac{s+1}{s+4} + 2s + 11 \\ Y(s) &= \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \\ Y(s) &= \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, μια και η τάξη του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγαλύτερη της τάξης του αριθμητή. Οπότε

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

με

$$A = Y(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+3)(s+4)} \Big|_{s=-2} = \frac{13}{2}$$

$$B = Y(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+4)} \Big|_{s=-3} = -3$$

$$C = Y(s)(s+4) \Big|_{s=-4} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-4} = -\frac{3}{2}$$

Άρα τελικά

$$Y(s) = \frac{13}{2} \frac{1}{s+2} - 3 \frac{1}{s+3} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+4}$$

Οπότε πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, θα είναι

$$y(t) = \frac{13}{2} e^{-2t} u(t) - 3e^{-3t} u(t) - \frac{3}{2} e^{-4t} u(t) \quad (8.15)$$

που είναι και το ζητούμενο.

## 7. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(kt) dt = \frac{1}{k}$$

Λύση:

Από το θεώρημα του Parseval, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Γνωρίζουμε ότι

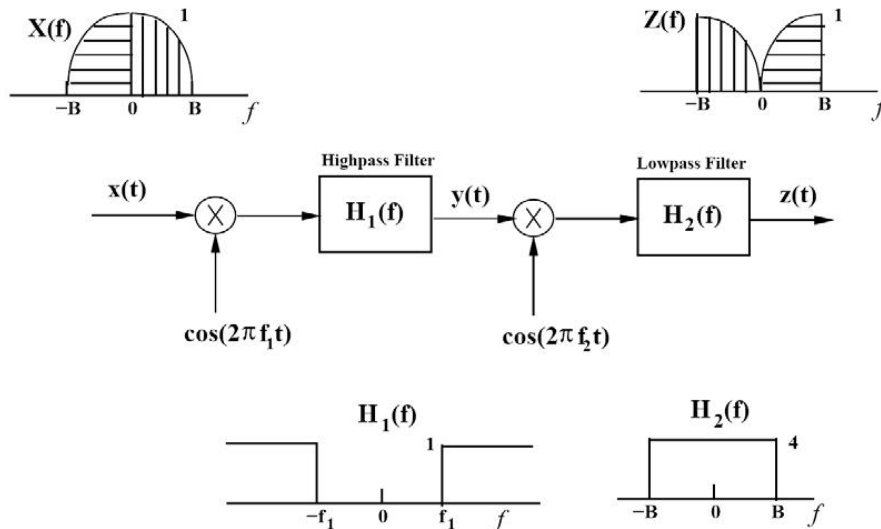
$$\text{sinc}(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} \text{rect}\left(\frac{f}{k}\right)$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(kt) dt = \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}^2\left(\frac{f}{k}\right) df = \frac{1}{k^2} \int_{-k/2}^{k/2} df = \frac{1}{k^2} f \Big|_{-k/2}^{k/2} = \frac{1}{k} \quad (8.16)$$

που είναι και το ζητούμενο.

8. Δίδεται το παρακάτω σύστημα (σχήμα 8.8) για voice scrambling, ώστε να παρέχει προστασία από υποκλοπές. Ας υποτεθεί ότι το φάσμα της φωνής έχει



Σχήμα 8.8: Voice Scrambler Άσκησης 7.8

μετασχηματισμό Fourier  $X(f)$  που φαίνεται στο σχήμα. Το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο  $H_1(f)$  επιτρέπει τη διέλευση μόνο των φασματικών συνιστωσών με συχνότητα μεγαλύτερη της  $f_1$ . Το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο  $H_2(f)$  επιτρέπει τη διέλευση μόνο των φασματικών συνιστωσών με συχνότητα μικρότερη της  $B$ . Στην έξοδο του σήματος, το σήμα έχει φάσμα με ανεστραμμένο φασματικό περιεχόμενο που το καθιστά σχεδόν ακατάληπτο.

(α') Να δείξετε ότι  $x(t) \cos(2\pi f_1 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_1) + \frac{1}{2}X(f + f_1)$ .

(β') Να σχεδιάσετε το φάσμα  $Y(f)$ .

(γ') Να βρείτε την τιμή της  $f_2$  ως συνάρτηση της  $B$  και της  $f_1$  ώστε το  $Z(f)$  να έχει τη μορφή που δίνεται στο σχήμα.

Λύση:

Θα έχουμε:

(α') Είναι

$$x(t) \cos(2\pi f_1 t) \longleftrightarrow X(f) * \left( \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{1}{2}\delta(f - f_1) \right) = \frac{1}{2}X(f + f_1) + \frac{1}{2}X(f - f_1) \quad (8.17)$$

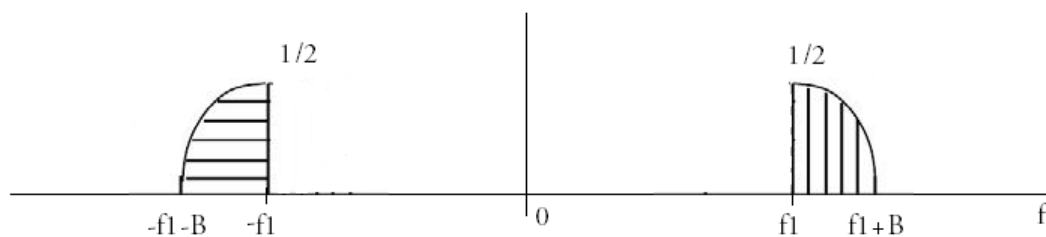
και φαίνεται στο σχήμα 8.9.

Σχήμα 8.9: Φάσμα  $x(t) * \cos(2\pi f_1 t)$  Άσκησης 7.8

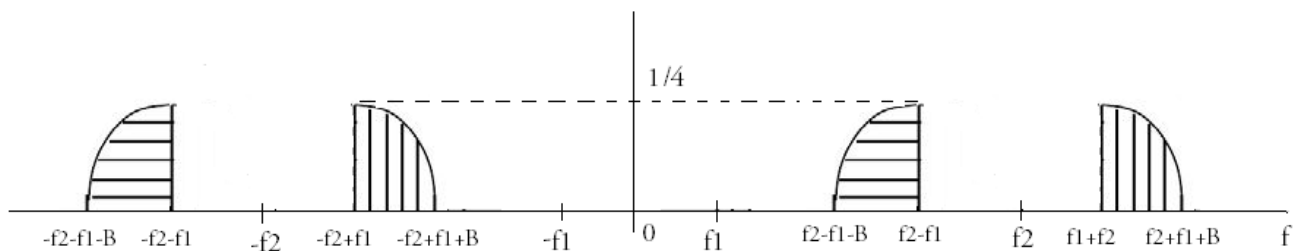
(β') Πρέπει να βρούμε το  $Y(f)$ . Το  $Y(f)$  προκύπτει αν περάσουμε το σήμα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα μέσα από το σύστημα-φίλτρο  $H_1(f)$ . Είναι

$$Y(f) = \left( \frac{1}{2}X(f + f_1) + \frac{1}{2}X(f - f_1) \right) H_1(f) \quad (8.18)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 8.10.

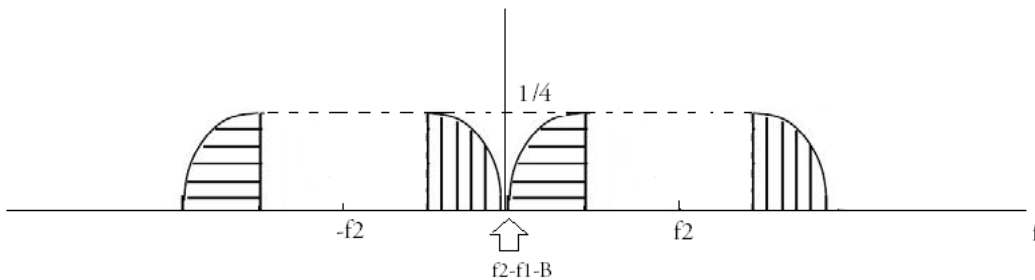
Σχήμα 8.10: Φάσμα  $Y(f)$  Άσκησης 7.8

(γ') Ας υποθέσουμε μια τυχαία  $f_2 \gg f_1$ . Ο πολλαπλασιασμός του φάσματος του σχήματος 8.10 με  $\cos(2\pi f_2 t)$  θα μας δώσει το σχήμα 8.11. Προφανώς, για να πάρουμε το  $Z(f)$  που

Σχήμα 8.11: Φάσμα  $y(t) * \cos(2\pi f_2 t)$  Άσκησης 7.8

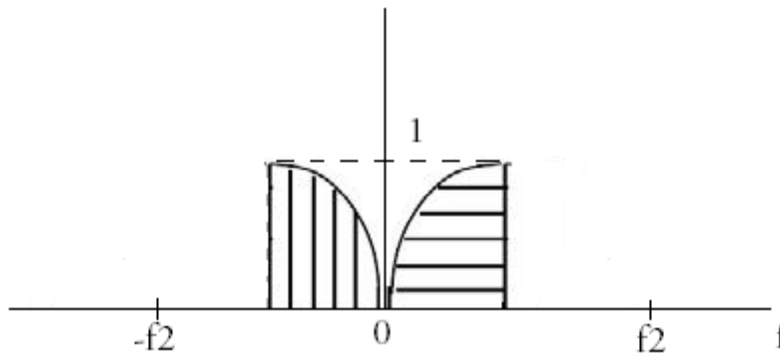
δίνεται στην εκφώνηση, πρέπει τα φάσματα να μην είναι όπως στο σχήμα 8.11, όπου τα

φάσματα είναι μακριά μεταξύ τους, αλλά όπως φαίνονται στο σχήμα 8.12. Οπότε, μετά από



