ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Σειρές Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

11 Μαρτίου 2014

1. **Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος**

$$\mathbf{x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t)}$$

<u>Λύση:</u>
Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις του Euler:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \ \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{1}$$

Είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t) \\ &= 2 + \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} - \frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j} - 3\frac{e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}}{2} \\ &= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - \frac{1}{2j}e^{j\pi t} + \frac{1}{2j}e^{-j\pi t} - \frac{3}{2}e^{j3\pi t} - \frac{3}{2}e^{-j3\pi t} \end{aligned} \tag{2}$$

Όμως η σειρά Fourier πρέπει να έχει τους συντελεστές της γραμμένους σε μορφη μέτρο-φάση. Γι' αυτό, οι όροι $\frac{1}{j}$ και -1 μπροστα από τα εκθετικά πρέπει να μετατραπούν σε φάση. Γνωρίζετε ότι $\frac{1}{j} = -j = e^{\pm j\pi/2}$ και $-1 = e^{\pm j\pi}$.

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - \frac{1}{2j}e^{j\pi t} + \frac{1}{2j}e^{-j\pi t} - \frac{3}{2}e^{j3\pi t} - \frac{3}{2}e^{-j3\pi t} \\ &= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j\pi t} + \frac{3}{2}e^{j\pi}e^{j3\pi t} + \frac{3}{2}e^{-j\pi}e^{-j3\pi t} \end{aligned} \tag{3}$$

Το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στα παρακάτω σχήματα 1α' και 1β' αντίστοιχα. Για τη σχεδίασή τους χρησιμοποιήσαμε τη γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi f$ σε rad/sec και όχι τη συχνότητα f σε Hz. Προτιμήστε οποια σας βολεύει.

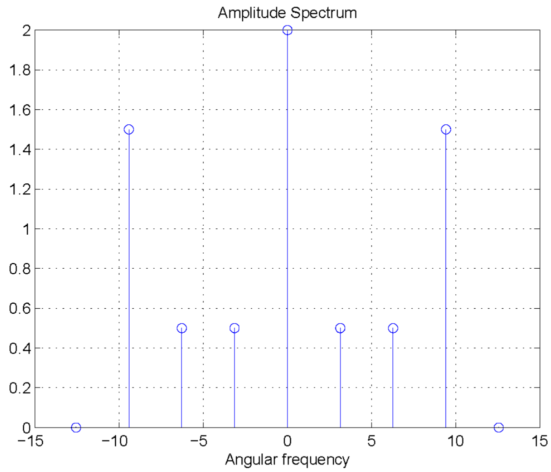
Εναλλακτικός τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες:

$$-\sin(\theta) = \cos(\theta + \pi/2), \ \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta). \tag{4}$$

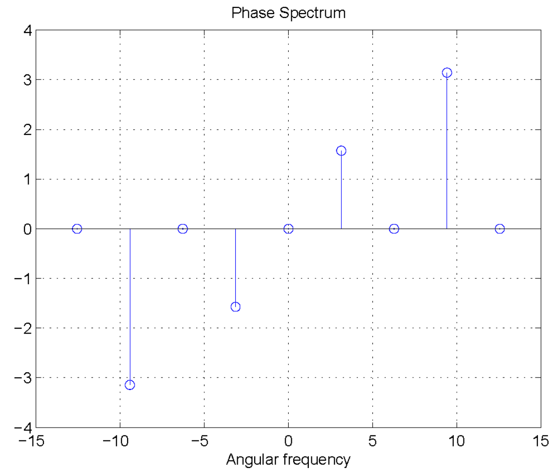
Θα μετατρέψουμε τα sin σε cos και θα φροντίσουμε τα πρόσημα να είναι όλα θετικά, εισάγοντας όπου χρειάζεται την κατάλληλη φάση. Είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t) \\ &= 2 + \cos(2\pi t) + \cos(\pi t + \pi/2) + 3\cos(3\pi t + \pi) \\ &= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j\pi/2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t}e^{-j\pi/2} + \frac{3}{2}e^{j3\pi t}e^{j\pi} + \frac{3}{2}e^{-j3\pi t}e^{-j\pi}. \end{aligned} \tag{5}$$

Το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στα παρακάτω σχήματα 1α' και 1β' αντίστοιχα.



