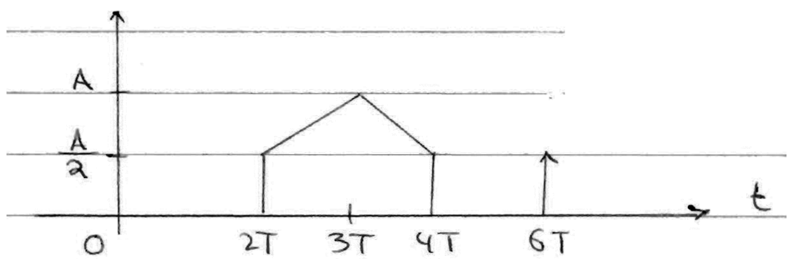
Σημειώσεις και παρατηρήσεις σχετικά με Σήματα και Ανάλυση Fourier - Ασκήσεις

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

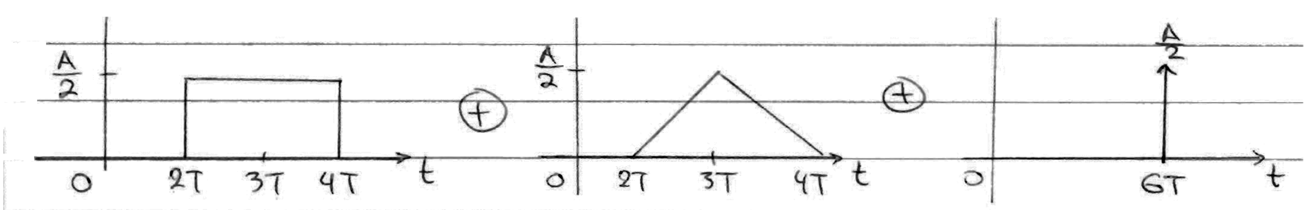
28 Μαρτίου 2014

1. **Βρείτε το μετασχ. Fourier του παρακάτω σήματος**



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 3.1

Λύση:
Μπορούμε να σπάσουμε το σήμα σε κάποια μικρότερα γνωστά μας σήματα. Ποιά θα είναι αυτά; Θα είναι ένα τετραγωνικό παράθυρο, διάρκειας $2T$, με κέντρο το $t_0 = 3T$, ένα τριγωνικό παράθυρο διάρκειας $2T$, με κέντρο το $t_0 = 3T$, και μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση $t_0 = 6T$, όπως στο σχήμα 2. Για το πρώτο σήμα του σχήματος 2, θα έχουμε



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 3.1 - Σπασμένο σήμα

$$X_1(f) = \frac{A}{2} 2T sinc(2fT) e^{-j2\pi 3Tf}$$

για το δεύτερο, θα είναι

$$X_2(f) = \frac{A}{2} T sinc^2(fT) e^{-j2\pi 3Tf}$$

και για το τρίτο, θα είναι

$$X_3(f) = \frac{A}{2} e^{-j2\pi 6Tf}$$

Άρα συνολικά θα είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{A}{2} 2T sinc(2fT) e^{-j2\pi 3Tf} + \frac{A}{2} T sinc^2(fT) e^{-j2\pi 3Tf} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi 6Tf} \\ &= AT\Big(sinc(2fT) + \frac{1}{2} sinc^2(fT) + \frac{A}{2} e^{-j2\pi 3Tf}\Big) e^{-j2\pi 3T} \end{aligned} \tag{1}$$

2. **Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος**

$$\mathbf{x(t) = Arect\Big(\frac{t}{2T}\Big) * (\delta(t-5T) + \delta(t) + \delta(t+5T))}$$

Λύση:
Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= Arect\Big(\frac{t}{2T}\Big) * (\delta(t-5T) + \delta(t) + \delta(t+5T)) \\ &= Arect\Big(\frac{t-5T}{2T}\Big) + Arect\Big(\frac{t}{2T}\Big) + Arect\Big(\frac{t+5T}{2T}\Big) \longleftrightarrow \\ X(f) &= 2ATsinc(2fT)e^{-j2\pi 5Tf} + 2ATsinc(2fT) + 2ATsinc(2fT)e^{j2\pi 5Tf} \\ &= 2ATsinc(2fT)(e^{-j2\pi 5Tf} + 1 + e^{j2\pi 5Tf}) \\ &= 2ATsinc(2fT)(1 + 2\cos(10\pi fT)) \end{aligned} \tag{2}$$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα που λέει *συνέλιξη στο χρόνο* $\Leftrightarrow$ *πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*. Τότε, θα είχαμε

$$\begin{aligned} X(f) &= F\{Arect\Big(\frac{t}{2T}\Big)\}F\{(\delta(t-5T) + \delta(t) + \delta(t+5T))\} \\ &= 2ATsinc(2fT)(e^{-j2\pi 5Tf} + 1 + e^{j2\pi 5Tf}) \\ &= 2ATsinc(2fT)(1 + \cos(10\pi fT)) \end{aligned} \tag{3}$$

3. **Να σχεδιάσετε το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = e^{-\alpha|t|},\ t \in \Re}$$

με $\mathbf{a > 0}$ και να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος. Επίσης, να υπολογίσετε το μέτρο και τη φάση του. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος

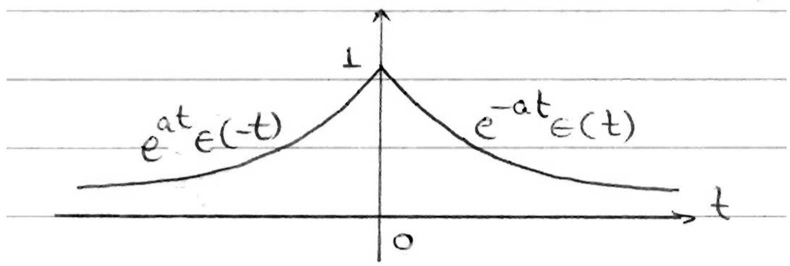
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x(t)dt}$$

Σε ποιές συχνότητες το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος;

Λύση:
Το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Το σήμα φαίνεται στο σχήμα 3 Είναι



Σχήμα 3: Σήμα Άσκησης 3.3

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f}e^{(a-j2\pi f)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-a-j2\pi f}e^{-(a+j2\pi f)t}\Big|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f}(1-0) + \frac{1}{-a-j2\pi f}(0-1) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2},\ a > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Παρατηρούμε ότι το $X(f)$ είναι πραγματικό σήμα, και θετικό για κάθε f. Άρα η φάση του είναι $\phi = 0$ και το μέτρο του είναι ο ίδιος ο μετασχηματισμός Fourier, δηλ.

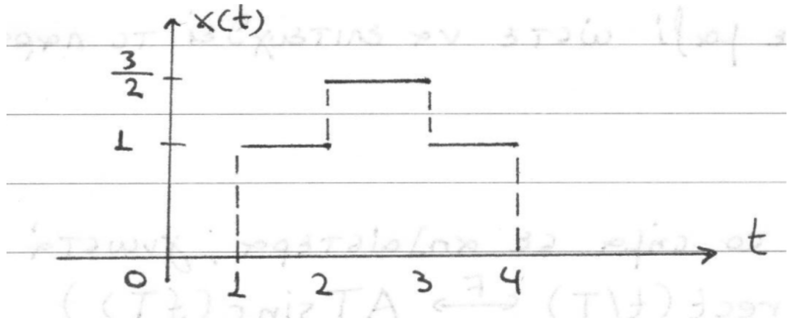
$$|X(f)| = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \text{ και } \angle X(f) = 0 \tag{5}$$

Επίσης

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(f)\Big|_{f=0} = X(0) = \frac{2}{a} \tag{6}$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε σε ποιές συχνότητες, τέλος, το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος. Λύνοντας απλά την εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned} |X(f)| = \frac{\frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{a} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} = \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow \quad 4\pi^2 f^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow \quad f = \pm\frac{a}{2\pi} \end{aligned} \tag{7}$$



Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 3.4

4. **Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος που φαίνεται στο σχήμα 4**

   Λύση:
   Για την εύρεση του μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$ που απεικονίζεται στο σχήμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε πολλούς τρόπους. Ας δούμε μερικούς...

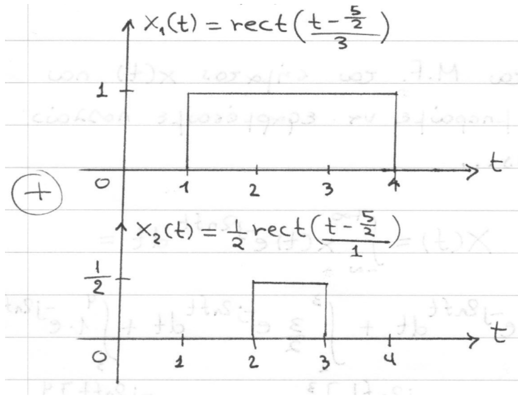
   (α΄) Με τον ορισμό:

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi f t}dt \\
&= \int_{1}^{2} 1e^{-j2\pi f t}dt + \int_{2}^{3} \frac{3}{2}e^{-j2\pi f t}dt + \int_{3}^{4} 1e^{-j2\pi f t}dt \\
&= -\frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi f t}\Big|_{1}^{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi f t}\Big|_{2}^{3} - \frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi f t}\Big|_{3}^{4} \\
&= \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j4\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi f}} + \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f}\frac{3}{2}e^{-j6\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}\frac{3}{2}e^{-j4\pi f} +} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j4\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j6\pi f}} \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j3\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) + \frac{3}{2}\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j5\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) + \\
&+ \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j7\pi f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j3\pi f}(-2j\sin(\pi f)) + \frac{3}{2}\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j5\pi f}(-2j\sin(\pi f)) + \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j7\pi f}(-2j\sin(\pi f)) \\
&= \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2}\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}e^{-j5\pi f} + \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}e^{-j7\pi f} \\
&= sinc(f)\Big(e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2}e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f}\Big) \qquad (8)
\end{aligned}$$

   Παρατηρήστε τους όρους που βγάλαμε κοινό παράγοντα ώστε να εμφανιστούν τα $\sin(\pi f)$. Με άγκιστρο είναι τα εκθετικά που χρησιμοποιήσαμε μαζί ώστε να το πετύχουμε αυτό.