Σχήμα 8.12: Ζητούμενο φάσμα  $y(t) * \cos(2\pi f_2 t)$  Άσκησης 7.8

την εφαρμογή του φίλτρου  $H_2(f)$ , όπως αυτό δίνεται στην εκφώνηση, θα απομείνει το φάσμα του σχήματος 8.13. Άρα, η σχέση που συνδέει το τη συχνότητα  $f_2$  με την  $f_1$  και τη  $B$  είναι



Σχήμα 8.13: Φάσμα  $Z(f)$  Άσκησης 7.8

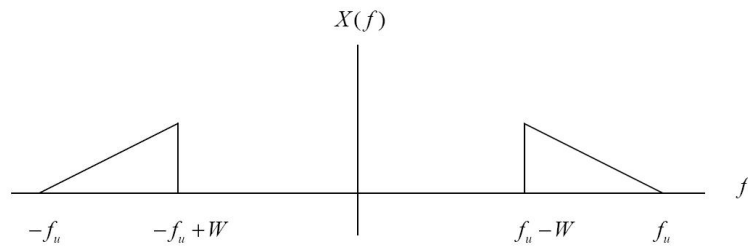
αυτή που φαίνεται και στο σχήμα 8.12, δηλ.

$$f_2 - f_1 - B = 0 \iff f_2 = f_1 + B \tag{8.19}$$

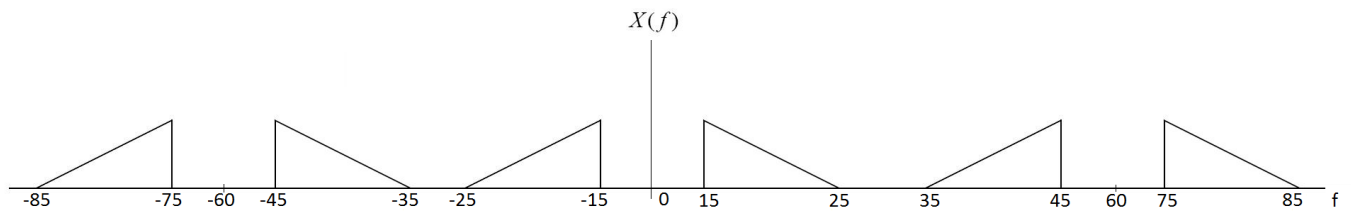
9. Το σήμα  $X(f)$  στο σχήμα 8.14 έχει  $f_u = 25\text{kHz}$  και  $W = 10\text{kHz}$ . Σχεδιάστε ποιοτικά το φάσμα  $X_s(f)$  του σήματος  $x(nT_s)$  που προέρχεται από την ιδανική δειγματοληψία του  $x(t)$  με συχνότητες δειγματοληψίας  $f_s = 60, 45, 20\text{kHz}$ .

Λύση:

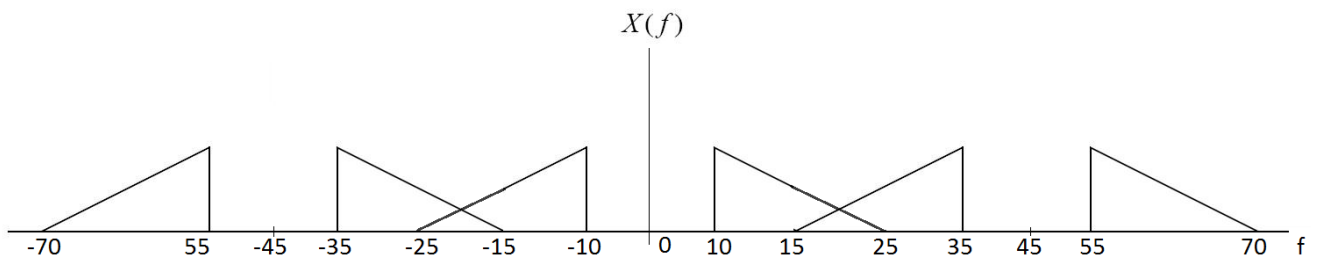
Για συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = 60\text{ kHz}$ , το δειγματοληπτημένο φάσμα του σήματος, φαίνεται στο σχήμα 8.15. Δεν υπάρχει επικάλυψη στα φάσματα γιατί  $f_s > 2f_{max} = 50\text{ kHz}$ . Για συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s = 45\text{ kHz}$ , το δειγματοληπτημένο φάσμα του σήματος, φαίνεται στο



Σχήμα 8.14: Δειγματοληπτημένο φάσμα Άσκησης 7.9

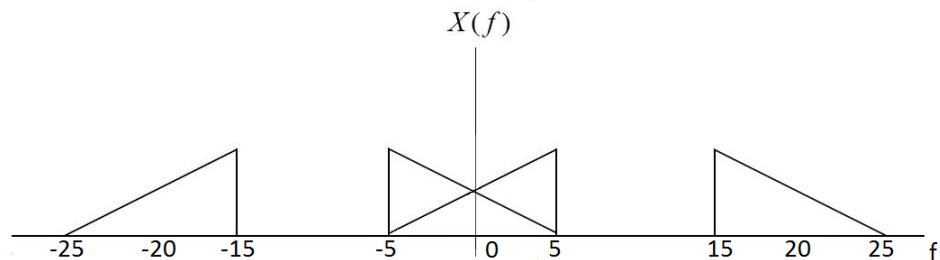
Σχήμα 8.15: Δειγματοληπτημένο φάσμα για  $f_s = 60\text{kHz}$  Άσκησης 7.9

σχήμα 8.16. Υπάρχει επικάλυψη στα φάσματα γιατί  $f_s < 2f_{max} = 50\text{ kHz}$ . Για συχνότητα δειγ-

Σχήμα 8.16: Δειγματοληπτημένο φάσμα για  $f_s = 45\text{kHz}$  Άσκησης 7.9

ματοληψίας  $f_s = 20\text{ kHz}$ , το δειγματοληπτημένο φάσμα του σήματος, φαίνεται στο σχήμα 8.17.

Υπάρχει επικάλυψη στα φάσματα γιατί  $f_s < 2f_{max} = 50\text{ kHz}$ . Σε όλα τα σχήματα, τα φάσματα

Σχήμα 8.17: Δειγματοληπτημένο φάσμα για  $f_s = 20\text{kHz}$  Άσκησης 7.9



συνεχίζονται περιοδικά ανά  $f_s$ .

10. Έστω το σύστημα

$$H(s) = \frac{s-1}{s^3 + 2s^2 - s - 2} \quad (8.20)$$

Σχολιάστε την ευστάθεια και την αιτιατότητα του συστήματος, για κάθε πιθανό ROC που μπορεί να προκύψει, χωρίς να υπολογίσετε το  $h(t)$ . Αν πολλαπλασιάσουμε το  $H(s)$  με  $e^{2s}$ , τι αλλάζει σχετικά με την ευστάθεια και την αιτιατότητα;

Λύση:

Είναι

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s-1}{s^3 + 2s^2 - s - 2} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned} A &= H(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1 \\ B &= H(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1 \end{aligned}$$

και άρα

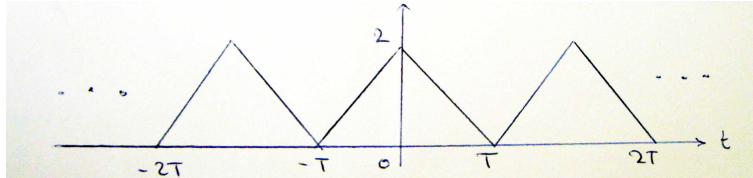
$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα  $-2 < \Re\{s\} < -1$ ,  $\Re\{s\} < -2$ ,  $\Re\{s\} > -1$ .

- $-2 < \Re\{s\} < -1$ : το σήμα είναι μη ευσταθές, γιατί δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης, ενώ είναι αμφίπλευρο και άρα μη αιτιατό.
- $\Re\{s\} < -2$ : το σήμα είναι μη ευσταθές, γιατί δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας στο πεδίο σύγκλισης, ενώ είναι αριστερόπλευρο και άρα μη αιτιατό.
- $\Re\{s\} > -1$ : το σήμα είναι ευσταθές, γιατί ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, ενώ είναι δεξιόπλευρο και αιτιατό, γιατί αποτελείται από απλά κλάσματα χωρίς καθυστέρηση.

Ο πολλαπλασιασμός με  $e^{2s}$  δίνει το σήμα  $h(t+2)$ . Δεν αλλάζει τίποτα όσον αφορά την ευστάθεια, αφού τα πεδία σύγκλισης δεν αλλάζουν, αφού δεν άλλαξαν οι πόλοι. Όσον αφορά την αιτιατότητα, το σήμα δεν είναι αιτιατό σε καμία περίπτωση.

11. Βρείτε τους συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier του περιοδικού σήματος του σχήματος 8.18.



Σχήμα 8.18: Περιοδικό Τριγωνικό Σήμα Άσκησης 7.11

Λύση:

Θα βρούμε πρώτα το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος  $x(t)$  και μετά θα δειγματοληπτήσουμε το φάσμα για να βρούμε τους συντελεστές Fourier. Είναι

$$x(t, T) = 2\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow X(f, T) = 2T \text{sinc}^2(fT)$$

Η περίοδος του περιοδικού σήματος είναι  $T_0 = 2T$ , άρα οι συντελεστές Fourier θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{2T} 2T \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2T} T\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \quad (8.21)$$

12. Αποδείξτε ότι ένα σήμα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο στο χώρο του χρόνου και, ταυτόχρονα, πεπερασμένο στο χώρο της συχνότητας.

Λύση:

Έστω ότι ένα σήμα  $x(t)$  είναι ταυτοχρόνως πεπερασμένο και στους δυο χώρους. Στο χώρο της συχνότητας, θα είναι:

$$X(f) = 0, |f| > B$$

Τότε, μπορούμε να γράψουμε το σήμα αυτό ως

$$X'(f) = X(f) \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Μεταφερόμενοι στο χώρο του χρόνου, θα είναι

$$X'(f) = X(f) \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \leftrightarrow x'(t) = x(t) * 2B \text{sinc}(2Bt)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι το  $x'(t)$  (και άρα και το  $x(t)$ ) δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο στο χρόνο, γιατί η συνάρτηση *sinc* έχει άπειρη διάρκεια. Άρα άτοπο, οπότε δε γίνεται να υπάρξει σήμα πεπερασμένο και στους δυο χώρους.