(α′) Φάσμα πλάτους 2.1



(β′) Φάσμα φάσης 2.1

Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.1

2. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t)}$$

Αναπτύξτε το σε εκθετική (αμφίπλευρη) - και μετά τριγωνομετρική (μονόπλευρη) - σειρά Fourier και βρείτε την περίοδο $\mathbf{T_0}$

Λύση:
Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Έχουμε πάντα υπόψη μας ότι αρνητικά πρόσημα ή $1/j, j$ ως συντελεστές εκθετικών πρέπει να μετατραπούν σε φάσεις, οταν θέλουμε από την αμφίπλευρη σειρά να πάμε στη μονόπλευρη. Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις του Euler.
Είναι:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t) = \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(\frac{1}{4j^2}e^{j10\pi t} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{4}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}\Big)\Big(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}\Big) \\
&= -\frac{1}{8}e^{j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{j12\pi t} \\
&= -\frac{1}{8}e^{j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{j12\pi t} \\
&= \frac{1}{8}e^{j\pi}e^{j32\pi t} + \frac{1}{8}e^{-j\pi}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} + \frac{1}{8}e^{-j\pi}e^{-j32\pi t} + \frac{1}{8}e^{j\pi}e^{j12\pi t} \quad (\text{εκθετική}) \\
&= \frac{1}{4}\cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t + \pi) \quad (\text{τριγωνομετρική}) \qquad (6)
\end{aligned}$$

Ένας διαφορετικός τρόπος λύσης θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

και

$$\cos(\theta)\cos(\omega) = \frac{1}{2}\cos(\theta+\omega) + \frac{1}{2}\cos(\theta-\omega)$$

Τότε θα είναι:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(10\pi t)\Big)\cos(22\pi t) &= \frac{1}{2}\cos(22\pi t)-\frac{1}{2}\cos(22\pi t)\cos(10\pi t)\\ &= \frac{1}{2}\cos(22\pi t)+\frac{1}{4}\cos(32\pi t+\pi)+\frac{1}{4}\cos(12\pi t+\pi)\end{aligned}$$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{ΜΚΔ}(6, 11, 16) = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$.

3. **Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο $\mathbf{T_0}$, σήμα:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 2-2\frac{t}{T_0}, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

Σας δίνεται ότι:

$$\int \mathbf{te^{\alpha t}dt} = \frac{\mathbf{e^{\alpha t}}}{\alpha}\Big(\mathbf{t}-\frac{\mathbf{1}}{\alpha}\Big),\ \int \mathbf{e^{\alpha t}dt} = \frac{\mathbf{1}}{\alpha}\mathbf{e^{\alpha t}}$$

Λύση:
Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \quad \text{και} \quad X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι $\mathbf{f_0T_0 = 1}$, $\mathbf{e^{\pm j2\pi k} = 1}$, και $\mathbf{e^{-j\pi k} = (-1)^k}$. Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_0^{\frac{T_0}{2}} 1dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\Big(2-\frac{2}{T_0}t\Big)dt\Big)\\ &= \frac{1}{T_0}t\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}2t\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\frac{2}{T_0}tdt\\ &= \frac{1}{T_0}\Big(\frac{T_0}{2}-0\Big)+\frac{2}{T_0}\Big(T_0-\frac{T_0}{2}\Big)-\frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\frac{2}{T_0}tdt\\ &= \frac{1}{2}+1-\frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{T_0^2}{2}-\frac{T_0^2}{8}\Big)\\ &= \frac{3}{2}-2\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\Big) = \frac{3}{2}-2\frac{3}{8}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{6}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned} \tag{7}$$