   (β΄) Αναλύοντας το σήμα σε απλούστερα γνωστά σήματα. Το πιο απλό είναι η παρακάτω διάσπαση, που φαίνεται στο σχήμα 5. Έχουμε άρα

$$X_1(f) = 3sinc(3f)e^{-j2\pi 5f/2} = 3sinc(3f)e^{-j5\pi f}$$



Σχήμα 5: Διάσπαση Άσκησης 3.4 - δεύτερος τρόπος

και

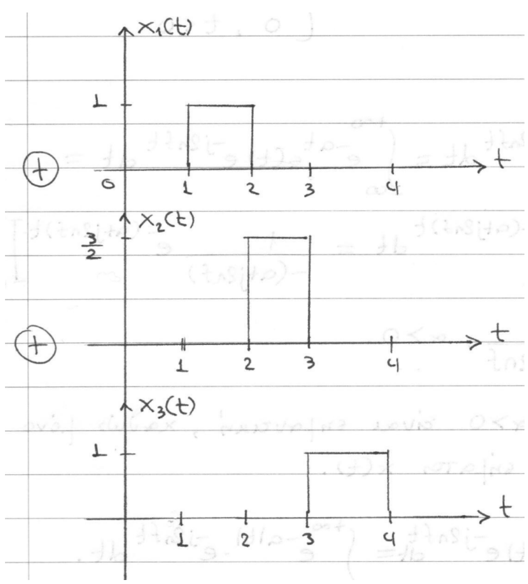
$$X_2(f) = \frac{1}{2} sinc(f) e^{-j2\pi 5f/2} = \frac{1}{2} sinc(f) e^{-j5\pi f}$$

Άρα το τελικό σήμα θα είναι το άθροισμα

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = e^{-j5\pi f} \Big(\frac{1}{2} sinc(f) + 3 sinc(3f) \Big)$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα μοιάζει διαφορετικό από αυτό του πρώτου τρόπου που ακολουθήσαμε, αλλά στην ουσία είναι το ίδιο σήμα. Αυτό μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με το MATLAB ή κάνοντας πράξεις στο αποτέλεσμα του πρώτου τρόπου.

(γ') Αναλύοντας το σήμα σε τρία σήματα, αντί για δύο, όμοια με το δεύτερο τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα 6. Όμοια λοιπόν, θα έχουμε

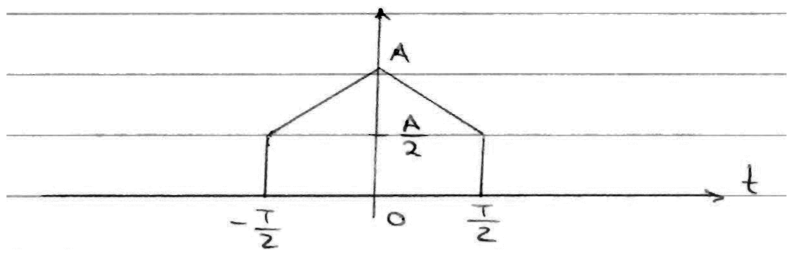


Σχήμα 6: Διάσπαση Άσκησης 3.4 - τρίτος τρόπος

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) + X_3(f) = sinc(f) \Big(e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2} e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f} \Big) \tag{9}$$

Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που προέκυψε με τον ορισμό, αλλά πολύ πιο εύκολα και σύντομα. :-) Υπάρχουν 1-2 τρόποι ακόμα που μπορείτε να σπάσετε το αρχικό σήμα σε απλούστερα. Χρησιμοποιήστε τη φαντασία σας! ;-)

5. **Να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier του σήματος στο σχήμα** 7.



Σχήμα 7: Σχήμα Άσκησης 3.5

Λύση:
Ο εύκολος τρόπος είναι να σπάσουμε το σήμα μας όπως στην Άσκηση 1. Κάντε το! :-) Επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμα είναι

$$X(f) = \frac{AT}{2}\Big(sinc(fT) + \frac{1}{2}sinc^2\Big(\frac{fT}{2}\Big)\Big) \tag{10}$$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης, η οποία σε περιπτώσεις που δεν μπορούμε να σπάσουμε το σήμα μας, μας λύνει τα χέρια. Η ιδιότητα θυμίζεται ότι είναι

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j2\pi f X(f) \tag{11}$$

Θα δουλέψουμε ως εξής: θα χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο του $x(t)$, θα βρούμε τον μετασχ. Fourier, και μέσω της σχέσης 11, θα βρούμε το $X(f)$. Στην προσπάθειά μας να παραγωγίσουμε το $x(t)$ έχοντας στο μυαλό μας την κλασική θεωρία της Ανάλυσης, θα συναντήσουμε δυσκολίες. Υπάρχουν σημεία στο σήμα όπου υπάρχουν ασυνέχειες. Τα σημεία αυτά είναι στις χρονικές στιγμές $t = \pm\frac{T}{2}$, όπου το σήμα αλλάζει ακαριαία τιμές. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, δεν ορίζεται παράγωγος στα σημεία αυτά. Όμως έχετε δει ότι

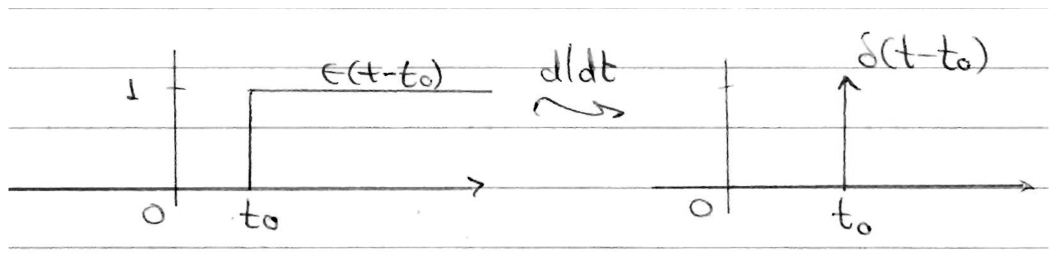
$$\frac{du(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0) \tag{12}$$

δηλ. ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης $u(t-t_0)$ είναι μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση $t = t_0$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίστηκε η παράγωγος μιας ασυνέχειας, όπως αυτή που έχει η βηματική συνάρτηση, με χρήση γενικευμένων συναρτήσεων, όπως είναι η συνάρτηση Δέλτα. Αυτή η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 8. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε σήμα περιέχει μια ασυνέχεια (ή και περισσότερες), μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός βηματικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, ο γνωστός μας τετραγωνικός παλμός

$$x(t) = Arect\Big(\frac{t}{T}\Big)$$

μπορεί να γραφεί ως

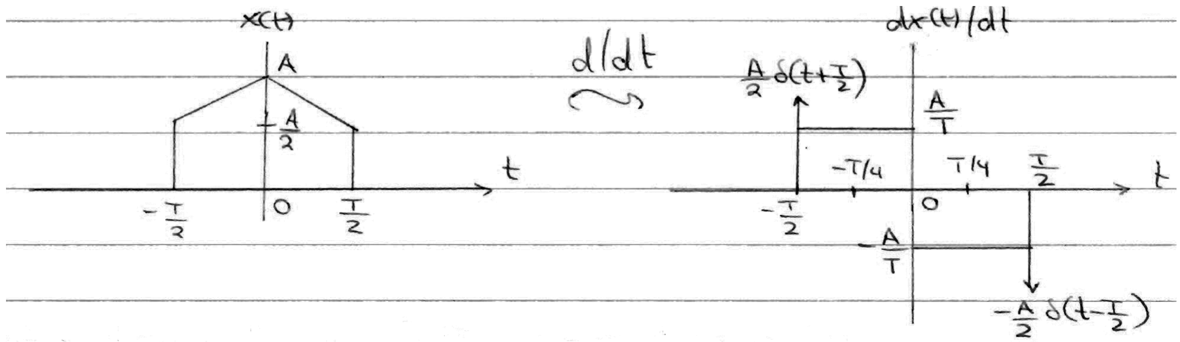
$$x(t) = Arect\Big(\frac{t}{T}\Big) = Au\Big(t+\frac{T}{2}\Big) - Au\Big(t-\frac{T}{2}\Big)$$



Σχήμα 8: Παράγωγος βηματικής συνάρτησης

όπου και με την παραγώγισή του, προκύπτουν δυο συναρτήσεις Δέλτα στις θέσεις $t = \pm\frac{T}{2}$, ακριβώς λόγω της παραπάνω σχέσης και της σχέσης 12.

Οπότε όταν παραγωγίζουμε ένα σήμα, πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στα σημεία ασυνέχειας, αρχικά αναγνωρίζοντάς τα, και έπειτα χωρίς να παραλείπουμε να βάζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Δέλτα στα σημεία ασυνέχειας. Παραγωγίζοντας λοιπόν το σήμα, καταλήγουμε στο σχήμα 9. Οπότε



Σχήμα 9: Παραγώγιση σήματος Άσκησης 3.5

έχουμε ότι το σήμα $\frac{dx(t)}{dt}$ αποτελείται από:

- Μια συνάρτηση Δέλτα, $x_1(t) = \frac{A}{2}\delta\Big(t + \frac{T}{2}\Big)$
- Ένα τετραγωνικό παράθυρο, $x_2(t) = \frac{A}{T}rect\Big(\frac{t+\frac{T}{4}}{T/2}\Big)$
- Άλλο ένα τετραγωνικό παράθυρο, $x_2(t) = -\frac{A}{T}rect\Big(\frac{t-\frac{T}{4}}{T/2}\Big)$
- Και μια ακόμα συνάρτηση Δέλτα, $x_4(t) = -\frac{A}{2}\delta\Big(t - \frac{T}{2}\Big)$

Άρα τελικά θα είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)\\
&= \frac{A}{2}\delta\Big(t+\frac{T}{2}\Big)+\frac{A}{T}rect\Big(\frac{t+\frac{T}{4}}{T/2}\Big)-\frac{A}{T}rect\Big(\frac{t-\frac{T}{4}}{T/2}\Big)-\frac{A}{2}\delta\Big(t-\frac{T}{2}\Big)\leftrightarrow\\
F\{\frac{dx(t)}{dt}\} &= \frac{A}{2}e^{j2\pi fT/2}+\frac{A}{T}\frac{T}{2}sinc\Big(\frac{fT}{2}\Big)e^{j2\pi fT/4}-\frac{A}{T}\frac{T}{2}sinc\Big(\frac{fT}{2}\Big)e^{-j2\pi fT/4}-\frac{A}{2}e^{-j2\pi fT/2}\\
&= Aj\sin(\pi fT)+\frac{A}{2}sinc\Big(\frac{fT}{2}\Big)2j\sin\Big(\frac{\pi fT}{2}\Big)\\
j2\pi fX(f) &= Aj\sin(\pi fT)+\frac{A}{2}sinc\Big(\frac{fT}{2}\Big)2j\sin\Big(\frac{\pi fT}{2}\Big)\\
X(f) &= \frac{AT}{2}sinc(fT)+\frac{AT}{4}sinc^2\Big(\frac{fT}{2}\Big) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

6. **Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του σήματος**

$$\mathbf{x(t)=\frac{2}{1+t^2}}$$

Λύση:
Η λύση με τον ορισμό δε συνίσταται... θα κάνουμε χρήση ιδιοτήτων και συγκεκριμένα την ιδιότητα της δυικότητας

$$x(t)\leftrightarrow X(f)\Rightarrow X(t)\leftrightarrow x(-f)$$

Επίσης γνωρίζουμε από προηγούμενη άσκηση ότι

$$e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$$

Για $a=2\pi$, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$e^{-2\pi|t|}\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+f^2}\Leftrightarrow 2\pi e^{-2\pi|t|}\leftrightarrow\frac{2}{1+f^2}$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω εξίσωσης έχει τη μορφή του σήματος στο χρόνο που ψάχνουμε. Με χρήση της ιδιότητας της δυικότητας, θα είναι

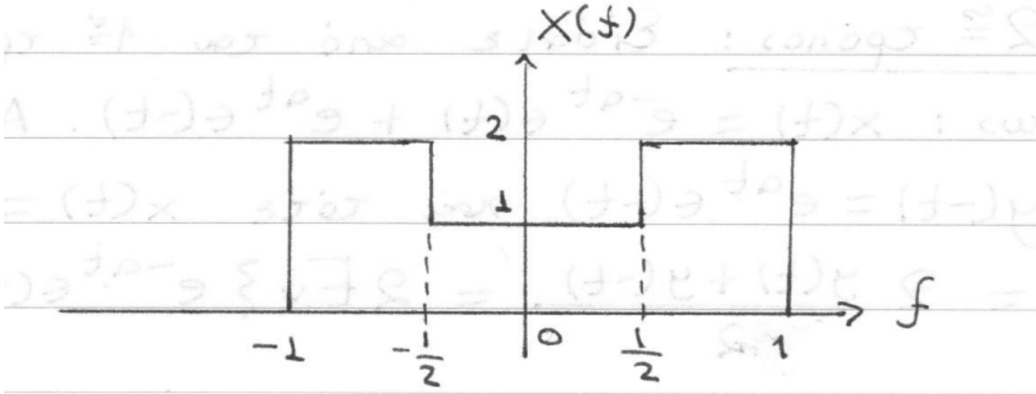
$$x(t)=\frac{2}{1+t^2}\leftrightarrow X(f)=2\pi e^{-2\pi|-f|}=2\pi e^{-2\pi|f|} \qquad (14)$$

7. **Υπολογίστε το**

$$\mathbf{E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt}$$

για το σήμα x(t) που έχει μετασχ. Fourier όπως στο σχήμα 10.

Λύση:
Αρχικά, θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί να βρει το $x(t)$ μέσω του $X(f)$, αφού το τελευταίο είναι



Σχήμα 10: Σήμα Άσκησης 3.6

απλό σήμα. Αφού το $X(f)$ αποτελείται από σήματα *rect*, τότε το $x(t)$ θα αποτελείται από σήματα *sinc*. Πιο συγκεκριμένα, αν

$$\begin{aligned} X(f) &= 2rect\Big(\frac{f-3/4}{1}\Big) + rect\Big(\frac{f}{1}\Big) + 2rect\Big(\frac{f+3/4}{1}\Big) \leftrightarrow \\ x(t) &= 2sinc(t)e^{j2\pi 3t/4} + sinc(t) + 2sinc(t)e^{-j2\pi 3t/4} \\ &= sinc(t) + 4sinc(t)\cos(3\pi t/2) \\ &= sinc(t)\Big(1 + 4\cos\Big(\frac{3\pi t}{2}\Big)\Big) \end{aligned} \tag{15}$$

Αφού φτάσαμε ως εδώ, πρέπει τώρα να βρούμε το $|x(t)|^2$ και να ολοκληρώσουμε. Αυτός ο τρόπος – αν βγάζει και πουθενά :-) – ΔΕΝ συνίσταται!

Ένα άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το δεύτερο μέλος, άρα θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2\int_{0}^{1/2} 1^2 df + 2\int_{1/2}^{1} 2^2 df = 1 + 4 = 5 \tag{16}$$

8. **Είδαμε στη θεωρία ότι πολλές συναρτήσεις μπορούν να προσεγγίσουν τη συνάρτηση Δέλτα. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση Δέλτα ως**

$$\delta(\mathbf{t}) = \lim_{\mathbf{A}\to\mathbf{0}} \frac{\sin(\pi\mathbf{t}/\mathbf{A})}{\pi\mathbf{t}}$$

αποδείξτε ότι ο μετασχ. Fourier της $\delta(\mathbf{t})$ είναι 1.

Λύση:
Ο μετασχ. Fourier είναι

$$\begin{aligned} F\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{A\to 0} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t/A)}{\pi t} e^{-j2\pi f t} dt = \lim_{A\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} sinc\Big(\frac{t}{A}\Big) e^{-j2\pi f t} dt \end{aligned}$$

Όμως το ολοκλήρωμα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{1}{A} sinc\Big(\frac{t}{A}\Big)$$

Από την ιδιότητα της δυικότητας, εύκολα βρίσκουμε ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$, είναι

$$X(f) = rect\Big(\frac{f}{1/A}\Big)$$

Οπότε τώρα ζητάμε το

$$\lim_{A\to 0} rect\Big(\frac{f}{1/A}\Big)$$

Παρατηρούμε ότι το $1/A$ είναι η διάρκεια του παλμού, όπως ξέρουμε. Όσο $A \to 0$, τόσο το $1/A \to \infty$, άρα τόσο μεγαλύτερος γίνεται ο παλμός σε διάρκεια. Άρα τελικά

$$F\{\delta(t)\} = \lim_{A\to 0} rect\Big(\frac{f}{1/A}\Big) = 1 \tag{17}$$

Μια λιγότερο διαισθητική ερμηνεία έρχεται όταν χρησιμοποιήσουμε απλά μαθηματικά, δηλ.

$$\lim_{A\to 0} rect\Big(\frac{f}{1/A}\Big) = \lim_{A\to 0} rect(Af) = rect(0) = 1 \tag{18}$$

9. **Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Parseval, αποδείξτε ότι**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha \mathbf{t})}{\mathbf{t^2}} \mathbf{dt} = \alpha\pi$$

Λύση:
Θυμίζουμε το θεώρημα του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \frac{\sin^2\left(\pi \frac{a}{\pi} t\right)}{a^2 t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a \frac{\sin\left(\pi \frac{a}{\pi} t\right)}{\pi \frac{a}{\pi} t} \right)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(a sinc\Big(\frac{a}{\pi} t\Big)\Big)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \end{aligned} \tag{19}$$

Άρα αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = asinc\Big(\frac{a}{\pi}t\Big)$$

Από γνωστές ιδιότητες έχουμε ότι

$$x(t) = asinc\Big(\frac{a}{\pi}t\Big) \leftrightarrow X(f) = \pi rect\Big(\frac{f}{a/\pi}\Big)$$

Άρα θα είναι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(asinc\Big(\frac{a}{\pi}t\Big)\Big)^2 dt = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} rect^2\Big(\frac{f}{a/\pi}\Big)df \\ &= \pi^2 \int_{-a/(2\pi)}^{a/(2\pi)} 1^2 df = \pi^2 f\Big|_{-a/(2\pi)}^{a/(2\pi)} = \pi^2 \frac{a}{\pi} = a\pi \end{aligned} \tag{20}$$

10. **Υπολογιστε το μετασχ. Fourier του σήματος**

$$\mathbf{x(t) = \frac{1}{\pi t}}$$

Λύση:
Το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}$$

είναι περιττό γιατί ισχύει $x(t) = -x(-t)$. Άρα ο μετασχ. Fourier του σήματος θα έχει μόνο φανταστικό μέρος, δηλαδή:

$$X(f) = j\Im(f) = -2j\int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi f t)}{\pi t}dt = -\frac{2}{\pi}j\int_0^{\infty}\frac{\sin(2\pi f t)}{t}dt$$

Όμως ισχύει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$$

Οπότε θα είναι

$$X(f) = \begin{cases} -j, & f > 0, \\ 0, & f = 0, \\ j & f < 0 \end{cases}$$

που γράφεται εν συντομία ως

$$X(f) = -jsgn(f) \tag{21}$$

με $sgn(f)$ η συνάρτηση προσήμου

$$sgn(t) = \frac{t}{|t|}, t \neq 0.$$

11. **Έστω ότι $\mathbf{X(f) = \Re(f) + j\Im(f)}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος $\mathbf{x(t)}$. Αποδείξτε ότι ο μετασχ. Fourier του άρτιου μέρους του $\mathbf{x(t)}$ είναι ίσος με $\mathbf{\Re(f)}$ και ο αντίστοιχος του περιττού μέρους είναι ίσος με $\mathbf{j\Im(f)}$.**

Λύση:
Είναι

$$
\begin{aligned}
X(f) &= X_{ev}(f) + X_{odd}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_{ev}(t)\sin(2\pi ft)dt + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x_{odd}(t)\sin(2\pi ft)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x_{ev}(t) + x_{odd}(t))\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} (x_{ev}(t) + x_{odd}(t))\sin(2\pi ft)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt \\
&= \Re(f) + j\Im(f) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

12. **Αποδείξτε ότι το πραγματικό, $\mathbf{\Re(f)}$, και φανταστικό, $\mathbf{\Im(f)}$, του μετασχηματισμού Fourier ενός μιγαδικού σήματος $\mathbf{x(t) = x_R(t) + jx_I(t)}$ δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις:**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Re(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\mathbf{x_R(t)\cos(2\pi ft) + x_I(t)\sin(2\pi ft)}\Big]\mathbf{dt} \\
\mathbf{\Im(f)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\mathbf{x_I(t)\cos(2\pi ft) - x_R(t)\sin(2\pi ft)}\Big]\mathbf{dt}
\end{aligned}
$$

Λύση:
Ο μετασχ. Fourier γράφεται ως

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t) + jx_I(t)]e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [x_R(t)e^{-j2\pi ft} + jx_I(t)e^{-j2\pi ft}]dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_R(t)e^{-j2\pi ft}dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x_I(t)e^{-j2\pi ft}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_R(t)(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft))dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x_I(t)(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft))dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x_R(t)\cos(2\pi ft) + x_I(t)\sin(2\pi ft))dt + j\int_{-\infty}^{\infty} (x_I(t)\cos(2\pi ft) - x_R\sin(2\pi ft))dt \\
&= \Re(f) + j\Im(f) \qquad (23)
\end{aligned}
$$

13. **Αποδείξτε ότι ένα πραγματικό αιτιατό σήμα $\mathbf{x(t)}$ γράφεται ως**

$$\mathbf{x(t) = 4\int_0^\infty \Re(f)\cos(2\pi ft)df}$$

για $\mathbf{t > 0}$ και όπου $\mathbf{\Re(f)}$ είναι το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier.

Λύση:

Ένα αιτιατό σήμα έχει την ιδιότητα

$$x(t) = 0, t < 0$$

Το άρτιο μέρος του σήματος γράφεται ως

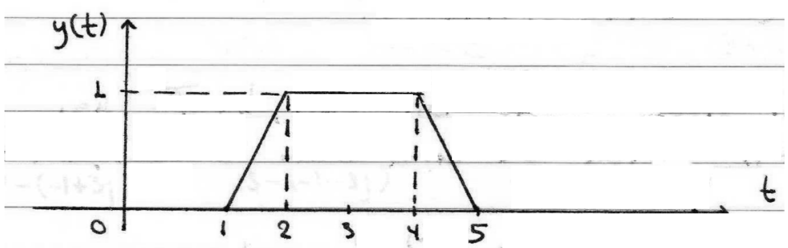
$$x_{Ev}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{x(t)}{2} \Rightarrow x(t) = 2x_{Ev}(t) \leftrightarrow X(f) = 2\Re(f)$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} 2\Re(f)e^{j2\pi ft}df \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\Re(f)\cos(2\pi ft) + j\Re(f)\sin(2\pi ft)\Big)df \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\Re(f)\cos(2\pi ft)df + 2j\int_{-\infty}^{\infty}\Re(f)\sin(2\pi ft)df \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\Re(f)\cos(2\pi ft)df + 0 \\ &= 4\int_{0}^{\infty}\Re(f)\cos(2\pi ft)df \end{aligned} \tag{24}$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν ως γινόμενο άρτιας επί περιττής συνάρτησης σε συμμετρικό διάστημα.

14. **Έστω το σήμα $\mathbf{y(t)}$ του σχήματος 11.**



Σχήμα 11: Σήμα Άσκησης 3.15

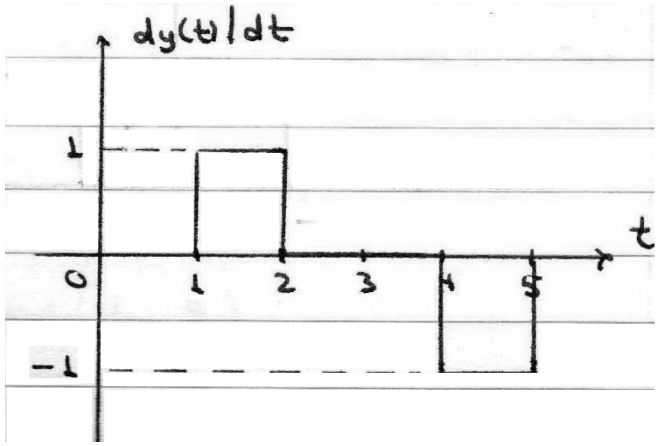
(α΄) **Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του $\mathbf{y(t)}$.**

(β΄) **Σε ποιές συχνότητες υπάρχουν μηδενισμοί στην $\mathbf{Y(f)}$?**

(γ΄) **Υπολογίστε το φάσμα φάσης για $\mathbf{-1 < f < 1}$ Hz.**

Λύση:

(α′) Θα χρησιμοποιήσουμε παραγώγιση για να βρούμε εύκολα το μετ. Fourier του σήματος. Η παράγωγος φαίνεται στο σχήμα 12. Είναι:



Σχήμα 12: Παράγωγος σήματος Άσκησης 3.15

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &= rect\Big(\frac{t-3/2}{1}\Big) - rect\Big(\frac{t-9/2}{1}\Big) \leftrightarrow \\
F\{\frac{dy(t)}{dt}\} &= sinc(f)e^{-j3\pi f} - sinc(f)e^{-j9\pi f} \Leftrightarrow \\
j2\pi f Y(f) &= sinc(f)(e^{-j3\pi f} - e^{-j9\pi f}) \Leftrightarrow \\
j2\pi f Y(f) &= sinc(f)e^{-j6\pi f} 2j\sin(3\pi f) \Leftrightarrow \\
Y(f) &= 3e^{-j6\pi f} sinc(3f) sinc(f) \qquad (25)
\end{aligned}$$

(β′) Οι μηδενισμοί γίνονται όταν

$$3\pi f = k\pi,\ k \in Z \text{ και } \pi f = l\pi,\ l \in Z$$

άρα το φάσμα θα μηδενίζεται όταν

$$f = \frac{k}{3},\ k \in Z \qquad (26)$$

(γ′) Η φάση του σήματος αποτελείται από τη φάση του εκθετικού, $-6\pi f$, και τη φάση του $sinc(3f)sinc(f)$. Δεδομένου ότι οι μηδενισμοί γίνονται κάθε $k/3$ Hz, θα έχουμε ότι

$$\angle Y(f) = \begin{cases} -6\pi f, & sinc(3f)sinc(f) > 0, \\ -6\pi f + \pi, & sinc(3f)sinc(f) < 0,\ f > 0 \\ -6\pi f - \pi, & sinc(3f)sinc(f) < 0,\ f < 0 \end{cases}$$

Συγκεντρωτικά,

$$\angle Y(f) = \begin{cases} -6\pi f, & -1 \le f < -2/3 \\ -6\pi f - \pi, & -2/3 \le f < -1/3 \\ -6\pi f, & -1/3 \le f \le 1/3 \\ -6\pi f + \pi, & 1/3 < f \le 2/3 \\ -6\pi f, & 2/3 < f \le 1 \end{cases}$$

15. **Το σήμα $\mathbf{y(t)}$ του προηγούμενου θέματος είναι είσοδος στο σύστημα με απόκριση $\mathbf{h(t) = \delta(t) + \delta(t+6)}$. Να υπολογιστεί ο μετασχ. Fourier της εξόδου και οι τιμές του φάσματος για $\mathbf{\frac{1}{3} \leq f \leq \frac{1}{3}}$.**

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} Z(f) &= Y(f)H(f) = 3e^{-j6\pi f} sinc(3f) sinc(f) H(f) \\ &= 3e^{-j6\pi f} sinc(3f) sinc(f)(1 + e^{j2\pi 6f}) \\ &= 3 sinc(3f) sinc(f)(e^{-j2\pi 3f} + e^{j2\pi 3f}) \\ &= 6 sinc(3f) sinc(f) \cos(6\pi f) \end{aligned} \tag{27}$$

Επειδή $\Im(f) = 0$, η φάση θα είναι 0 ή $\pm\pi$. Όπου το σήμα είναι θετικό, η φάση είναι 0. Όπου είναι αρνητικό, έχουμε δυο περιπτώσεις: για θετικές συχνότητες, η φάση είναι π, ενώ για αρνητικές συχνότητες, έχουμε φάση $-\pi$. Τα σημεία μηδενισμού για κάθε όρο του γινομένου είναι στις θέσεις

$$\begin{aligned} 3\pi f &= k\pi, \quad \pi f = l\pi, \quad 6\pi f = m\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k, l, m \in Z \\ f &= \frac{k}{3}, \quad f = l, \quad f = \frac{m \pm \frac{1}{2}}{6} = \frac{m}{6} \pm \frac{1}{12}, \quad k, l, m \in Z \end{aligned} \tag{28}$$

Προφανώς, το συνολικό σήμα μηδενίζεται στο διάστημα $[-1/3, 1/3]$ όταν

$$f = \frac{m}{6} \pm \frac{1}{12}$$

Συγκεντρωτικά,

$$\angle Z(f) = \begin{cases} 0, & -1/3 \leq f < -3/12 \\ -\pi, & -3/12 \leq f < -1/12 \\ 0, & -1/12 \leq f \leq 1/12 \\ +\pi, & 1/12 < f \leq 3/12 \\ 0, & 3/12 < f \leq 1/3 \end{cases}$$

16. **Ένα σήμα $\mathbf{x(t)}$ έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα $\mathbf{[-B, B]}$. Δείξτε ότι το σήμα $\mathbf{x^n(t)}$ έχει μη μηδενικές συχνότητες στο διάστημα $\mathbf{[-nB, nB]}$.**

Λύση:
Γνωρίζουμε ότι

$$x(t)x(t) \longleftrightarrow X(f) * X(f)$$

και το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-2B, 2B]$.
Όμοια,

$$x(t)x(t)x(t) \longleftrightarrow [X(f) * X(f)] * X(f)$$

και το φάσμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[-3B, 3B]$ Αντίστοιχα,

$$\underbrace{x(t)x(t)\cdots x(t)}_{\text{n φορές}} \longleftrightarrow \underbrace{X(f) * X(f) * \cdots * X(f)}_{\text{n φορές}}$$

και σκεπτόμενοι όμοια, το φάσμα είναι μη μηδενικό στις συχνότητες $[-nB, nB]$.