13. Η εκθετική σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος δίδεται ως:

$$x(t) = (2 + j2)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2 - j2)e^{j3t}.$$

Να βρεθεί:

- (α') Αν το σήμα είναι πραγματικό, φανταστικό, ή μιγαδικό.
- (β') Το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.
- (γ') Το μονόπλευρο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.
- (δ') Το ολοκλήρωμα  $\int_0^{T_0} x^2(t) dt$ .
- (ε') Την περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος,  $\phi_{xx}(t)$ , σε εκθετική και τριγωνομετρική μορφή.

Λύση:

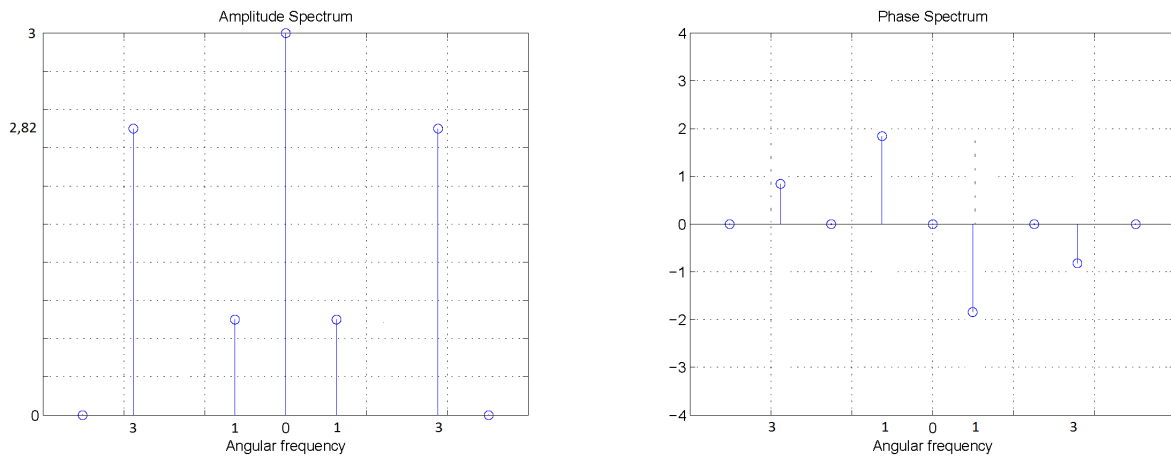
- (α') Παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές των εκθετικών είναι συζυγείς μεταξύ τους, δηλ. ισχύει  $X_k = X_{-k}^*$ . Αυτή η ιδιότητα ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα, άρα το σήμα μας είναι πραγματικό.
- (β') Για να βρούμε εύκολα το φάσμα πλάτους και φάσης, αρκεί να μετατρέψουμε τους συντελεστές  $X_k$  σε μορφή μέτρο-φάση, δηλ.  $X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$ . Είναι

$$\begin{aligned} 2 + j2 &= \sqrt{2^2 + 2^2} e^{j \tan^{-1} \frac{2}{2}} = \sqrt{8} e^{j \tan^{-1}(1)} = \sqrt{8} e^{j \frac{\pi}{4}} \\ j2 &= 2e^{j \frac{\pi}{2}} \\ 2 - j2 &= (\sqrt{8} e^{j \frac{\pi}{4}})^* = \sqrt{8} e^{-j \frac{\pi}{4}} \\ -j2 &= 2e^{-j \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο σχήμα 8.19α' και το φάσμα φάσης στο σχήμα 8.19β'.

- (γ') Το μονόπλευρο ανάπτυγμα δίνεται εύκολα ως

$$\begin{aligned} x(t) &= (2 + j2)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2 - j2)e^{j3t} \\ &= \sqrt{8} e^{j \frac{\pi}{4}} e^{-j3t} + 2e^{j \frac{\pi}{2}} e^{-jt} + 3 + 2e^{-j \frac{\pi}{2}} e^{jt} + \sqrt{8} e^{-j \frac{\pi}{4}} e^{j3t} \\ &= 3 + 2\sqrt{8} \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



(α') Φάσμα πλάτους Άσκησης 7.13

(β') Φάσμα φάσης Άσκησης 7.13

Σχήμα 8.19: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 7.13

(δ') Το ολοκλήρωμα θα υπολογιστεί από τη σχέση του Parseval:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_0} x^2(t) dt &= T_0 \sum_{k=-3}^3 |X_k|^2 \\
 &= 2\pi \left( 3^2 + (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 + 2^2 + 2^2 \right) \\
 &= 2\pi 33 \\
 &= 66\pi
 \end{aligned}$$

(ε') Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για την εκθετική σειρά Fourier δίνεται ως

$$\begin{aligned}
 \phi_{xx}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 t} \\
 &= 9 + 8e^{-jt} + 8e^{jt} + 4e^{j3t} + 4e^{-j3t}
 \end{aligned}$$

Εύκολα μετατρέπουμε την παραπάνω αναπαράσταση σε τριγωνομετρική:

$$\begin{aligned}
 \phi_{xx}(t) &= 9 + 8e^{-jt} + 8e^{jt} + 4e^{j3t} + 4e^{-j3t} \\
 &= 9 + 16 \cos(t) + 8 \cos(3t)
 \end{aligned}$$

14. Δίνεται το παρακάτω περιοδικό σήμα  $x(t)$ :

$$x(t) = 2 \cos \left( 2\pi 200t + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( 2\pi 500t - \frac{\pi}{8} \right) - \sin \left( 2\pi 600t + \frac{2\pi}{5} \right)$$

(α') Βρείτε την περίοδο,  $T_0$ , του σήματος και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.

- (β') Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης,  $\phi_x(t)$ , και τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος,  $\Phi_x(f)$ , του σήματος  $x(t)$ .
- (γ') Ποιά είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που απαιτείται για να μετατρέψουμε το σήμα σε διακριτού χρόνου, ώστε μετά να μπορούμε να το ανακτήσουμε πλήρως από τα δείγματά του;
- (δ') Το σήμα  $x(t)$  περνάει από ένα φίλτρο  $h(t)$ , που έχει μετασχηματισμό Fourier:

$$\mathbf{H}(f) = \begin{cases} 1, & f > 400\text{Hz} \\ 0, & f \leq 400\text{Hz}. \end{cases}$$

Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους του  $x(t)$  στην έξοδο του φίλτρου.

Λύση:

- (α') Το σήμα έχει συχνότητες 200, 500, 600 Hz, άρα θεμελιώδη συχνότητα  $f_0 = \text{MK}\Delta\{200, 500, 600\} = 100\text{Hz}$ . Οπότε η περίοδος θα είναι  $T_0 = 1/100 = 0.01\text{sec}$ . Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, το σήμα γράφεται ως:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/8} - \\ &- \frac{1}{2j} e^{j2\pi 600t} e^{j2\pi/5} + \frac{1}{2j} e^{-j2\pi 600t} e^{-j2\pi/5} \\ &= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/8} + \\ &+ \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{j2\pi 600t} e^{j2\pi/5} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} e^{-j2\pi 600t} e^{-j2\pi/5} \\ &= e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/8} + \\ &+ \frac{1}{2} e^{j2\pi 600t} e^{j9\pi/10} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi 600t} e^{-j9\pi/10} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο σχήμα 8.20.

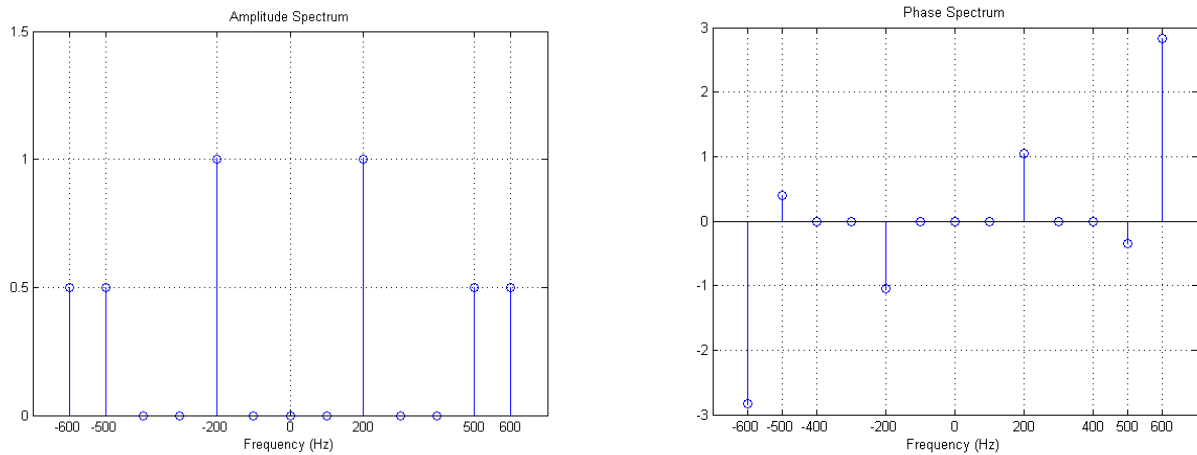
- (β') Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται ως:

$$\phi_x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 t}$$

Άρα θα είναι:

$$\phi_x(t) = e^{j2\pi 200t} + e^{-j2\pi 200t} + \frac{1}{4} e^{j2\pi 500t} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi 500t} + \frac{1}{4} e^{j2\pi 600t} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi 600t} \quad (8.23)$$

Η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος  $\Phi_x(f)$  είναι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης του



(α) Φάσμα πλάτους Άσκησης 7.14

(β) Φάσμα φάσης Άσκησης 7.14

Σχήμα 8.20: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 7.14

σήματος. Άρα θα είναι:

$$\begin{aligned}
 \Phi_x(f) &= F\{\phi_x(t)\} \\
 &= \delta(f - 200) + \delta(f + 200) + \frac{1}{4}\delta(f - 500) + \\
 &+ \frac{1}{4}\delta(f + 500) + \frac{1}{4}\delta(f - 600) + \frac{1}{4}\delta(f + 600) \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

(γ') Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι η διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος. Άρα  $f_s = 2f_{max} = 1200\text{Hz}$ .

(δ') Αφού το φίλτρο κόβει τις συχνότητες που είναι μικρότερες από  $400\text{Hz}$ , και αφήνει αναλλοίωτες αυτές που είναι μεγαλύτερες από  $400\text{Hz}$ , το φάσμα πλάτους του σήματος θα είναι αυτό στο σχήμα 8.21.

15. Δίνονται τα παρακάτω σήματα:

$$x(t) = -3\text{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right), \quad y(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{2}\right) - \text{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right)$$

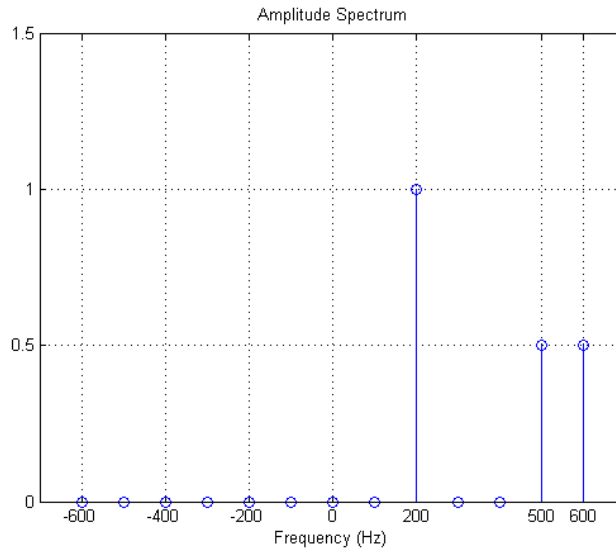
(α') Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier,  $X(f)$ ,  $Y(f)$ , των σημάτων  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

(β') Υπολογίστε τη συνέλιξη,  $c_{xy}(t)$ , των σημάτων  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

(γ') Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας,  $\Phi_x(f)$ , του σήματος  $x(t)$ .

(δ') Αν  $Z(f) = fX(f)$ , βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier,  $z(t)$ .

Λύση:



Σχήμα 8.21: Φιλτραρισμένο σήμα Άσκησης 7.14

(α') Ο μετασχ. Fourier δίνεται ως:

$$X(f) = -6\text{sinc}(2f)e^{j2\pi 3f} \text{ και } Y(f) = 2\text{sinc}^2(2f) - 2\text{sinc}^2(2f)e^{-j2\pi 4f}. \quad (8.25)$$

(β') Η συνέλιξη του σήματος δίνεται ως:

i.  $c_{xy}(t) = 0$ , για  $4 + t < -2 \Leftrightarrow t < -6$ .

ii.  $c_{xy}(t) = -3 \int_{-2}^{4+t} \left(\frac{1}{2}\tau + 1\right) d\tau = \dots$ , για  $4 + t \geq -2$  και  $4 + t < 0 \Leftrightarrow -6 \leq t < -4$ .

iii.  $c_{xy}(t) = -3 \int_{2+t}^0 \left(\frac{1}{2}\tau + 1\right) d\tau - 3 \int_0^{t+4} \left(-\frac{1}{2}\tau + 1\right) d\tau = \dots$ , για  $t + 4 < 2$  και  $t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq t < -2$ .

iv.  $c_{xy}(t) = -3 \int_{2+t}^{4+t} \left(-\frac{1}{2}\tau + 1\right) d\tau = \dots$ , για  $t + 2 \geq 0$  και  $t + 4 < 4 \Leftrightarrow -2 \leq t < 0$ .

v.  $c_{xy}(t) = -3 \int_{t+2}^4 \left(-\frac{1}{2}\tau + 1\right) d\tau - 3 \int_4^{4+t} \left(\frac{1}{2}\tau - 3\right) d\tau = \dots$ , για  $t + 2 < 4$  και  $4 + t \geq 4 \Leftrightarrow 0 \leq t < 2$ .

vi.  $c_{xy}(t) = -3 \int_{2+t}^6 \left(\frac{1}{2}\tau - 3\right) d\tau = \dots$ , για  $2 + t \geq 4$  και  $2 + t < 6 \Leftrightarrow 2 \leq t < 4$ .

vii.  $c_{xy}(t) = 0$ , για  $2 + t \geq 6 \Leftrightarrow t \geq 4$ .

(γ') Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας,  $\Phi_x(f)$ , δίνεται από τον τύπο

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = 36\text{sinc}^2(2f). \quad (8.26)$$

(δ') Με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης,  $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j2\pi fX(f)$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} Z(f) &= fX(f) \\ j2\pi Z(f) &= j2\pi fX(f) \longleftrightarrow \\ j2\pi z(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -3\delta(t+4) + 3\delta(t+2) \iff \\ z(t) &= \frac{1}{j2\pi}(-3\delta(t+4) + 3\delta(t+2)) \end{aligned} \quad (8.27)$$

που είναι και το ζητούμενο.

16. Η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας,  $\Phi_x(f)$ , ενός σήματος  $x(t)$  δίνεται ως:

$$\Phi_x(f) = 2\text{sinc}(2f) + \text{sinc}^2(4f)$$

(α') Βρείτε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης,  $\phi_x(t)$ , του σήματος  $x(t)$ .

(β') Βρείτε την ενέργεια του σήματος,  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ .

Λύση:

(α') Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ο αντίστρ. μετασχ. Fourier της Φασματικής Πυκνότητας Ενέργειας, άρα:

$$\phi_x(t) = F^{-1}\{\Phi_x(f)\} = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{4}\text{tri}\left(\frac{t}{4}\right) \quad (8.28)$$

(β') Η ενέργεια του σήματος δίνεται απλά από την τιμή της αυτοσυσχέτισης στη θέση  $\tau = 0$ , άρα

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \text{rect}(0) + \frac{1}{4}\text{tri}(0) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad (8.29)$$

που είναι και το ζητούμενο.

17. Για ένα σήμα  $h(t)$ , δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace του:

$$H(s) = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

(α') Ποιά είναι τα πιθανά πεδία σύγκλισης για τον παραπάνω μετασχηματισμό;

(β') Αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $h(t)$ , ποιό είναι τώρα το πεδίο σύγκλισης;

(γ') Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace,  $h(t)$ , δεδομένου του πεδίου σύγκλισης που βρήκατε στο 2ο ερώτημα.



Λύση:

(α') Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις  $s_1 = -1, s_2 = -2$ . Άρα τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα:  $\Re\{s\} < -2, \Re\{s\} > -1, -2 < \Re\{s\} < -1$ .

(β') Η ύπαρξη του μετασχ. Fourier σημαίνει ότι το πεδίο σύγκλισης περιέχει τον άξονα των φανταστικών αριθμών. Το μόνο πεδίο που ικανοποιεί την παραπάνω απαίτηση είναι το:  $\Re\{s\} > -1$ .

(γ') Το πεδίο σύγκλισης μας πληροφορεί ότι το σήμα είναι δεξιόπλευρο. Επίσης, παρατηρούμε ότι ο μετασχ. Laplace είναι ρητή συνάρτηση, με ίδιο βαθμό στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Άρα πρέπει να διαιρέσουμε τα πολυώνυμα πριν κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Είναι:

$$H(s) = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2(s^2 + 3s + 2) - 6s + 1}{s^2 + 3s + 2} = 2 + \frac{-6s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

Άρα τελικά

$$H(s) = 2 + \frac{-6s + 1}{s^2 + 3s + 2} = 2 - \frac{6s - 1}{(s + 1)(s + 2)} = 2 - G(s)$$

Θα κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα στο  $G(s)$ . Είναι:

$$G(s) = \frac{6s - 1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

με

$$A = G(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = \frac{6s - 1}{s + 2} \Big|_{s=-1} = -7,$$

$$B = G(s)(s + 2) \Big|_{s=-2} = \frac{6s - 1}{s + 1} \Big|_{s=-2} = 13$$

Άρα τελικά:

$$G(s) = -7 \frac{1}{s + 1} + 13 \frac{1}{s + 2}$$

Οπότε συνολικά,

$$H(s) = 2 - G(s) = 2 + 7 \frac{1}{s + 1} - 13 \frac{1}{s + 2}$$

και άρα,

$$h(t) = 2\delta(t) - g(t) = 2\delta(t) + 7e^{-t}\epsilon(t) - 13e^{-2t}\epsilon(t).$$

που είναι και το σήμα που ζητείται.

18. Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace ενός δεξιόπλευρου σήματος:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{2s^2 e^{4s}}{(1 - s)(-2 - s)}$$

(α') Βρείτε το πεδίο σύγκλισης. Δικαιολογήστε την επιλογή σας.

(β') Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace,  $h(t)$ .

(γ') Υπολογίζεται ο μετασχηματισμός Fourier του παραπάνω σήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε.

Λύση:

(α') Οι πόλοι είναι προφανώς οι:  $\Re\{s\} = 1, \Re\{s\} = -2$ . Δεδομένου ότι το σήμα είναι δεξιό-πλευρο, το πεδίο σύγκλισης θα είναι το:  $\Re\{s\} > 1$ .

(β') Έχουμε:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2s^2 e^{4s}}{(1-s)(-2-s)} = \frac{2s^2}{(1-s)(-2-s)} e^{4s} = \\ &= \frac{2s^2}{(s-1)(s+2)} e^{4s} = G(s) e^{4s} \leftrightarrow h(t) = g(t+4) \end{aligned}$$

Άρα αρκεί να βρούμε το  $g(t)$ . Ξεκινάμε από το  $G(s)$  και επειδή τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή είναι ίδιου βαθμού, θα κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων και μετά Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Είναι:

$$G(s) = \frac{2s^2}{(s-1)(s+2)} = \frac{2s^2}{s^2 + s - 2} = \frac{2(s^2 + s - 2) - 2s + 4}{(s-1)(s+2)} = 2 + \frac{-2s + 4}{(s-1)(s+2)}$$

Άρα θα έχουμε:

$$G(s) = 2 + \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = 2 + R(s),$$

με

$$A = R(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{-2s+4}{s+2} \Big|_{s=1} = \frac{2}{3}$$

$$B = R(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{-2s+4}{s-1} \Big|_{s=-2} = -\frac{8}{3}$$

Οπότε είναι:

$$G(s) = 2 + R(s) = 2 - \frac{8}{3} \frac{1}{s+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{s-1} \leftrightarrow g(t) = 2\delta(t) - \frac{8}{3} e^{-2t} \epsilon(t) + \frac{2}{3} e^t \epsilon(t)$$

Τελικά, αφού  $h(t) = g(t+4)$ , θα έχουμε:

$$h(t) = g(t+4) = 2\delta(t+4) - \frac{8}{3} e^{-2(t+4)} \epsilon(t+4) + \frac{2}{3} e^{t+4} \epsilon(t+4)$$

(γ') Ο μετασχ. Fourier για το παραπάνω σήμα δεν υπάρχει, γιατί το πεδίο σύγκλισης  $\Re\{s\} > 1$ , δεν περιλαμβάνει τον άξονα των φανταστικών αριθμών.

# Παράρτημα Α΄

## Μαθηματικό Υπόβαθρο

Ίσως αυτό το κεφάλαιο να έπρεπε να είναι το πρώτο, αλλά τα θέματα που συζητούνται σε αυτό το κεφάλαιο δεν είναι εντελώς καινούρια για το φοιτητή. Έχετε ήδη μελετήσει πολλά από αυτά τα θέματα σε προηγούμενα μαθήματα ή θα έπρεπε (κάποια) να τα γνωρίζετε από την προπανεπιστημιακή σας εκπαίδευση. Παρ' όλα αυτά, αυτό το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο αξίζει μιας ανακεφαλαίωσης επειδή είναι τόσο κυρίαρχο στον τομέα της επεξεργασίας σήματος. Η απόδοση λίγου χρόνου σε μια τέτοια σύνοψη θα σας ωφελήσει τα μάλα :-) αργότερα. Επιπλέον, το υλικό αυτό είναι χρήσιμο όχι μόνο γι' αυτό το μάθημα αλλά και για άλλα που θα ακολουθήσουν. Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως υλικό αναφοράς για τη μελλοντική επαγγελματική σας καριέρα.

### Α΄.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Οι *μιγαδικοί αριθμοί* είναι απλά μια προέκταση των συνηθισμένων αριθμών και είναι κομμάτι του σύγχρονου αριθμητικού συστήματος. Οι μιγαδικοί αριθμοί, ιδιαίτερα οι *φανταστικοί αριθμοί*, ακούγονται εξωτικοί, μυστήριοι, ψεύτικοι, και ίσως 'άχρηστοι'. Αυτές οι απόψεις κυρίως προέρχονται από την καινοτομία που έφεραν, και από το γεγονός ότι δεν είμαστε από μικροί εξοικειωμένοι μαζί τους, παρά από την υποτιθέμενη 'μη ύπαρξή' τους. Οι μαθηματικοί τους αποκάλεσαν απελώς 'φανταστικούς', μια ονομασία που αμεσα προκαταλαμβάνει την αντίληψη. Αν αυτοί οι αριθμοί είχαν ονομαστεί διαφορετικά, θα είχαν απομυθοποιηθεί πολύ καιρό πριν, όπως οι άρρητοι αριθμοί ή οι αρνητικοί αριθμοί.

Πολλές μάταιες προσπάθειες έχουν γίνει για να δωθεί ένα φυσικό νόημα στους μιγαδικούς αριθμούς. Όμως, αν το σκεφτεί κανείς, αυτή η προσπάθεια είναι μη αναγκαία. Στα μαθηματικά, μπορούμε να δώσουμε σε σύμβολα η πράξεις οποιο νόημα επιθυμούμε, αρκεί να τηρούμε μια εσωτερική συνέπεια. Μια πιο υγιής προσέγγιση θα ήταν να ορίσουμε ένα σύμβολο  $i$  (με όποια άλλη σημασία πλην του 'φανταστικού'), που έχει την ιδιότητα  $i^2 = -1$ . Η ιστορία των μαθηματικών βρίθει περιπτώσεων που ολόκληρες οντότητες βρισκόνταν σε απέχθεια, ώσπου η εξοικείωση μαζί τους τις έκανε αποδεκτές. Όπως για παράδειγμα, οι αρνητικοί αριθμοί: η αποδοχή των αρνητικών αριθμών έκανε εφικτή τη λύση εξισώσεων όπως η  $x + 5 = 0$ , που ως τότε δεν είχε λύση. Έτσι, το αριθμητικό σύστημα γενικεύθηκε ώστε να περιλαμβάνει και τους αρνητικούς αριθμούς. Όμως, εξισώσεις της μορφής  $x^2 + 1 = 0 \leftrightarrow x^2 =$

$-1$  εξακολουθούσαν να μην έχουν λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Έτσι, ήταν αναγκαίο να οριστεί ένα νέο είδος αριθμού, του οποίου του τετράγωνο να είναι ίσο με  $-1$ .

Τον καιρό του Καρτέσιου και του Νεύτωνα<sup>1</sup>, οι φανταστικοί αριθμοί έγιναν τμήμα του αριθμητικού συστήματος, αλλά ακόμη θεωρούνταν ως αλγεβρικό 'κατασκευάσμα'. Ο Ελβετός μαθηματικός Leonard Euler<sup>2</sup> εισήγαγε τη σημειογραφία  $i$  (από τη λέξη imaginary), το 1777. Οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί χρησιμοποιούν το  $j$  αντί του  $i$ , για να μην υπάρχει συγχυση με το  $i$  που γι' αυτούς συμβολίζει την ηλεκτρική ένταση. Έτσι

$$j^2 = -1 \quad (\text{A'.1})$$

και

$$\sqrt{-1} = \pm j \quad (\text{A'.2})$$

Ενάντια στην κοινή αντίληψη, δεν ήταν η λύση της εξίσωσης  $x^2+1=0$  που έκανε τους φανταστικούς αριθμούς αποδεκτούς από τους τότε μαθηματικούς. Θα μπορούσαν να απορρίψουν το  $\sqrt{-1}$  ως ανοησία όταν εμφανίστηκε ως λύση της  $x^2+1=0$ , απλώς επειδή η εξίσωση δεν έχει πραγματική λύση. Όμως, το 1545, ο G. Cardano δημοσίευσε την Ars Magna - The Great Art, που θεωρείται η πιο σημαντική αλγεβρική εργασία της Αναγέννησης. Σε αυτό το βιβλίο, έδωσε μια μέθοδο για τη λύση της γενικής κυβικής εξίσωσης, στην οποία σε ένα ενδιάμεσο βήμα, εμφανιζόταν ένας αρνητικός αριθμός σε ρίζα. Σύμφωνα με τη μέθοδο του, η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (\text{A'.3})$$

δίνεται από

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \quad (\text{A'.4})$$

Για παραδειγμα, για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης  $x^3 + 6x - 20 = 0$ , θέτουμε  $a = 6, b = -20$  και έχουμε

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt[3]{20.392} = \sqrt[3]{0.392} = 2 \quad (\text{A'.5})$$

Όταν όμως ο Cardano προσπάθησε να λύσει την εξίσωση

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad (\text{A'.6})$$

με τη μέθοδό του, η λύση του ήταν

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (\text{A'.7})$$

Ήττα! :-) Τι θα κάνατε στη θέση του αν ήσασταν στο 1545; Εκείνες τις μέρες, ακόμα και οι αρνητικοί

<sup>1</sup>Οι άνθρωποι φυσικά λέγονταν Descartes και Newton, και ποτέ δεν κατάλαβα γιατί τους 'ελληνοποιήσαμε' με αυτά τα περίεργα ονόματα... τέλοσπάντων...

<sup>2</sup>Αυτός πως μας ξέφυγε και δεν τον κάναμε Οϊλερίδη ή Οϊλεράκη :-P

αριθμοί αντιμετωπίζονταν με καχυποψία, πόσο μάλλον μια τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού! :-) Βέβαια, σήμερα ξέρουμε ότι

$$(2 \pm j)^3 = 2 \pm j11 = 2 \pm \sqrt{-121} \quad (\text{A}'8)$$

Έτσι, η μέθοδος του Cardano δίνει

$$x = (2 + j) + (2 - j) = 4 \quad (\text{A}'9)$$

Ο Cardano προσπάθησε με μισή καρδιά :-) να εξηγήσει την παρουσία του  $\sqrt{-121}$  αλλά τελικά απέρριψε το όλο εγχείρημα ως “τόσο λεπτό όσο και άχρηστο”.

Άλλοι μαθηματικοί, όπως ο R. Bombelli και ο K. F. Gauss (ο οποίος και απέδειξε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας – ότι δηλαδή κάθε εξίσωση  $n$  τάξης έχει ακριβώς  $n$  λύσεις) έπεισαν τη μαθηματική κοινότητα ότι οι μιγαδικοί αριθμοί (όρο που εισήγαγε ο Gauss) έχουν σημασία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Φυσικά, κάθε πρόβλημα του πραγματικού κόσμου πρέπει να ξεκινά με πραγματικούς αριθμούς και να τελειώνει με πραγματικούς αριθμούς. Όμως, η πορεία της λύσης μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά με τη χρήση των μιγαδικών αριθμών ως ενδιάμεσο βήμα. Ασφαλώς, μπορεί κανείς να λύσει όλα τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου με άλλες μεθόδους, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά πραγματικούς αριθμούς, αλλά μια τέτοια διαδικασία θα αύξανε τον κόπο του χωρίς να είναι πραγματικά απαραίτητο - γι' αυτό και μας απασχολούν, γιατί μας διευκολύνουν :-).

## A'.2 Άλγεβρα Μιγαδικών Αριθμών

Ένας μιγαδικός αριθμός  $(a, b)$  ή  $a+jb$ , μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά με ένα σημείο του οποίου οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι  $(a, b)$  στο μιγαδικό επίπεδο. Συμβολίζουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με το σύμβολο  $z$ , έτσι ώστε  $z = a + jb$ . Οι αριθμοί  $a$  και  $b$ , η τετημημένη και η τεταγμένη αντίστοιχα, ονομάζονται *πραγματικό* και *φανταστικό* μέρος, αντίστοιχα, του  $z$ . Επίσης, συνήθως συμβολίζονται ως

$$\Re\{z\} = a, \quad \Im\{z\} = b \quad (\text{A}'10)$$

Προσέξτε ότι στο μιγαδικό επίπεδο όλοι οι πραγματικοί αριθμοί βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, ενώ όλοι οι φανταστικοί βρίσκονται στον κατακόρυφο άξονα.

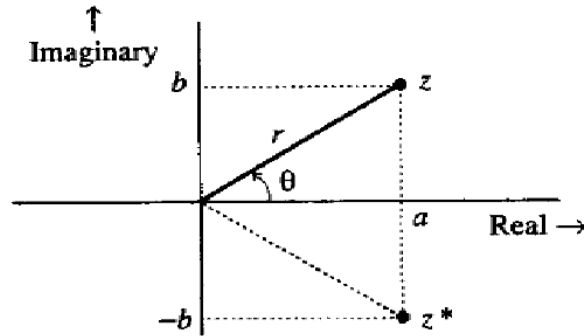
Μια ΠΟΛΥ χρήσιμη αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών είναι η *πολική μορφή*. Αν  $(r, \theta)$  είναι οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου  $z = a + jb$ , τότε

$$a = r \cos(\theta), \quad b = r \sin(\theta) \quad (\text{A}'11)$$

και

$$z = a + jb = r \cos(\theta) + jr \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \quad (\text{A}'12)$$

όπως στο σχήμα Α'.1



Σχήμα Α'.1: Αναπαράσταση αριθμού  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο

### Α'.2.1 Ο τύπος του Euler

Η περίφημη **σχέση του Euler**, που θα μας απασχολήσει ΠΟΛΥ στο μάθημα, ορίζεται ως

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \quad (\text{A'.13})$$

Η τρομερά χρήσιμη, όσο και περίεργη – σε πρώτη ανάγνωση – σχέση αποδεικνύεται αν αναπτύξουμε τους όρους της με σειρές Maclaurin:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \dots \quad (\text{A'.14})$$

$$= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (\text{A'.15})$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots \quad (\text{A'.16})$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (\text{A'.17})$$

Έτσι, εύκολα βλέπουμε ότι

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \quad (\text{A'.18})$$

και από την προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$z = a + jb = re^{j\theta} \quad (\text{A'.19})$$

Έτσι, βλέπουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί σε καρτεσιανή μορφή,  $a + jb$ , ή σε πολική μορφή,  $re^{j\theta}$ , με

$$a = r \cos(\theta), \quad b = r \sin(\theta) \quad (\text{A'.20})$$

και

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) \quad (\text{A'.21})$$

Παρατηρήστε ότι το  $r$  είναι η απόσταση του σημείου  $z$  από την αρχή των αξόνων. Γι' αυτό το λόγο, το  $r$  επίσης λέγεται *απόλυτη τιμή* ή *μέγεθος* του μιγαδικού αριθμού  $z$ , και συμβολίζεται με  $r = |z|$ . Όμοια, το  $\theta$  λέγεται *γωνία* ή *φάση* του  $z$  και συμβολίζεται με  $\angle z$ . Έτσι

$$|z| = r, \quad \angle z = \theta \quad (\text{A'.22})$$

και έτσι

$$z = |z|e^{j\angle z} \quad (\text{A'.23})$$

Επίσης

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta} = \frac{1}{|z|}e^{-j\angle z} \quad (\text{A'.24})$$

### Συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού

Ορίζουμε ως  $z^*$  το συζυγή του  $z = a + jb$  ως

$$z^* = a - jb = re^{-j\theta} = |z|e^{-j\angle z} \quad (\text{A'.25})$$

Η σχέση μεταξύ ενός μιγαδικού  $z$  και του συζυγούς του,  $z^*$ , φαίνεται στο σχήμα Α'.1. Παρατηρήστε ότι ο  $z^*$  είναι απλά η εικόνα του  $z$  με βάση τον οριζόντιο άξονα. Έτσι, για να βρούμε το συζυγή ενός οποιουδήποτε μιγαδικού, απλά πρέπει να αντικαταστήσουμε το  $j$  με το  $-j$  – που ισοδυναμεί με αλλαγή του προσήμου της φάσης του. Πολύ χρησιμες ιδιότητες υπάρχουν μεταξύ του αθροίσματος ενός μιγαδικού και του συζυγούς του, καθώς και το γινόμενο τους:

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\Re\{z\} \quad (\text{A'.26})$$

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2 = r^2 \quad (\text{A'.27})$$

### Α'.2.2 Κατανόηση μερικών χρήσιμων ιδιοτήτων

Στο μιγαδικό επίπεδο, το  $re^{j\theta}$  αναπαριστά ένα σημείο σε απόσταση  $r$  από το κέντρο των αξόνων και υπό γωνία  $\theta$  με τον οριζόντιο άξονα. Για παραδειγμα, ο αριθμός  $-1$  είναι σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων και έχει γωνία  $\pi$  ή  $\pi i$  (για την ακρίβεια, έχει γωνία κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\pm\pi$ ). Έτσι

$$1e^{j\pm\pi} = -1 \quad (\text{A'.28})$$

Γενικότερα,

$$e^{\pm jn\pi} = -1, \quad n \text{ περιττος ακέραιος} \quad (\text{A'.29})$$

Ο αριθμός 1 απ' την άλλη μεριά, βρίσκεται επίσης σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων, αλλά υπό γωνία  $2\pi$  (για την ακρίβεια, υπό γωνία  $\pm 2n\pi$ , για κάθε ακέραιο  $n$ ). Έτσι,

$$e^{\pm j2n\pi} = 1, \quad n \text{ ακέραιος} \quad (\text{A}'30)$$

Ο αριθμός  $j$  είναι σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων και υπό γωνία  $\pi/2$ . Έτσι,

$$e^{j\pi/2} = j \quad (\text{A}'31)$$

Όμοια

$$e^{-j\pi/2} = -j \quad (\text{A}'32)$$

και άρα

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j \quad (\text{A}'33)$$

Για την ακρίβεια,

$$e^{\pm jn\pi/2} = \pm j, \quad n = 1, 5, 9, 13, \dots \quad (\text{A}'34)$$

και

$$e^{\pm jn\pi/2} = \mp j, \quad n = 3, 7, 11, 15, \dots \quad (\text{A}'35)$$

Τα αποτελέσματα αυτά συνοφίζονται στον Πίνακα Α'.1.

Πίνακας Χρήσιμων τιμών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων		
$r$	$\theta$	$re^{j\theta}$
1	0	$e^{j0} = 1$
1	$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
1	$\pm n\pi$	$e^{\pm jn\pi} = -1, n$ περιττός
1	$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
1	$\pm 2n\pi$	$e^{\pm j2n\pi} = 1, n$ ακέραιος
1	$\pm\pi/2$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$
1	$\pm n\pi/2$	$e^{\pm jn\pi/2} = \pm j, n = 1, 5, 9, 13, \dots$
1	$\pm n\pi/2$	$e^{\pm jn\pi/2} = \mp j, n = 3, 7, 11, 15, \dots$

Πίνακας Α'.1: Πίνακας Χρήσιμων τιμών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων

### Α'.2.3 Αριθμητικές Πράξεις, Δυνάμεις, και Ρίζες Μιγαδικών Αριθμών

Για να κάνουμε πρόσθεση και αφαίρεση με μιγαδικούς αριθμούς, οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι σε καρτεσιανή μορφή. Έτσι, αν

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + j4 = 5e^{j53.1^\circ} \\ z_2 &= 2 + j3 = \sqrt{13}e^{j56.3^\circ} \end{aligned}$$



θα έχουμε

$$z_1 + z_2 = (3 + j4) + (2 + j3) = 5 + j7 \quad (\text{A'.36})$$

Αν οι αριθμοί μας δίνονταν στην πολική τους μορφή, θα έπρεπε να κάνουμε τη μετατροπή σε καρτεσιανή για να κάνουμε τις πράξεις (πρόσθεση ή αφαίρεση). Σε περίπτωση όμως πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης, η πράξη μπορεί να γίνει και με τις δυο μορφές, με πολύ βολικότερη την πολική. Δείτε:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{A'.37})$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{A'.38})$$

Επιπλέον,

$$z^n = (r e^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta} \quad (\text{A'.39})$$

και

$$z^{1/n} = (r e^{j\theta})^{1/n} = r^{1/n} e^{j\theta/n} \quad (\text{A'.40})$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι ο πολλαπλασιασμός, η διαίρεση, οι δυνάμεις και οι ρίζες, μπορούν να υπολογιστούν με καταπληκτική ευκολία όταν οι αριθμοί είναι σε πολική μορφή. Αν δεν το πιστεύετε, απλά δοκιμάστε να κάνετε τις πράξεις σε καρτεσιανή μορφή. :-)

### A'.3 Ημίτονα

Θεωρήστε το ημίτονο

$$f(t) = C \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (\text{A'.41})$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\cos(\phi) = \cos(\phi + 2\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{A'.42})$$

Έτσι, το  $\cos(\phi)$  επαναλαμβάνεται για κάθε αλλαγή μεγέθους  $2\pi$  στη γωνία  $\phi$ . Για το παραπάνω ημίτονο, η γωνία  $2\pi f_0 t + \theta$  αλλάζει κατά  $2\pi$  όταν το  $t$  αλλάζει κατά  $1/f_0$ . Ξεκάθαρα, το ημίτονο επαναλαμβάνεται κάθε  $1/f_0$  δευτερόλεπτα. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε  $f_0$  επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο. Αυτός ο αριθμός λέγεται **συχνότητα** του ημιτόνου, μετριέται σε Herz - Hz, και το διάστημα επανάληψης  $T_0$  δίνεται από τη σχέση

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (\text{A'.43})$$

και λέγεται **περίοδος**, και μετριέται σε δευτερόλεπτα (seconds). Επίσης, η ποσότητα  $C$  λέγεται πλάτος, και η  $\theta$  λέγεται φάση<sup>3</sup>. Ας θεωρήσουμε δυο ειδικές περιπτώσεις ημιτόνων με  $\theta = 0$  και  $\theta = \pi/2$ , όπως παρακάτω:

<sup>3</sup> Πολλές φορές στη βιβλιογραφία, υπάρχει σύγχυση όσον αφορά τη φάση, γιατί μερικές φορές αναφέρουμε ως φάση το συνολικό όρισμα του ημιτόνου, δηλ. το  $2\pi f_0 t + \theta$ , και ως  $\theta$  αναφέρουμε τη φάση μετατόπισης. Από δω και στο εξής όταν αναφέρουμε τη φάση, θα μιλάμε πάντα για τη φάση μετατόπισης  $\theta$ .

$$1. f(t) = C \cos(2\pi f_0 t)$$

$$2. f(t) = C \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = C \sin(2\pi f_0 t)$$

Η γωνία (ή φάση) μπορεί να εκφραστεί σε μοίρες ή σε ακτίνια (radians). Στα πλαίσια του μαθήματος, προτιμούμε την έκφραση σε ακτίνια. Επίσης, συχνά στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται η μεταβλητή  $\omega_0$  (γωνιακή συχνότητα, μετρείται σε rad/sec) για να εκφράσει την ποσότητα  $2\pi f_0$ :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (\text{A'.44})$$

Με αυτό το συμβολισμό, θα έχουμε

$$f(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (\text{A'.45})$$

και η περίοδος του ημιτόνου δίνεται από τη σχέση

$$T_0 = \frac{1}{\omega_0/2\pi} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{A'.46})$$

και άρα

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (\text{A'.47})$$

Στις σημειώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τη συχνότητα  $f_0$  σε Hz. Φυσικά μπορείτε να υιοθετήσετε οποια μορφή θέλετε, αρκεί να είστε συνεπείς. :-)

### Πρόσθεση ημιτόνων

Δυο ημίτονα που έχουν την ίδια συχνότητα αλλά διαφορετικές φάσεις προστίθενται και δημιουργούν ένα ημίτονο ίδιας συχνότητας. Ας το δείξουμε:

$$\begin{aligned} C \cos(2\pi f_0 t + \theta) &= C \cos(\theta) \cos(2\pi f_0 t) - C \sin(\theta) \sin(2\pi f_0 t) \\ &= a \cos(2\pi f_0 t) + b \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (\text{A'.48})$$

με

$$a = C \cos(\theta), \quad b = -C \sin(\theta) \quad (\text{A'.49})$$

Έτσι,

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{A'.50})$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{-b}{a} \right) \quad (\text{A'.51})$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι το  $C$  και το  $\theta$  αποτελούν το μέτρο και τη φάση, αντίστοιχα, του μιγαδικού αριθμού  $a - jb$ . Με άλλα λόγια,  $a - jb = Ce^{j\theta}$ . Άρα, για να βρούμε τα  $C, \theta$ , μετατρέπουμε το

$a - jb$  σε πολική μορφή, και το πλάτος και η φάση της πολικής μορφής είναι το  $C$  και το  $\theta$  αντίστοιχα. Συνοψίζοντας,

$$a \cos(2\pi f_0 t) + b \sin(2\pi f_0 t) = C \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (\text{A'.52})$$

με  $C$  και  $\theta$  που δίνονται όπως παραπάνω. Προσέξτε όμως! Ο υπολογισμός της  $\theta$  θέλει μια ιδιαίτερη προσοχή. Γιατί; Θυμηθείτε ότι για έναν μιγαδικό  $z = a + jb$ , η φάση του,  $\theta$ , δίνεται από τη σχέση

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\Im\{z\}}{\Re\{z\}} \right) \quad (\text{A'.53})$$

αφού

$$a = \Re\{z\}, \quad b = \Im\{z\} \quad (\text{A'.54})$$

Προφανώς το πρόσημο των  $a, b$  υποδηλώνει και σε ποιο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου βρίσκεται ο μιγαδικός αριθμός. Ένας μιγαδικός  $z_1$  με  $\Re\{z_1\} = 1/2, \Im\{z_1\} = 1/2$  βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, ενώ ένας άλλος,  $z_2$ , με  $\Re\{z_2\} = -1/2, \Im\{z_2\} = -1/2$  βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι αυτοί οι αριθμοί ανήκουν στην ευθεία  $y = x$ , άρα τέμνουν τα τεταρτημόρια στη μέση, οπότε η φάση τους θα είναι  $\theta_1 = \pi/4$  για τον  $z_1$ , ενώ η φάση του  $z_2$  θα είναι  $\theta_2 = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$ . Όλα αυτά, με εποπτικό τρόπο, εκμεταλλευόμενοι την “ιδιαίτερη” επιλογή των μιγαδικών αριθμών που έχουμε, και τις ελάχιστες γνώσεις τριγωνομετρίας. Ας πάμε τώρα να υπολογίσουμε τη γωνία  $\theta$  με τον τύπο που γνωρίσαμε παραπάνω:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{1/2}{1/2} = \tan^{-1}(1) = \pi/4 \quad (\text{A'.55})$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{-1/2}{-1/2} = \tan^{-1}(1) = \theta_1!!! \quad (\text{A'.56})$$

που είναι προφανώς λάθος. Για τον παραπάνω λόγο, πρέπει πάντα να σημειώνουμε το τεταρτημόριο που ανήκει ο μιγαδικός αριθμός, ώστε να προσαρμόζουμε καταλληλα τους υπολογισμούς μας. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

#### Παράδειγμα:

Στις παρακάτω περιπτώσεις, εκφράστε το  $f(t)$ , ως συνάρτηση ενός μόνο συνημιτόνου.

1.  $f(t) = \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{3} \sin(2\pi f_0 t)$

2.  $f(t) = -3 \cos(2\pi f_0 t) + 4 \sin(2\pi f_0 t)$

1. Σε αυτήν την περίπτωση,  $a = 1, b = \sqrt{3}$ , και από τις σχέσεις που είδαμε μόλις πιο πάνω, θα είναι:

$$C = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1} = \pi/3 \quad (\text{A'.57})$$

Έτσι θα είναι

$$f(t) = 2 \cos(2\pi f_0 t + \pi/3) \quad (\text{A'.58})$$

2. Σε αυτήν την περίπτωση,  $a = -3, b = 4$ , και τότε

$$C = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \quad (\text{A'.59})$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-4}{-3} = -127^\circ \quad (\text{A'.60})$$

Παρατηρήστε ότι  $\tan^{-1} \frac{-4}{-3} \neq \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53.1^\circ$ . Έτσι

$$f(t) = 5 \cos(2\pi f_0 t - 127^\circ) \quad (\text{A'.61})$$

### Ημίτονα σε μορφή εκθετικών

Τα ημίτονα μπορούν να εκφραστούν με όρους εκθετικών με χρήση των τύπων του Euler:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (\text{A'.62})$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \quad (\text{A'.63})$$

Αντίστροφα, αυτές οι εξισώσεις γίνονται:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \quad (\text{A'.64})$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta) \quad (\text{A'.65})$$

## A'.4 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Σε αυτήν την παράγραφο, θα δούμε μερικά πράγματα σχετικά με την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα (Partial Fraction Expansion - PFE), που μας είναι χρήσιμη στο μετασχ. Laplace, αλλά και στη μελέτη σημάτων και συστημάτων γενικότερα. Όπως λέει και το όνομά της, η PFE διασπά μια ρητή συνάρτηση, με συνήθως υψηλής τάξης πολυώνυμα στον αριθμητή και στον παρονομαστή, σε απλά κλάσματα, με πολυώνυμα μικρής τάξης (1 ή 2) στον παρονομαστή.

Η μέθοδος που ακολουθούμε για την PFE είναι πολύ απλή, και απλά χρειάζεται τριβή για να τη συνηθίσετε. Υπάρχουν δυο συνήθειες περιπτώσεις PFE που συναντάμε στην Επεξεργ. Σήματος σχετικά με τη ρητή συνάρτηση που θέλουμε να απλουστεύσουμε.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται ΜΟΝΟΝ όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη της τάξης του πολυωνύμου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε PFE.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

1. Ο παρονομαστής έχει απλές ρίζες
2. Ο παρονομαστής έχει μια ή περισσότερες ρίζες πολλαπλότητας  $r$

### Α'.4.1 Απλές ρίζες

Θεωρούμε πρώτα την πιο απλή περίπτωση, όπου η συνάρτησή μας

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (\text{A'.66})$$

έχει απλές ρίζες στον παρονομαστή της,  $Q(x)$ . Θεωρήστε το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}, \quad m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_n)} \end{aligned} \quad (\text{A'.67})$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$F(x) = \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{k_n}{x - \rho_n} \quad (\text{A'.68})$$

Για να βρούμε τον συντελεστή  $k_i$ , πολλαπλασιάζουμε και τις δυο πλευρές της παραπάνω σχέσης με  $(x - \rho_1)$ , και έπειτα θέτουμε  $x = \rho_1$ . Άρα

$$(x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} = \left[ k_1 + \frac{k_2(x - \rho_1)}{x - \rho_2} + \frac{k_3(x - \rho_3)}{x - \rho_3} + \dots + \frac{k_n(x - \rho_1)}{x - \rho_n} \right] \Big|_{x=\rho_1} \quad (\text{A'.69})$$

Όλοι οι όροι στη δεξιά πλευρά απαλείφονται, εκτός του  $k_1$ . Άρα καταλήγουμε στο

$$k_1 = (x - \rho_1)F(x) \Big|_{x=\rho_1} \quad (\text{A'.70})$$

Παρόμοια, καταλήγουμε ότι

$$k_i = (x - \rho_i)F(x) \Big|_{x=\rho_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A'.71})$$

Η παραπάνω διαδικασία δουλεύει ανεξάρτητα αν οι ρίζες είναι πραγματικές ή μιγαδικές.

### Α'.4.2 Ρίζες πολλαπλότητας $r$

Αν η συνάρτηση  $F(x)$  έχει πολλαπλή ρίζα, με πολλαπλότητα  $r$ , στον παρονομαστή, τότε θα είναι της μορφής

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x - \lambda)^r (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3) \dots (x - \rho_j)} \quad (\text{A'.72})$$

Το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για αυτή τη συνάρτηση δίνεται ως

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{d_0}{(x - \lambda)^r} + \frac{d_1}{(x - \lambda)^{r-1}} + \dots + \frac{d_{r-1}}{(x - \lambda)} \\ &+ \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \dots + \frac{k_j}{x - \rho_j} \end{aligned} \quad (\text{A'.73})$$

Οι συντελεστές  $k_i$  αντιστοιχούν στις ρίζες χωρίς πολλαπλότητα και υπολογίζονται όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Για να βρούμε τους συντελεστές  $d_0, \dots, d_{r-1}$ , πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με  $(x - \lambda)^r$ :

$$\begin{aligned} (x - \lambda)^r F(x) &= d_0 + d_1(x - \lambda) + d_2(x - \lambda)^2 + \dots + d_{r-1}(x - \lambda)^{r-1} + \\ &+ k_1 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_1} + k_2 \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_2} + \dots + k_n \frac{(x - \lambda)^r}{x - \rho_n} \end{aligned} \quad (\text{A'.74})$$

Θέτοντας  $x = \lambda$  και στα δυο μέλη, έχουμε

$$(x - \lambda)^r F(x) \Big|_{x=\lambda} = d_0 \quad (\text{A'.75})$$

Άρα το  $d_0$  υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο  $(x - \lambda)^r$  στην  $F(x)$ , και θέτοντας  $x = \lambda$  στη σχέση που απομένει. Αν παραγωγίσουμε τη σχέση A'.74 ως προς  $x$ , το δεξιό μέλος καταλήγει στο  $d_1 +$  όροι που περιέχουν το  $(x - \lambda)$  στους αριθμητές. Θέτοντας  $x = \lambda$  και στα δυο μέλη, έχουμε

$$\frac{d}{dx} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} = d_1 \quad (\text{A'.76})$$

Άρα, το  $d_1$  υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο  $(x - \lambda)^r$  από τον όρο  $F(x)$ , παραγωγίζοντας την υπόλοιπη έκφραση ως προς  $x$  και μετά θέτοντας  $x = \lambda$ . Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, έχουμε ότι

$$d_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} [(x - \lambda)^r F(x)] \Big|_{x=\lambda} \quad (\text{A'.77})$$

Άρα ο συντελεστής  $d_j$  υπολογίζεται “κρύβοντας” τον όρο  $(x - \lambda)^r$  στο  $F(x)$ , υπολογίζοντας μετά την  $j$ -οστή παράγωγο την έκφραση που απομένει, διαιρώντας με  $j!$ , και τέλος θέτοντας  $x = \lambda$ .

## Α'.5 Χρήσιμο Τυπολόγιο

### Α'.5.1 Κανόνας του De L' Hospital

Αν  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  είναι απροσδιόριστης μορφής  $\frac{0}{0}$  ή  $\frac{\infty}{\infty}$ , τότε

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{A'.78})$$

### Α'.5.2 Σειρές Taylor - Maclaurin

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \quad (\text{A'.79})$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \quad (\text{A'.80})$$

### Α'.5.3 Δυναμοσειρές

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (\text{A'.81})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\text{A'.82})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad (\text{A'.83})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots, \quad x^2 < \pi^2/4 \quad (\text{A'.84})$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots, \quad x^2 < \pi^2/4 \quad (\text{A'.85})$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + \binom{n}{k} x^k + \dots + x^n \quad (\text{A'.86})$$

$$\approx 1 + nx, \quad |x| \ll 1 \quad (\text{A'.87})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1 \quad (\text{A'.88})$$

## Α'.5.4 Μιγαδικοί Αριθμοί

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j \quad (\text{A'.89})$$

$$e^{\pm jn\pi} = (-1)^n \quad (\text{A'.90})$$

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j \sin(\theta) \quad (\text{A'.91})$$

$$a + jb = re^{j\theta}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{A'.92})$$

$$(re^{j\theta})^k = r^k e^{jk\theta} \quad (\text{A'.93})$$

$$(r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{A'.94})$$

## Α'.5.5 Παραγωγή

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x)) \quad (\text{A'.95})$$

$$(fg(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{A'.96})$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad (\text{A'.97})$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (\text{A'.98})$$

$$(\ln(ax))' = \frac{a}{x} \quad (\text{A'.99})$$

$$(\log(ax))' = \frac{a \log(e)}{x} \quad (\text{A'.100})$$

$$(e^{bx})' = be^{bx} \quad (\text{A'.101})$$

$$(a^{bx})' = b(\ln a)a^{bx} \quad (\text{A'.102})$$

$$(\sin(ax))' = a \cos(ax) \quad (\text{A'.103})$$

$$(\cos(ax))' = -a \sin(ax) \quad (\text{A'.104})$$

$$(\tan(ax))' = \frac{a}{\cos^2(ax)} \quad (\text{A'.105})$$

$$(\sin^{-1}(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}} \quad (\text{A'.106})$$

$$(\cos^{-1}(ax))' = -\frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}} \quad (\text{A'.107})$$

$$(\tan^{-1}(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2x^2}} \quad (\text{A'.108})$$



## Α'.5.6 Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$$e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \sin(x) \quad (\text{A'.109})$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \quad (\text{A'.110})$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) \quad (\text{A'.111})$$

$$\cos(x \pm \pi/2) = \mp \sin(x) \quad (\text{A'.112})$$

$$\sin(x \pm \pi/2) = \pm \cos(x) \quad (\text{A'.113})$$

$$2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x) \quad (\text{A'.114})$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (\text{A'.115})$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \quad (\text{A'.116})$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \quad (\text{A'.117})$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad (\text{A'.118})$$

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3 \cos(x) + \cos(3x)) \quad (\text{A'.119})$$

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}(3 \sin(x) - \sin(3x)) \quad (\text{A'.120})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad (\text{A'.121})$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \quad (\text{A'.122})$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)} \quad (\text{A'.123})$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \quad (\text{A'.124})$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \quad (\text{A'.125})$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)) \quad (\text{A'.126})$$

$$a \cos(x) + b \sin(x) = C \cos(x + \theta), \quad C = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{-b}{a} \right) \quad (\text{A'.127})$$

## Α'.5.7 Αόριστα Ολοκληρώματα

$$\int x dy = xy - \int y dx \quad (\text{A'.128})$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (\text{A'.129})$$

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) \quad (\text{A'.130})$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a} \sin(ax) \quad (\text{A'.131})$$

$$\int \sin^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} \quad (\text{A'.132})$$

$$\int \cos^2(ax)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} \quad (\text{A'.133})$$

$$\int x \sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax \cos(ax)) \quad (\text{A'.134})$$

$$\int x \cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax \sin(ax)) \quad (\text{A'.135})$$

$$\int x^2 \sin(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax \sin(ax) + 2 \cos(ax) - a^2 x^2 \cos(ax)) \quad (\text{A'.136})$$

$$\int x^2 \cos(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos(ax) - 2 \sin(ax) + a^2 x^2 \sin(ax)) \quad (\text{A'.137})$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx)dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2 \quad (\text{A'.138})$$

$$\int \sin(ax) \cos(bx)dx = -\left[ \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} \right], \quad a^2 \neq b^2 \quad (\text{A'.139})$$

$$\int \cos(ax) \cos(bx)dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2 \quad (\text{A'.140})$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (\text{A'.141})$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{A'.142})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{A'.143})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{A'.144})$$

$$\int e^{ax} \cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) \quad (\text{A'.145})$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (\text{A'.146})$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) \quad (\text{A'.147})$$

## Α'.6 Ασκήσεις

1. Για  $z_1 = 2e^{\pi/4}$ ,  $z_2 = 8e^{j\pi/3}$ , βρείτε τα α)  $2z_1 - z_2$ , β)  $\frac{1}{z_1}$ , γ)  $\frac{z_1}{z_2^2}$ , δ)  $\sqrt[3]{z_2}$ .

2. Θεωρήστε τη συνάρτηση  $X(f) = \frac{2+j2\pi f}{3+j8\pi f}$ .

(α') Εκφράστε το  $X(f)$  σε καρτεσιανή μορφή, και βρείτε το φανταστικό και το πραγματικό του μέρους.

(β') Εκφράστε το  $X(f)$  σε πολική μορφή, και βρείτε το μέτρο  $|X(f)|$  και τη φάση του,  $\angle X(f)$ .