Άρα τελικά

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{3}{4} \tag{8}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\Big(\int_0^{T_0} 1e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \int_0^{T_0}(2-\frac{2}{T_0}t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\Big)\\
&= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\bigg|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} 2e^{-j2\pi k f_0 t}dt - \frac{2}{T_0^2}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} te^{-j2\pi k f_0 t}dt\\
&= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\bigg|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{2}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\Big(t-\frac{1}{-j2\pi k f_0}\Big)\bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\Big) = A_1 + A_2 + B\\
A_1 + A_2 &= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\bigg|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{2}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{T_0}\Big(\frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k f_0} - \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k f_0}\Big)\\
&= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k}-1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k}\\
&= -\frac{1}{j2\pi k}(e^{-j\pi k} - 1 + 2 - 2e^{-j\pi k})\\
&= -\frac{1}{j2\pi k}(1-e^{-j\pi k})\\
B &= -\frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}\Big(t-\frac{1}{-j2\pi k f_0}\Big)\bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\Big)\\
&= -\frac{2}{T_0^2}\Big(\frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k f_0}\Big(T_0 - \frac{1}{-j2\pi k f_0}\Big) - \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k f_0}\Big(\frac{T_0}{2} - \frac{1}{-j2\pi k f_0}\Big)\Big)\\
&= -\frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2}{T_0^2(-j2\pi k f_0)(j2\pi k f_0)} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{2e^{-j\pi k}}{T_0^2(-j2\pi k f_0)(j2\pi k f_0)}\\
&= -\frac{2}{-j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2 k^2}\\
&= -\frac{1}{j2\pi k}(e^{-j\pi k}-2) - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k})
\end{aligned}$$

Άρα το X_k θα ειναι τελικά:

$$\begin{aligned}
X_k &= A_1 + A_2 + B = -\frac{1}{j2\pi k}(1-e^{-j\pi k}) - \frac{1}{j2\pi k}(e^{-j\pi k}-2) - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k})\\
&= -\frac{1}{j2\pi k}(1-e^{-j\pi k}+e^{-j\pi k}-2) - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k})\\
&= \frac{1}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k})\\
&= \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k}). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$X_0 = \frac{3}{4} \text{ και } X_k = \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1-e^{-j\pi k}).$$

Μπορούμε να γράψουμε τώρα ότι:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k}) \Big) e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi k f_0 t} - \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k}) e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k}) e^{j2\pi k f_0 t}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι $(1 - e^{-j\pi k}) = 1 - (-1)^k$, άρα:

$$
(1 - e^{-j\pi k}) = \begin{cases} 2, & k \text{ περιττος} \\ 0, & k \text{ άρτιος} \end{cases}
$$

Άρα θα είναι:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k \text{ περιττός}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} 2 e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j2\pi (2k-1) f_0 t} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

όπου θέσαμε $k \leftarrow 2k-1$, για να έχουμε μόνο περιττούς όρους (διότι $2k-1$ περιττός για κάθε k). Αν θέλουμε να προχωρήσουμε ακόμα λίγο και να αναπτύξουμε το σήμα μας σε μονόπλευρη σειρά Fourier τότε θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j2\pi (2k-1) f_0 t} \\
&= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{2\pi^2 (2k-1)^2} \cos(2\pi (2k-1) f_0 t) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

γιατί ξέρουμε ότι για τους συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ισχύει ότι:

$$
A_k = 2|X_k|
$$

4. **Έστω ένα πραγματικό, περιττό και περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$, που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές $\mathbf{X_k}$. Δείξτε ότι**

$$\mathbf{X_k = -X_{-k}}$$

Λύση:
Το σήμα μας είναι περιττό, άρα θα ισχύει $x(t) = -x(-t)$. Είναι:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} -x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

Θέτω $u = -t \Rightarrow du = -dt$. Επίσης, $u_1 = 0, u_2 = -T_0$.

Άρα θα είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du = -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{-j2\pi(-k)f_0 u}du = -X_{-k} \tag{13}$$

5. **Δίδονται τρια πραγματικά, περιοδικά σήματα με μικρό αριθμό αρμονικών. Οι μη μηδενικοί συντελεστές για $\mathbf{k > 0}$ δίδονται ακολούθως:**
α) $\mathbf{x_1(t) : T_0 = 1, X_1 = 5, X_3 = 2}$.
β) $\mathbf{x_2(t) : T_0 = 2, X_1 = j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{4}, X_4 = -j\frac{1}{8}}$.
Βρείτε τα $\mathbf{x_i(t)}$.

Λύση:
Αφού τα σήματα είναι πραγματικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές X_k και για $k < 0$, και για αυτούς θα ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$.
α) Είναι

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + X_{-1}e^{j2\pi(-1)\frac{1}{T_0}t} + X_1 e^{j2\pi(+1)\frac{1}{T_0}t} + X_3 e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} \\
&= X_3^* e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + X_1^* e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_1 e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_3 e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\
&= 2e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + 5e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 5e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 2e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} \\
&= 2e^{-j6\pi t} + 5e^{-j2\pi t} + 5e^{j2\pi t} + 2e^{j6\pi t} \\
&= 2(e^{-j6\pi t} + e^{j6\pi t}) + 5(e^{-j2\pi t} + e^{j2\pi t}) \\
&= 4\cos(6\pi t) + 10\cos(2\pi t).
\end{aligned} \tag{14}$$

β) Είναι

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= X_{-4}e^{j2\pi(-4)\frac{1}{T_0}t} + X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + \cdots + X_3 e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} + X_4 e^{j2\pi(+4)\frac{1}{T_0}t} \\
&= X_4^* e^{-j2\pi 4\frac{1}{T_0}t} + X_3^* e^{-j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + \cdots + X_3 e^{j2\pi 3\frac{1}{T_0}t} + X_4 e^{j2\pi 4\frac{1}{T_0}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j2\pi 4\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{4}e^{-j2\pi 3\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi 2\frac{1}{2}t} + \cdots - j\frac{1}{2}e^{j2\pi 2\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{4}e^{j2\pi 3\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{8}e^{j2\pi 4\frac{1}{2}t} \\
&= j\frac{1}{8}e^{-j4\pi t} - j\frac{1}{4}e^{-j3\pi t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - je^{-j\pi t} + je^{j\pi t} - j\frac{1}{2}e^{j2\pi t} + j\frac{1}{4}e^{j3\pi t} - j\frac{1}{8}e^{j4\pi t} \\
&= j\frac{1}{8}(e^{-j4\pi t} - e^{j4\pi t}) - j\frac{1}{4}(e^{-j3\pi t} - e^{j3\pi t}) + j\frac{1}{2}(e^{-j2\pi t} - e^{j2\pi t}) - j(e^{-j\pi t} - je^{j\pi t}) \\
&= -j\frac{1}{8}2j\sin(4\pi t) + j\frac{1}{4}2j\sin(3\pi t) - j\frac{1}{2}2j\sin(2\pi t) + j2j\sin(\pi t) \\
&= \frac{1}{4}\sin(4\pi t) - \frac{1}{2}\sin(3\pi t) + \sin(2\pi t) - 2\sin(\pi t)
\end{aligned} \tag{15}$$

6. **Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο $\mathbf{T_0}$, σήμα:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

<u>Λύση:</u>
Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \text{ και}$$
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

Θα είναι λοιπόν:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} - 1) \\
\iff & X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{\alpha T_0}(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}})
\end{aligned} \tag{16}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t - j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha + j2\pi k f_0)}e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} \\
&= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha + j2\pi k f_0)}\left(e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)\frac{T_0}{2}} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha + j2\pi k f_0)}\left(e^{-(\alpha\frac{T_0}{2} + j\pi k)} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha + j2\pi k f_0)}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k} - 1) = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k})
\end{aligned} \tag{17}$$

Όμως ξέρουμε ότι: $e^{-j\pi k} = \cos\pi k - j\sin\pi k = (-1)^k$, γιατί για κάθε k ακέραιο, το $\cos\pi k$ είναι είτε 1 για άρτια k, είτε -1 για περιττά k, ενώ το $\sin\pi k$ είναι μηδέν για κάθε k.

Άρα μπορούμε να γράψουμε τελικά ότι:

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}\left(1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}\right)$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι:

$$X_0 = \frac{1}{\alpha T_0}\left(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}\right) \text{ και} \tag{18}$$

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}\left(1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}\right) \tag{19}$$

Άρα το σήμα μας θα γράφεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)} \Big(1 - (-1)^k e^{-\alpha \frac{T_0}{2}}\Big) e^{j2\pi k f_0 t} \tag{20}$$

7. **Οι συντελεστές στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος έχουν υπολογιστεί από τη σχέση**

$$\mathbf{A_k e^{j\phi_k} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt} \tag{21}$$

και είναι οι παρακάτω για $\mathbf{k > 0}$

$$\mathbf{A_k e^{j\phi_k} = -\frac{A}{j2\pi k}[(-1)^k - 1]} \tag{22}$$

και $\mathbf{A_0 = 0}$. Βρείτε το σήμα σε ανάπτυγμα μονόπλευρης σειράς Fourier.

Λύση:
Ξέρουμε ότι η μονόπλευρη σειρά Fourier δίνεται από:

$$x(t) = A_0 + Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}\} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{23}$$

Παρατηρούμε ότι το $A_k e^{j\phi_k}$ είναι μη μηδενικό και ίσο με $\frac{A}{jk\pi}$, για περιττά k, και $A_k e^{j\phi_k} = 0$ για άρτια k. Άρα το $A_k e^{j\phi_k}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$A_k e^{j\phi_k} = \begin{cases} \frac{A}{j\pi k} = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even} \end{cases}$$

Άρα εύκολα συμπεραίνουμε ότι $A_k = \frac{A}{\pi k}$ και $\phi_k = -\frac{\pi}{2}$, για k περιττά.
Άρα θα είναι: $(A_0 = X_0 = 0)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \cos(2\pi(2k+1) f_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1) f_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2\pi(2k+1) f_0 t) \end{aligned} \tag{24}$$

Σημείωση: Αν δινόταν αρχικά ότι $X_k = -\frac{A}{4j\pi k}[(-1)^k - 1]$ (δηλ. οι συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος), και ζητούσε το μονόπλευρο ανάπτυγμα, τότε πολύ απλά:

$$X_k = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \tag{25}$$

για k περιττά, με τον ίδιο συλλογισμό με παραπάνω, και θα είχαμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} 2\frac{A}{2\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) \\ &= \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2\pi(2k+1) f_0 t) \end{aligned} \tag{26}$$

το ίδιο δηλαδή αποτέλεσμα.

8. **Βρείτε την περίοδο του σήματος:**

$$\mathbf{x(t)} = \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{5}\pi\mathbf{t} + \phi_{\mathbf{1}}) + \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{2}\pi\mathbf{t} + \phi_{\mathbf{2}})$$

Λύση:
Θα χρειαστεί να γράψουμε το σήμα μας ως άθροισμα απλών ημιτόνων ή/και συνημιτόνων, ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε για την περιοδικότητά του. Είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2) \\ &= \Big(\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{j\phi_1} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t}e^{-j\phi_1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{j\phi_2} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi t}e^{-j\phi_2}\Big)^2 \\ &= -\frac{1}{4}e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1} - \frac{1}{4}e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4}e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2} \\ &= -\frac{1}{4}(e^{j10\pi t}e^{j2\phi_1} + e^{-j10\pi t}e^{-j2\phi_1}) - \frac{1}{4}(e^{j4\pi t}e^{j2\phi_2} + e^{-j4\pi t}e^{-j2\phi_2}) + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{4}2\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{4}2\cos(4\pi t + 2\phi_2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4\pi t + 2\phi_2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cos(2\pi 5t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2t + 2\phi_2) \end{aligned} \tag{27}$$

Άρα η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος θα είναι $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{5, 2\} = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ sec. Αλλιώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$ =ΕΚΠ$\{0.2, 0.5\} = 1$ sec.
Παρατηρήστε επίσης ότι αφού μας ζητείται η περιοδικότητα, δε χρειάζεται να γράψουμε τη σειρά Fourier με τα θετικά της προσημα στα πλάτη, γιατί δεν παίζει κανένα ρόλο στην εύρεση της περιόδου. Αν μας ζητούσε φάσμα πλάτους ή φάσης, τότε θα έπρεπε να γίνει η μετατροπή πλάτους κάθε ημιτόνου από αρνητικό σε θετικό, με προσθήκη κατάλληλης φάσης.

Σημείωση:

(α') Αν μας ζητούσε να *δείξουμε* ότι το σήμα είναι περιοδικό, και μετά να υπολογίσουμε την περίοδό του, τότε θα έπρεπε (για να είμαστε απόλυτα σωστοί) να πούμε ότι:
$\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$, που είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Έπειτα, θα υπολογίζαμε την περίοδο με όποιον τρόπο θέλαμε.
Ένα καλό αντιπαράδειγμα σχετικά με αυτή τη σημείωση, θα ήταν το

$$x(t) = 2 + \cos(10\pi t + \phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4t - \phi_2)$$

Τότε, θα ήταν $\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{10}$, το οποίο προφανώς ΔΕΝ είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό.

(β') Όπως προαναφερθηκε, με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να λύσουμε την άσκηση, μπορούμε αμέσως (έστω, με ελάχιστες πράξεις ακόμα :)) να απαντήσουμε σε ερωτήματα σχεδίασης φάσματος πλάτους και φάσης, κλπ. Ό,τι χρειαζόμαστε για να απαντήσουμε σε αυτά υπάρχει έτοιμο στη λύση παραπάνω!

9. **Ένα περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)}$ με περίοδο 5 sec θέλουμε να καθυστερήσει κατά 0.05 sec. Πόση θα είναι η φάση μετατόπισής του;**

   Λύση:
   Έστω $t_0 = 0.05sec$. Το καθυστερημένο κατά t_0 σήμα εκφράζεται ως:

$$x(t-t_0) = A\cos(2\pi f_0(t-t_0)) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

   Άρα

$$\phi = -2\pi f_0 t_0 = -2\pi \frac{1}{T_0} t_0 = -2\pi \frac{1}{5} 0.05 = -0.02\pi \tag{28}$$

   Προφανώς, αν θέλαμε να προηγείται κατά $t_0 = 0.05sec$, θα είχαμε $\phi = 0.02\pi$, με παρόμοιο συλλογισμό με παραπάνω (θα ζητούσαμε τότε το $x(t+t_0)$).

10. **Έστω το σήμα**

$$\mathbf{x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \cos(2(k+1)\pi t + \phi_k)}$$

   Βρείτε την περίοδό του.

   Λύση:
   Βλέπουμε ότι για $k = 1, k = 2, k = 3 \cdots$, παίρνουμε αντίστοιχα συχνότητες $f_1 = 2, f_2 = 3, f_3 = 4 \cdots$. Προφανώς, όλες αυτές οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, της $f_0 = 1$. Άρα η περίοδος είναι $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$. Προσέξτε, το γεγονός ότι δεν υπάρχει συνημίτονο με τέτοια συχνότητα στην παραπάνω αναπαράσταση, δε σημαίνει κάτι για την περίοδο του σήματος.

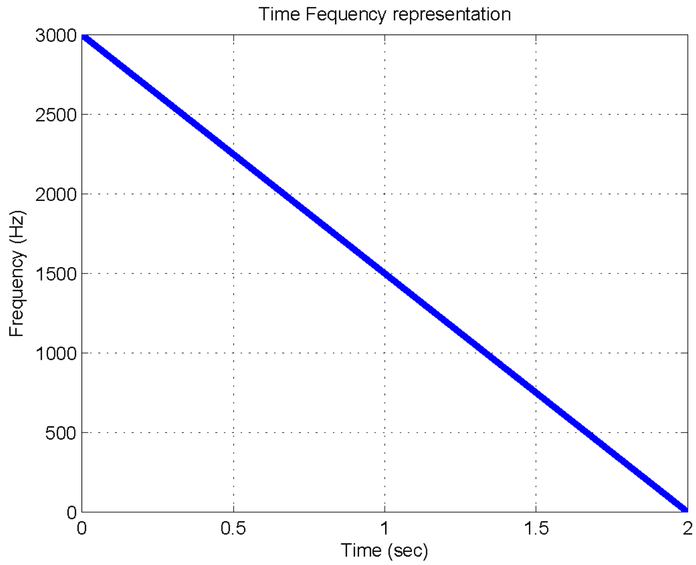
11. **Ένα chirp σήμα μοναδιαίου πλάτους $\mathbf{x(t)}$ μεταβάλλει τη συχνότητά του από 3000 Hz σε 0 Hz σε χρόνο 2 sec.**
   α) Σχεδιάστε την αναπαράσταση χρόνου-συχνότητας για το $\mathbf{x(t)}$.
   β) Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος.

   Λύση:
   Ένα chirp σήμα (σήμα σειρήνας, στα ελληνικά :)) είναι ένα σήμα το οποίο ΔΕ διατηρεί σταθερή συχνότητα με το πέρασμα του χρόνου (όπως κάνει το $A\cos(2\pi f_0 t)$, που έχει συχνότητα σταθερή και ίση με f_0), αλλά όσο περνάει ο χρόνος, η συχνότητα μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το χρόνο. Σήματα σειρήνας μπορείτε να ακούσετε σε περιπολικά, ασθενοφόρα ή πυροσβεστικά οχήματα (μακριά από μας και τα τρια :)).
   Το chirp σήμα ορίζεται ως $x(t) = \cos(\theta(t))$, με $\theta(t) = 2\pi m t^2 + 2\pi f_0 t + \phi$, με m μια σταθερά που λέγεται σταθερά διαμόρφωσης.
   Η στιγμιαία συχνότητα του σήματος $x(t)$ ορίζεται ως: $f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = 2mt + f_0$.

   α) Ένα σήμα που μεταβάλλει γραμμικά τη συχνότητά του από 3000 Hz ως 0 Hz σε 2 sec, έχει αναπαράσταση χρόνου-συχνότητας όπως φαίνεται στο σχήμα 2.

   β) Αφού το σήμα μεταβάλλεται γραμμικά σε χρονικό διάστημα $T = 2$ sec από $f_1 = 3000$ Hz ως $f_2 = 0$ Hz, η στιγμιαία του συχνότητα θα είναι:

$$f_i(t) = \frac{f_2 - f_1}{T} t + f_1 = \frac{0 - 3000}{2} + 3000 = -1500t + 3000$$



Σχήμα 2: Σήμα σειρήνας Άσκησης 2.13

Άρα η φάση του θα είναι

$$\theta(t) = 2\pi \int_0^t (-1500u + 3000)du + \phi = 2\pi(-1500\frac{t^2}{2} + 3000t) + \phi = -1500\pi t^2 + 6000\pi t + \phi$$

(αν δεν μπορείτε να θυμάστε τον τύπο της $f_i(t)$, μπορείτε απλά να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα (0,3000), (2,0) στο σχήμα του ερωτήματος (α). Αυτή θα είναι η $f_i(t)$).
Άρα τελικά το σήμα θα είναι το $x(t) = \cos(-1500\pi t^2 + 6000\pi t + \phi)$.

12. **Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα**

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \frac{\sin(\mathbf{2t}) + \sin(\mathbf{3t})}{\sin(\mathbf{t})}$$

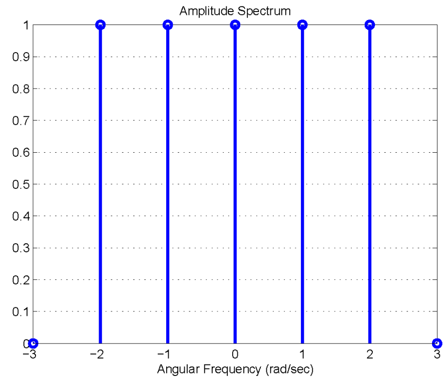
α) Ποιά είναι η περίοδος του σήματος;
β) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης του σήματος.

Λύση:
Αναπτύσσουμε το σήμα μας σύμφωνα με τους τύπους του Euler:

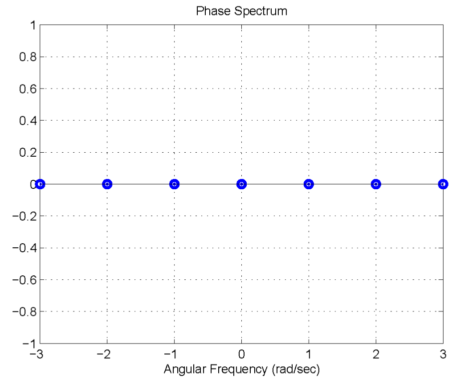
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t})}{\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})} \\ &= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \tag{29}$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{30}$$



(α') Φάσμα πλάτους 2.14



(β') Φάσμα φάσης 2.14

Σχήμα 3: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2.14

για τα εκθετικά του αριθμητή. Θα είναι λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{(e^{jt}-e^{-jt})}(e^{j2t}-e^{-j2t}+e^{j3t}-e^{-j3t}) = \frac{1}{(e^{jt}-e^{-jt})}[(e^{jt})^2-(e^{-jt})^2+(e^{jt})^3-(e^{-jt})^3] \\
&= \frac{1}{(e^{jt}-e^{-jt})}[(e^{jt}-e^{-jt})(e^{jt}+e^{-jt})+(e^{jt}-e^{-jt})(e^{j2t}+1+e^{-j2t})] \\
&= \frac{1}{(e^{jt}-e^{-jt})}(e^{jt}-e^{-jt})(e^{jt}+e^{-jt}+1+e^{j2t}+e^{-j2t}) = e^{jt}+e^{-jt}+1+e^{j2t}+e^{-j2t} \\
&= 1+2\cos(t)+2\cos(2t) \qquad (31)
\end{aligned}
$$

α) Η περίοδος του σήματος θα είναι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{2\pi, \pi\} = 2\pi$.
β) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνονται στα σχήματα 3.

13. **Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα**

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \sin(\pi \mathbf{f_0} \mathbf{t}) \qquad (32)$$

το οποίο έχει περίοδο $\mathbf{T_0}$.

Λύση:
Είναι

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi}{T_0}\right)dt \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\Big|_0^{T_0} \\
&= \frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}. \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= -\frac{1}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\int_0^{T_0} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{T_0} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\left(e^{-j2\pi k f_0 t}\right)' dt \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}(-j2\pi k f_0)\int_0^{T_0} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0}\int_0^{T_0} \cos\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{T_0}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)\right)' e^{-k2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{2jk}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + \frac{2jk}{T_0}\frac{T_0}{\pi}\left(-\frac{2j\pi k}{T_0}\right)\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4k^2}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\
&= \frac{2}{\pi} + 4k^2 X_k \Longleftrightarrow \\
X_k - 4k^2 X_k &= \frac{2}{\pi} \\
X_k(1-4k^2) &= \frac{2}{\pi} \\
X_k &= \frac{2}{\pi(1-4k^2)} \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Άρα θα είναι

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)} e^{j2\pi k f_0 t} \\
&= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2\pi k f_0 t) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)}\cos(2\pi k f_0 t) \qquad (35)
\end{aligned}
$$

14. **Δείξτε ότι για πραγματικά σήματα ισχύει:**

- **Άρτιο σήμα X Άρτιο σήμα = Άρτιο σήμα**
- **Περιττό σήμα X Περιττό σήμα = Άρτιο σήμα**
- **Άρτιο σήμα X Περιττό σήμα = Περιττό σήμα**

Λύση:

-
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Αν } x(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow x(t)=x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow y(t)=y(-t)\end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t)=x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t)=z(-t) \tag{36}$$
που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι άρτιο.

-
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Αν } x(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow x(t)=-x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow y(t)=-y(-t)\end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t)=x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t)=z(-t) \tag{37}$$
που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι άρτιο.

-
$$\left\{\begin{array}{r}\text{Αν } x(t) \text{ άρτιο } \Leftrightarrow x(t)=x(-t) \\ \text{Αν } y(t) \text{ περιττό } \Leftrightarrow y(t)=-y(-t)\end{array}\right\} \Longrightarrow x(t)y(t)=-x(-t)y(-t) \Longrightarrow z(t)=-z(-t) \tag{38}$$
που δηλώνει ότι το $z(t)$ είναι περιττό.

15. **Έστω το περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$ που ορίζεται σε μια περίοδο $\mathbf{-T_0/2 \le t \le T_0/2}$ ως:**
$$\mathbf{x(t)} = \left\{\begin{array}{ll} 1, & |t| \le t_c \\ 0, & t_c < |t| \le T_0/2 \end{array}\right.$$
με $\mathbf{tc < T_0/2}$. Αναπτύξτε το σε σειρά Fourier, για $\mathbf{t_c = T_0/4}$ και $\mathbf{t_c = T_0/10}$.

Λύση:
Θα αναπτύξουμε το περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier χωρίς αντικατάσταση της t_c, η οποία θα γίνει στο τέλος. Είναι:
$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} 1dt = \frac{1}{T_0} t\Big|_{-t_c}^{t_c} = \frac{1}{T_0}(t_c+t_c) = \frac{2t_c}{T_0} \tag{39}$$
και
$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-t_c}^{t_c} \\ &= -\frac{1}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k f_0 t_c} - e^{j2\pi k f_0 t_c}\right) \\ &= \frac{1}{j2\pi k} 2j\sin(2\pi k f_0 t_c) \\ &= \frac{\sin(2\pi k f_0 t_c)}{\pi k} \end{aligned} \tag{40}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{4}$, έχουμε

$$X_0 = \frac{2T_0/4}{T_0} = \frac{1}{2} \tag{41}$$

$$X_k = \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/4)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2} sinc(k/2) \tag{42}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{10}$, έχουμε

$$X_0 = \frac{2T_0/10}{T_0} = \frac{1}{5} \tag{43}$$

$$X_k = \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/10)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/5)}{\pi k} = \frac{1}{5} sinc(k/5) \tag{44}$$