# Σημειώσεις και παρατηρήσεις σχετικά με Σήματα και Ανάλυση Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

9 Μαρτίου 2014

## 1 Εισαγωγικά

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο που (πρέπει να :-) ) διαβάσατε πριν φτάσετε εδώ, αναφερθήκαμε σε πολλά πράγματα. Είδαμε το ''δένδρο'' της επεξεργασίας σήματος, με αυτό το μάθημα ως ''ρίζα'' και ''κορμό'' (αν και θα μπορούσαμε να πούμε ότι το επόμενό του, το ΗΥ370, είναι ο κορμός – σίγουρα πάντως το ΗΥ215 είναι η ρίζα :-) ), και τους διάφορους τομείς που αναφέρθηκαν ως ''κλαδιά'', που στα άκρα τους φέρουν πολύχρωμα ''φρούτα'', τις πρακτικές εφαρμογές.

### 1.1 Γιατί Σειρές Fourier;

Ένα ερώτημα όμως που ΔΕΝ απαντήσαμε είναι ΓΙΑΤΙ χρησιμοποιούμε ''βαριά'' (λέμε τώρα :-P) μαθηματικά για να φτάσουμε σε όλες αυτές τις εφαρμογές. Αφ' ενός, γιατί δεν έχουμε βρει κανένα πιο εύκολο τρόπο (δεν έχουμε κανένα βίτσιο να ασχολούμαστε με ολοκληρώματα σώνει και καλά :-) ), αφ' ετέρου γιατί η χρήση τους παρέχει ένα πανίσχυρο πλαίσιο ανάλυσης και ''τυποποίησης '' των μεθόδων που χρησιμοποιούνται. Δεν πειστήκατε; Θα σας δώσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. :-)

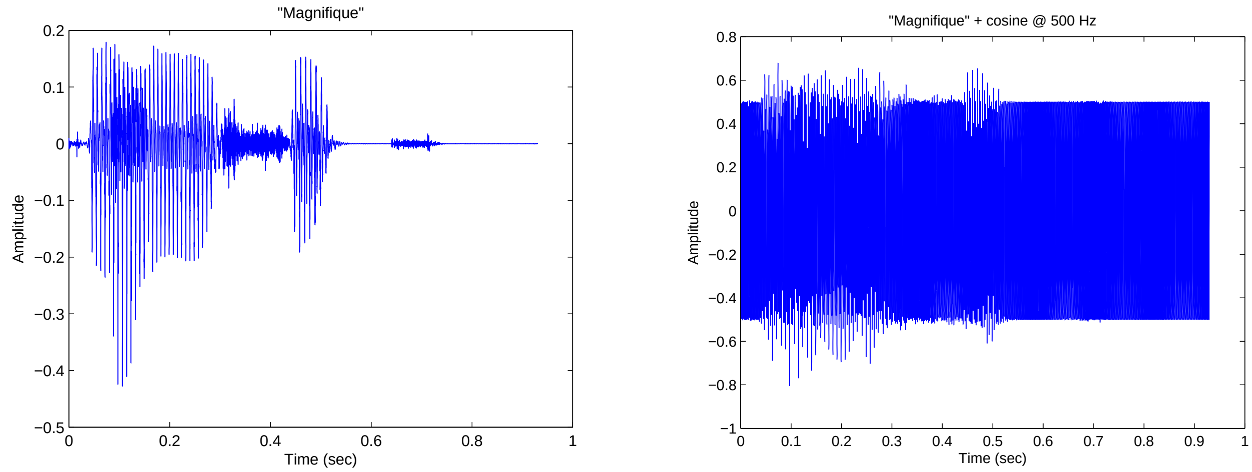
Μόλις λίγες σελίδες μετά, θα διαβάσετε για την *ανάλυση σε Σειρές Fourier*, που – αν δεν το έχετε ηδη ακούσει στο μάθημα – είναι απλά μια μέθοδος αλλαγής οπτικής γωνίας :-) . Ναι, τόσο απλά! Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να δούμε ένα σήμα, μια κυματομορφη, σε έναν διαφορετικό χώρο, το χώρο των *συχνοτήτων*. Το πώς, θα το διαβάσετε παρακάτω. Το ΓΙΑΤΙ όμως είναι το ερώτημα, όπως προείπαμε, και το παρακάτω παράδειγμα πιστεύω θα σας πείσει.

Έστω ότι έχουμε ένα σήμα φωνής όπως αυτό του σχήματος 1α'. Πρόκειται για τη Γαλλική λέξη magnifique. :-) Ας υποθέσουμε οτι για κάποιο λόγο, ένα ισχυρό ημίτονο πλάτους 0.5, των 500 Hz (θυμηθείτε, 500 Hz σημαίνει ότι σε ένα δευτερόλεπτο, το ημίτονο έχει επαναλάβει τη βασική του περιοδο 500 φορές) προστίθεται στο σημα φωνής, και το οποίο ημίτονο θεωρείται ως ανεπιθύμητο, δηλαδή ως ''θόρυβος ''[1].Το αποτέλεσμα στο χώρο του χρόνου φαίνεται στο σχήμα 1β'. Όπως μπορείτε να δείτε, είναι τρομερά δύσκολο στην πράξη να ξεχωρίσουμε/ανακτήσουμε το σήμα μας στο πεδιο του χρόνου, μια και φαίνεται να έχει θαφτεί μέσα στο ''θόρυβο'' του συνημιτόνου. ΟΜΩΣ, αν χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που θα μάθετε στο μάθημα, δηλαδη την όψη του πεδίου της συχνότητας, τότε για το καθαρό σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του σχήματος 2α', ενώ για το ''αλλοιωμένο'' σήμα, θα έχετε το διάγραμμα του σχήματος 2β'.

Παρατηρήστε δυο πράγματα:

1. Ο οριζόντιος άξονας είναι πλέον η συχνότητα στα διαγράμματα 2α', 2β', και όχι πια ο χρόνος. Πρόκειται για ΑΚΡΙΒΩΣ τα ίδια σήματα των διαγραμμάτων 1α', 1β', μόνο που τα βλέπουμε σε έναν άλλο *χώρο*,

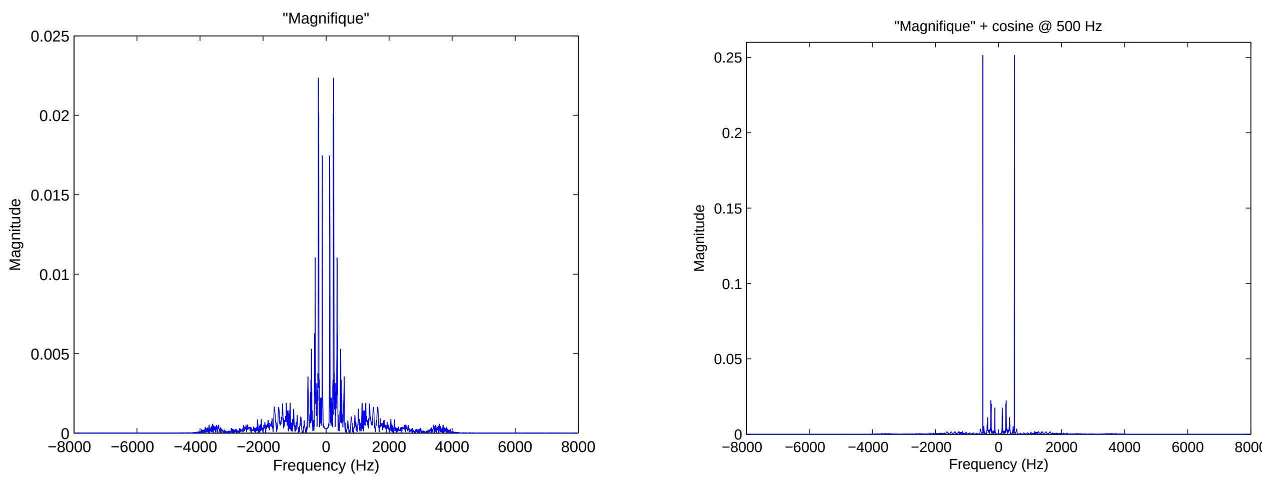
[1] Το παράδειγμα αυτό δεν απέχει απ' την πραγματικότητα – στα αεροπλάνα, όταν βγαίνει μια ανακοίνωση από τα μικρόφωνα του πιλοτηρίου, ακούγεται πάνω στη φωνή του πιλότου ένα ημίτονο στα 400 Hz, λόγω του ότι η ηλεκτρική ισχύς ειναι στα 400 Hz, εν αντιθέσει με τα σπίτια μας, που είναι 50 – 60 Hz... φαντάζομαι ότι μέχρι σήμερα βέβαια θα το έχουν φτιάξει... :-P




(α′) Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου

(β′) Σήμα Φωνής στο πεδίο του χρόνου με προστιθέμενο ημίτονο στα 500 Hz

Σχήμα 1: Σήματα φωνής στο πεδίο του χρόνου




(α′) Σήμα Φωνής στο πεδίο των συχνοτήτων

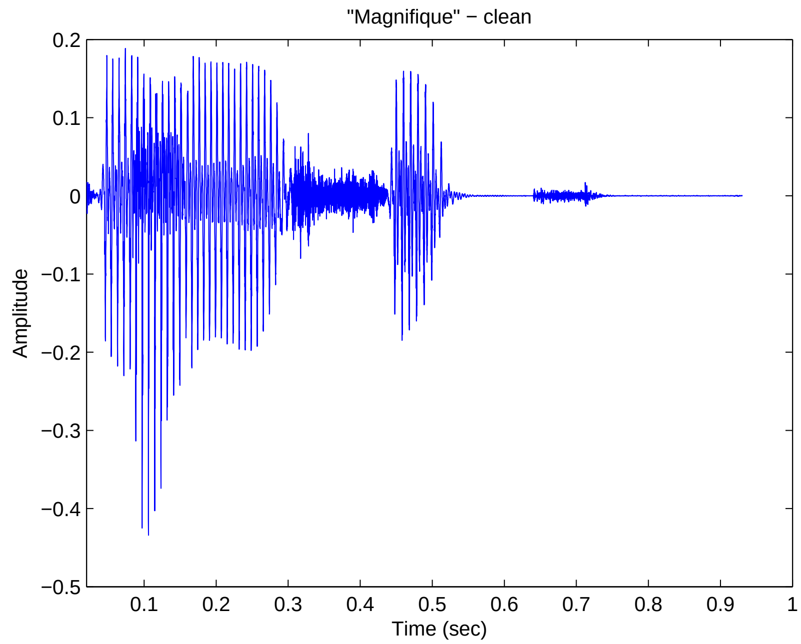
(β′) Αλλοιωμένο σήμα Φωνής στο πεδιο των συχνοτήτων

Σχήμα 2: Σήματα φωνής στο πεδίο της συχνότητας

αυτόν των συχνοτήτων. Το γιατί οι γραφικές παραστάσεις έχουν αυτό το σχήμα, όπως επίσης και γιατί έχουμε αυτές τις ‘‘εξωτικές ’’ αρνητικές συχνότητες :-) , θα το μάθετε στην πορεία.

2. Προσέξτε επίσης την αλλαγή της κλίμακας στα διαγράμματα αυτά. Επιπλέον, στο διάγραμμα 2β′ παρατηρούμε ότι γύρω στα $\pm 500$ Hz υπάρχει μια ισχυρή συνιστώσα, η οποία μοιάζει εκτός της ομαλότητας που παρατηρούμε στο σχήμα 2α′. Σίγουρα λοιπόν αυτή η μεγάλη κατακόρυφη ‘‘γραμμή’’ οφείλεται στο ημίτονο που προστεθηκε μετά. ;-) Το υπόλοιπο σήμα είναι το ίδιο ανάμεσα στα δυο γραφήματα, απλά έχει αλλάξει η κλίμακα για να ‘‘χωρέσουν’’ στο σχήμα οι συνιστώσες των 500 Hz.

Βλέπουμε λοιπόν τώρα ότι αυτός ο νέος χώρος, ο χώρος των συχνοτήτων είναι πολύ πιο βοηθητικός στην προσπάθειά μας να ανακτήσουμε το σήμα μας. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να μηδενίσουμε την τιμή 0.25 που φαίνεται στα $\pm 500$ Hz. Έτσι, θα μπορέσουμε να εξαφανίσουμε το ενοχλητικό σήμα, και να κρατήσουμε μόνο το ‘‘χρήσιμο’’ σήμα. Πράγματι, αν μηδενίσουμε αυτή τη συχνότητα, και αντιστρέψουμε τη διαδικασία πίσω στο χρόνο, θα πάρουμε το σχήμα 3!




Σχήμα 3: Καθαρισμένο Σήμα Φωνής

Ποιός ήταν ο σκοπός όλου αυτού του – υπεραπλουστευμένου, είναι η αλήθεια – παραδείγματος; Ο σκοπός συνοψίζεται στην εξής παρατηρηση: *Αν μπορούσαμε να έχουμε ένα μαθηματικό εργαλείο που μας μετατρέπει ένα οποιοδήποτε σήμα στο χώρο του χρόνου σε ένα αντίστοιχο στο χώρο των συχνοτήτων, δηλ. θα μπορούσε να μας γράψει το όποιο σήμα $x(t)$ ως συνάρτηση ημιτόνων κάποιων συγκεκριμένων συχνοτήτων (η οποία μπορεί να παρασταθει γραφικά όπως στο σχήμα 2α΄ ή στο σχήμα 2β΄), τότε πολύ εύκολα θα μπορούσαμε να κάνουμε πράγματα που στο πεδιο του χρόνου θα ήταν αδύνατα!* Το παραπάνω παράδειγμα, όπου απλά μηδενίζουμε μια συχνότητα (δηλ. μηδενίζουμε το πλάτος του αντίστοιχου ημιτόνου) η οποία είναι ανεπιθύμητη, είναι ΕΝΑ μόνο από τα χιλιάδες, όπου η αλλαγή χώρου μας λύνει τα χέρια. Ε, αυτό το μαθηματικό εργαλείο μας είναι ήδη γνωστό εδώ και πολλά χρόνια και δεν είναι άλλο από την **Ανάλυση Fourier**...[2]

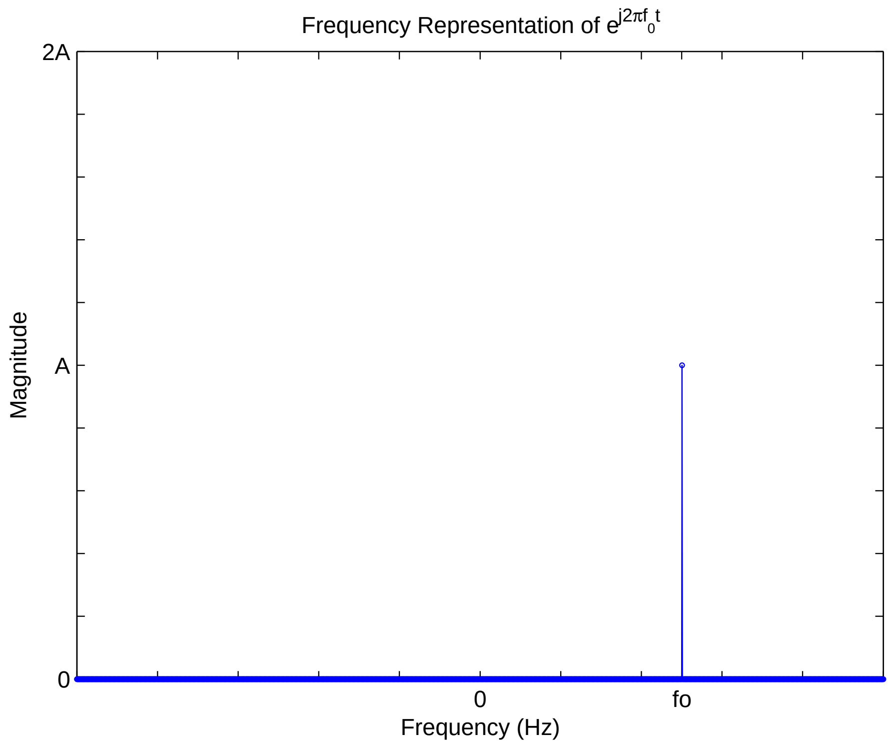
## 1.2 Ένα απλό παράδειγμα

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να έχουμε μια γραφική παρασταση ενός σήματος στο χώρο των συχνοτήτων; Αυτό το ερώτημα είπαμε ότι ισοδυναμεί με το πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια μαθηματική έκφραση στο χώρο των συχνοτήτων ενός σήματος που μας δίδεται στο χρόνο. Η πιο απλή τέτοια αναπαράσταση φυσικά δεν είναι άλλη από του απλού μιγαδικού εκθετικού συχνότητας $f_0$:

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t} \tag{1}$$

Είναι ένα σήμα που ορίζεται στο χρόνο, με πλάτος $A$, και με συχνότητα $f_0$, η οποία είναι σταθερή. Οπότε, γι΄ αυτό το σήμα, το διάγραμμα στο χώρο της συχνότητας θα είναι όπως στο σχήμα 4. Δυο άξονες, με οριζόντιο τον άξονα των συχνοτήτων και κατακόρυφο τον άξονα του πλάτους, με μια κατακόρυφη γραμμή στη συχνότητα $f_0$, ύψους $A$. Αυτή είναι η αναπαράσταση που ζητάμε! :-) Φυσικά το σήμα που επιλέξαμε

[2]Επειδή ίσως το σκεφτήκατε... αν το σήμα $x(t)$ έχει από μόνο του πληροφορία στη συχνότητα $\pm 500$ Hz πριν την πρόσθεση του ημιτόνου, τότε προφανώς αυτή η πληροφορία θα χαθεί με την παραπάνω διαδικασία, και άρα το σήμα που θα πάρουμε δε θα είναι ακριβως ίδιο με το αρχικό.




Σχήμα 4: Απλό παράδειγμα συχνοτικής ανάλυσης

μπορεί να είναι το απλούστερο που μπορούσαμε να σκεφτούμε, αλλά δεν παύει να είναι ένα μιγαδικό σήμα! Αν είχαμε ένα πραγματικό σήμα οπως το

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{2}$$

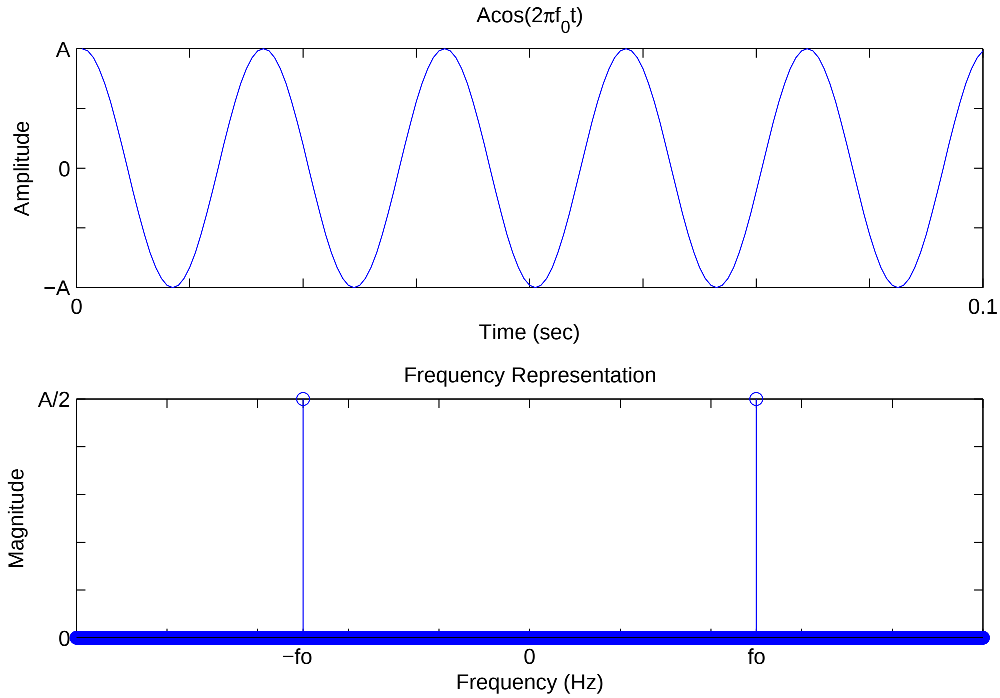
τότε πώς θα σχεδιάζαμε αυτή τη γραφική αναπαράσταση; Πολύ απλά, γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t} \tag{3}$$

σύμφωνα με τους τύπους του Euler. Να λοιπόν που τώρα έχουμε ένα άθροισμα από δυο εκθετικά, οπότε θα έχουμε ένα διάγραμμα με δυο κατακόρυφες γραμμές. Μια στη συχνότητα $-f_0$ και μια στη συχνότητα $f_0$ Hz, με πλάτη $A/2$. Ας δούμε αυτά τα σχήματα μαζί, τόσο στο χρόνο όσο και στη συχνότητα, στο σχήμα 5. Θα θέλαμε φυσικά η πληροφορία που μας δίνεται από τη συχνοτική αναπαράσταση του σήματος να είναι ισοδύναμη με αυτή του χρόνου. Στο παράδειγμά μας, είναι; Αρκεί η συχνότητα και το πλάτος που αναγράφονται στη συχνοτική αναπαράσταση για να περιγράψει πλήρως ένα ημίτονο; Η απάντηση είναι όχι. Διότι ένα ημίτονο στη γενική του μορφή γράφεται ως

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{4}$$

Άρα χρειάζεται με κάποιο τρόπο να αναπαριστούμε και τη φάση $\phi$ ως συνάρτηση της συχνότητας. Οπότε, η πλήρης περιγραφή ενός ημιτόνου στο χώρο της συχνότητας περιλαμβάνει δυο διαγράμματα: ενα που αφορα το πλάτος ως συνάρτηση της συχνότητας (αυτό που έχουμε δει ως τώρα) ΚΑΙ ένα που αφορα τη φάση ως συνάρτηση της συχνότητας. Αυτές οι δυο αναπαραστάσεις λέγονται **φάσμα πλάτους** και **φάσμα φάσης**, αντίστοιχα. Ας δούμε ένα παράδειγμα.




Σχήμα 5: Απλό παράδειγμα ανάλυσης σήματος στους δυο χώρους

Έστω το σήμα

$$x(t) = 2\cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) \tag{5}$$

Προτού σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα φάσματα, ας δούμε πως αναλύεται αυτό το σήμα. Είναι

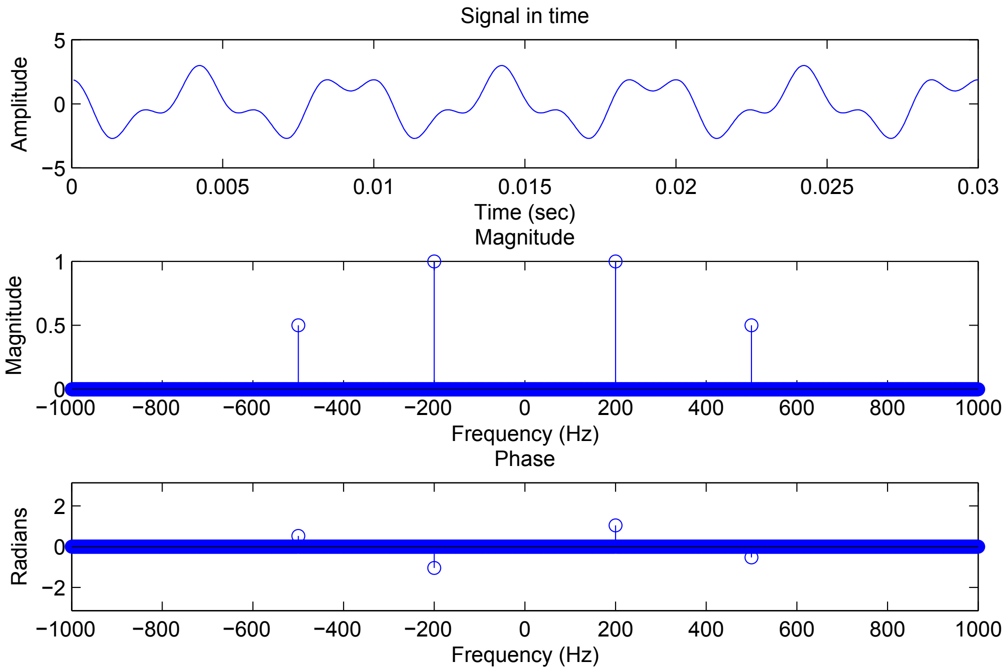
$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(2\pi 200t + \pi/3) + \cos(2\pi 500t - \pi/6) & (6)\\ &= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/6} & (7)\end{aligned}$$

Από αυτήν την αναπαράσταση, μας είναι ξεκάθαρο πώς να σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης. Δείτε το σχήμα 6.

Προφανώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης οποιωνδήποτε ημιτόνων ή συνδυασμού τους. Δεν καταλήγουν, προφανώς, ομως όλοι οι συνδυασμοί ημιτόνων σε περιοδικό σήμα. Για παράδειγμα, το παραπάνω σημα $x(t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \text{M.K.}\Delta\{200, 500\} = 100$ Hz, και άρα περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.01$ δευτερόλεπτα. Όμως, το σήμα $y(t) = \cos(2\pi 50t) - \sin(5t - \pi/4)$ ΔΕΝ είναι περιοδικό, γιατί δεν υπάρχει ο M.K.Δ των δυο συχνοτήτων. Εμείς όμως ενδιαφερομαστε ιδιαίτερα για τα περιοδικά σήματα, σε πρώτη φαση. Όταν το σήμα που μας δίνεται είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου ημιτόνων, τοτε μπορούμε με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και τύπων του Euler, να το γράψουμε σε μορφη αθροίσματος ημιτόνων ή εκθετικών και να σχεδιάσουμε φάσματα πλάτους και φάσης σημάτων, οπως παραπάνω, άσχετα αν είναι το σήμα περιοδικό ή όχι.

## 1.3 Μόνο ημίτονα;

Όμως τα περιοδικά σήματα, οπως αυτό της σχέσης 5, έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα όταν τα αναπτύσουμε σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Αυτά τα εκθετικά *έχουν συχνότητες που εinai ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας του σήματος*! Είδατε οτι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος 5 είναι 100 Hz. Οι συχνότητες του σήματος είναι ακέραιες πολλαπλάσιες του 100, δηλ. $\pm 200, \pm 500$.




Σχήμα 6: Παράδειγμα ανάλυσης σήματος

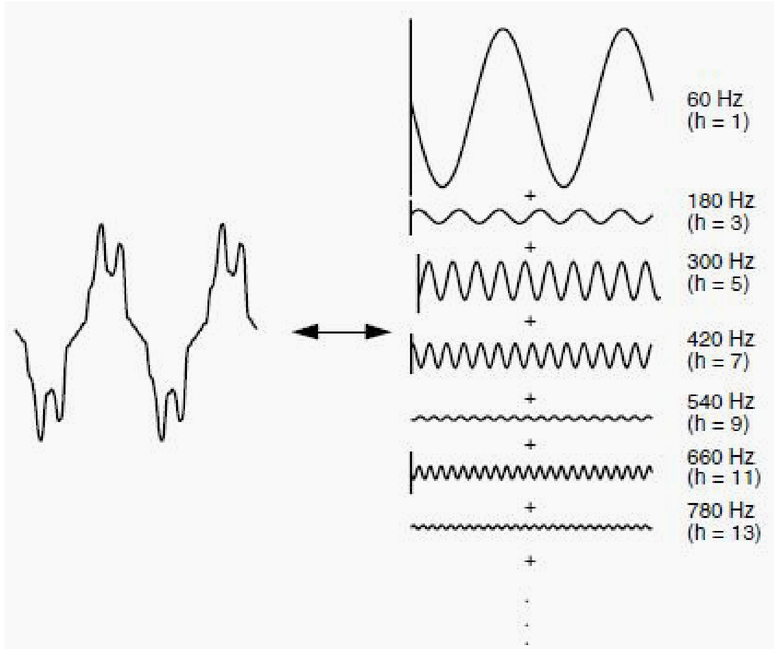
Αυτό ακριβώς αντικατοπτρίζεται και στο φάσμα πλάτους και φάσης.

Τι γίνεται όμως αν το περιοδικό σήμα που μας δίνεται ΔΕΝ είναι σε μορφή αθροίσματος/γινομένου/πηλίκου ημιτόνων; Αν είναι ένας *περιοδικός* τριγωνικός ή τετραγωνικός παλμός, πώς θα ενεργήσουμε; Πώς θα το αναλύσουμε σε εκθετικά σήματα, ώστε να δούμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο; Εδώ έρχεται η θεωρία της *Ανάλυσης σε σειρές Fourier*!

# 2 Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Η Ανάλυση Fourier είναι ίσως το βασικότερο εργαλείο ανάλυσης σημάτων, η οποία μας δίνει πληροφορίες για το *συχνοτικό τους περιεχόμενο*, δηλ. για το ΠΟΙΕΣ συχνότητες υπάρχουν στο σήμα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μας πληροφορεί για το ΠΟΣΑ και ΠΟΙΑ ημίτονα (δηλ. με ποιό πλάτος, συχνότητα, και φάση) πρέπει να προσθέσουμε μεταξύ τους για να πάρουμε το συνολικό σήμα που αναλύουμε. Ένα οπτικό παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 7. Χάριν ευκολίας, ξεκινάμε τη μελέτη μας από σήματα τα οποία λέγονται περιοδικά. Ασφαλώς γνωρίζετε τι είναι ένα περιοδικό σήμα και επίσης γνωρίζετε ότι περιοδικά σήματα, με την αυστηρή έννοια, στην πραγματικότητα ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ. Πουθενά στη φύση. :-) Οπότε γιατί ασχολούμαστε; Αφ' ενός για λόγους γενικότερης μελέτης, αφ' ετέρου γιατί κάποια κομμάτια απ'τη μελέτη τέτοιων σημάτων, καθώς και ο τρόπος σκέψης αυτής της μελέτης, μας είναι χρήσιμα στην πράξη.

Τι είναι λοιπόν η ανάλυση σε Σειρές Fourier; Όπως είπαμε, δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να γράφουμε ένα οποιδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιοδήποτε :-) ) περιοδικό σήμα ως ένα άθροισμα ημιτόνων. Ας πάμε λίγο στα μαθηματικά, για να αρχίσουμε να ξεδιαλύνουμε κάποια




Σχήμα 7: Ανάλυση σήματος σε άθροισμα ημιτόνων

πράγματα... ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, με περίοδο $T_0$, αναλύεται σε σειρά Fourier με χρήση των σχέσεων

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{8}$$

όπου

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt,\ \ k \neq 0 \tag{9}$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt, \tag{10}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{11}$$

όπου $X_k$ είναι οι περίφημοι συντελεστές Fourier, και την $f_0$ τη λέμε *θεμελιώδη συχνότητα*, γιατί όλα τα εκθετικά στην εξίσωση (8) έχουν συχνότητες που είναι *ακέραιες πολλαπλάσιες* της $f_0$. Είδαμε λοιπόν εδώ πως γράφουμε ένα οποιοδήποτε σήμα ως άθροισμα ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ μιγαδικών σημάτων. Μα ένα λεπτό. Πριν είπαμε ότι η ανάλυση Fourier μας αναλύει το σήμα σε ημίτονα. Μα φυσικά. Απ'τις γνωστές σχέσεις του Euler, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε εκθετική αναπράσταση, που έχει προκύψει από ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ σήμα, σε ημιτονοειδή αναπαράσταση. Θυμηθείτε:

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \tag{12}$$

Άρα ουσιαστικά τα μιγαδικά εκθετικά είναι κι αυτά ημίτονα. :-) Ας ξεκινήσουμε τώρα τις παρατηρήσεις μας σχετικά με την ανάλυση σε σειρές Fourier...

1. Ας ξεκινήσουμε απ'το τελευταίο που αναφέραμε. ΟΛΕΣ οι συχνότητες της σχέσης (8) είναι ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΣ μιας συγκεκριμένης, της θεμελιώδους συχνότητας, που ορίζεται ώς το αντίστροφο της περιόδου του σήματος.

2. Το ολοκλήρωμα στη σχέση (9) λέει ότι για να βρούμε τους συντελεστές $X_k$ κάθε εκθετικού πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $x(t)$ με τις περίφημες *συναρτήσεις βάσης* $e^{-j2\pi k f_0 t}$ και να ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα σε μια περίοδο. Προσοχή! Σε μια οποιαδήποτε περίοδο του σήματος! Όχι απαραίτητα από 0 ως $T_0$! Όποιο διάστημα θέλετε μπορείτε να βάλετε στα άκρα του ολοκληρώματος, όποιο σας βολεύει, ΑΡΚΕΙ να αποτελεί μια περίοδο του σήματος! Περισσότερα για τους συντελεστές Fourier σε επόμενη παρατήρηση...

3. Ίσως παρατηρήσατε ότι, για πραγματικά σήματα, το $X_0$ εξ' ορισμού δεν είναι τίποτα άλλο παρά το εμβαδό μιας περιόδου του σήματος. Άρα το $X_0$ είναι απλά η μέση τιμή του σήματος. Πραγματικός αριθμός ΠΑΝΤΑ, για πραγματικά σήματα!

4. Αντίθετα, οι συντελεστές $X_k$, $k \neq 0$ δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί, συνήθως μάλιστα είναι μιγαδικοί. Για το λόγο αυτό, οι συντελεστές $X_k$ μπορούν να γραφούν σε πολική μορφή (μέτρο-φάση):
$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} \tag{13}$$
Το $|X_k|$ το λέμε μέτρο (είναι ΠