Ασκήσεις με τον Μετασχηματισμό Laplace - HY215

24 Μαΐου 2014

1 Ασκήσεις

1. **Ένα σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από τη σχέση**

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s+2}}{\mathbf{s^2 - 2s - 3}}$$

(α′) **Να σχεδιάσετε τους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο**

(β′) **Για όλα τα δυνατά πεδία σύγκλισης, βρείτε την μοναδιαία απόκριση του συστήματος, $\mathbf{h(t)}$.**

(γ′) **Σε ποιά περίπτωση υπολογίζεται ο μετασχ. Fourier· Υπολογίστε τον.**

(δ′) **Αν το σύστημα ειναι αιτιατό να βρεθεί η μοναδιαία απόκριση $h(t)$**

(ε′) **Να σχεδιαστει το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του σήματος $e^{-3t}h(t)$**

(ϛ′) **Αν στην είσοδο του παραπάνω συστήματος εφαρμοστεί σήμα $e^{-t}\epsilon t$, να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(t)$**

Λύση:
Είναι

(α′) Οι πόλοι του παρονομαστή είναι οι $s_1 = 3, s_2 = -1$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε. Ο αριθμητης του κλασματος μηδενίζεται για $s = -2$. Επομένως έχουμε δύο πόλους και ένα μηδενικό και η σχεδίαση τους φαίνεται στο Σχ. 1.

(β′) Για την εύρεση της μοναδιαίας απόκρισης, $h(t)$ του συστήματος για τα διάφορα πεδία σύγκλισης, πρέπει να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

Τα A, B δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A &= X(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{s+2}{s+1}\Big|_{s=3} = \frac{5}{4} \\ B &= X(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s-3}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$H(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{s-3}$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης τα

$$ROC = \begin{cases} \Re\{s\} < -1, \\ \Re\{s\} > 3, \\ -1 < \Re\{s\} < 3 \end{cases}$$

- Για την περίπτωση $\Re\{s\} < -1$, (Σχ. 1, κόκκινη περιοχή) χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $\sigma < -1$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} < -1\}$. Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}e^{-t}u(-t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}<-1} \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}<3} \frac{5}{4}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$h(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(-t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \tag{1}$$

- Για την περίπτωση $\Re\{s\} > 3$, (Σχ. 1, μπλε περιοχή) χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $\sigma > 3$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} > 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$. Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}>-1} \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} \\ \frac{5}{4}e^{3t}u(t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}>3} \frac{5}{4}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$h(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{5}{4}e^{3t}u(t) \tag{2}$$

- Για την περίπτωση $-1 < \Re\{s\} < 3$ (Σχ. 1, πράσινη περιοχή), χρειαζόμαστε η τομή των πεδίων σύγκλισης των δυο σημάτων να μας δίνει το ημιεπίπεδο $-1 < \sigma < 3$. Αυτό γίνεται μόνον αν $\{\Re\{s\} < 3\} \cap \{\Re\{s\} > -1\}$. Γι' αυτά τα δυο πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

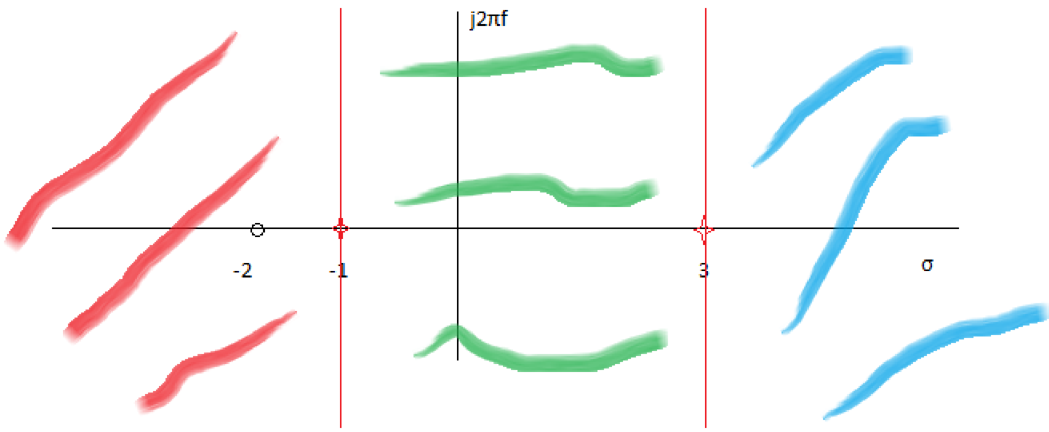
$$\begin{aligned} \frac{1}{4}e^{-t}u(t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}>-1} \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} \\ -\frac{5}{4}e^{3t}u(-t) &\xrightarrow[L]{\Re\{s\}<3} \frac{5}{4}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι το

$$h(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{5}{4}e^{3t}u(-t) \tag{3}$$

(γ') Ο μετασχηματισμός Fourier υπολογίζεται μόνο στην περίπτωση $ROC = -1 < \Re\{s\} < 3$, γιατί μόνο σε αυτό το πεδίο περιλαμβάνεται ο άξονας των φανταστικών, $\sigma = 0$.
Άρα για $\sigma = 0$, θα έχουμε

$$H(s)\Big|_{\sigma=0} = \frac{2(j\pi f + 1)}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f - 3)} \tag{4}$$



Σχήμα 1: Πεδία Σύγκλισης της H(s)

(δ΄) Εφοσον το σύστημα ειναι αιτιατό, η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα ειναι το δεξί ημιεπίπεδο όπως αυτο ορίζεται απο τον δεξιότερο πόλο. Επομένως ROC: $Re\{s\} > 3$ και η μοναδιαία απόκριση είναι $h(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}u(t) + \frac{5}{4}e^{3t}u(t)$

(ε΄) Το σήμα $z(t) = e^{-3t}h(t)$ βάσει ιδιότητας του μετασχηματισμού Laplace έχει συνάρτηση μεταφοράς $Z(s) = H(s+3)$. Επομενως, το πεδίο σύγκλισης του ROC του H(s) μεταφέρεται αριστερά κατα 3 όπως φαίνεται στο σχήμα Σχ. 2.

(ϛ΄) Αν στην είσοδο του παραπάνω συστήματος εφαρμοστεί σήμα $e^{-t}u(t)$, το σήμα εξόδου δίνεται απο την σύνελιξη του σήματος εισόδου με την μοναδιαία απόκριση του συστήματος: $y(t) = e^{-t}u(t) * h(t)$. Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $Y(s) = L\{e^{-t}u(t)\}H(s)$. Άρα θα έχουμε:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{s+1}$$

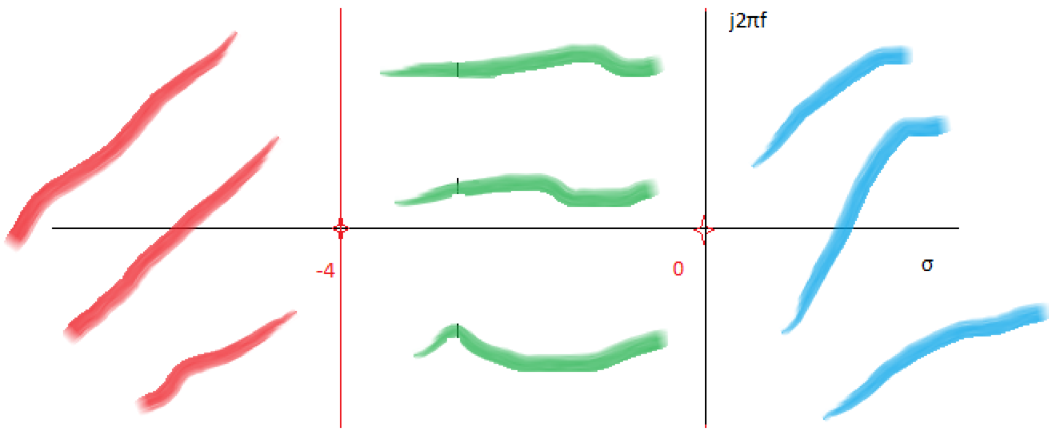
Εξαιτίας του διπλού πόλου $s = -1$ (είναι σε δεύτερη δύναμη) έχουμε ένα επιπλέον όρο Γ. Τα A, B, G δίνονται από

$$\begin{aligned} A &= Y(s)(s-3)\Big|_{s=3} = \frac{s+2}{(s+1)^2}\Big|_{s=3} = \frac{5}{16} \\ B &= Y(s)(s+1)^2\Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s-3}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4} \\ \Gamma &= \frac{d}{ds}\{Y(s)(s+1)^2\}\Big|_{s=-1} = \frac{(s+2)'(s-3)-(s+2)(s-3)'}{(s-3)^2}\Big|_{s=-1} = -\frac{5}{16} \end{aligned}$$

Επομένως

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{5}{16}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{5}{16}\frac{1}{s+1}$$

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ειναι έυκολη υπόθεση, αρκεί να πάρετε και πάλι περιπτώσεις για το ROC. Προσοχη χρειαζεται στο ότι απο τα πιθανα πεδια σύγκλισης πρέπει να απορρίψεται το πεδίο σύγκλισης $Re\{s\} < -1$ διότι το σήμα που μπαίνει ως είσοδο ειναι το $e^{-t}u(t)$ το οποιο έχει μετασχηματισμό Laplace $\frac{1}{s+1}$ ΚΑΙ ROC: $Re\{s\} < -1$



Σχήμα 2: Πεδία Σύγκλισης της Z(s)

2. **Υπολογίστε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης**

$$\mathbf{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = x(t)}$$

με αρχικές συνθήκες $\mathbf{y(0^-) = 0, \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} = -2}$ **και** $\mathbf{x(t) = u(t)}$

<u>Λύση:</u>
Παίρνουμε το μετασχ. Laplace των δυο μερών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}
Ł\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\} + 7Ł\{\frac{dy(t)}{dt}\} + 12Ł\{y(t)\} &= Ł\{x(t)\} \\
s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0) + 7sY(s) - 7y(0^-) + 12Y(s) &= X(s) \\
s^2Y(s) - (-2) + 7sY(s) + 12Y(s) &= X(s) \\
Y(s)(s^2 + 7s + 12) &= X(s) - 2 \\
Y(s) &= \frac{1-2s}{s(s^2+7s+12)} \\
Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+3}
\end{aligned} \tag{5}$$

Θα είναι

$$\begin{aligned}
A &= Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{12} \\
B &= Y(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = -9 \\
C &= Y(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = 7
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{12}\frac{1}{s} - 9\frac{1}{s+4} + 7\frac{1}{s+3} \rightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{12}u(t) - 9e^{-4t}u(t) + 7e^{-3t}u(t) \\ &= \Big(\frac{1}{12} - 9e^{-4t} + 7e^{-3t}\Big)u(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Παρατήρηση:
Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$Ł\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-)$$

3. **Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace της**

$$\mathbf{X(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+10}}$$

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3s+2}{(s-(-1+3j))(s-(-1-3j))} \\ &= \frac{A}{s-(-1+3j)} + \frac{A^*}{s-(-1-3j)} \end{aligned}$$

Τα A, A^* δίνονται από

$$\begin{aligned} A &= X(s)(s-(-1+3j))\Big|_{s=-1+3j} = \frac{3s+2}{s-(-1-3j)}\Big|_{s=-1+3j} = \frac{3}{2} + j\frac{1}{6} \\ A^* &= \frac{3}{2} - j\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Οπότε

$$X(s) = \Big(\frac{3}{2} + j\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{s-(-1+3j)} + \Big(\frac{3}{2} - j\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{s-(-1-3j)}$$

Οι πιθανοί πόλοι είναι οι $s_0 = -1-3j, s_1 = s_0^* = -1+3j$, οι οποίοι βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, $\sigma = -1$. Άρα τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $\Re\{s\} > -1, \Re\{s\} < -1$. Ανάλογα με αυτά τα πεδία σύγκλισης, θα έχουμε και τα αντίστοιχα $x(t)$. Βρείτε τα! :-)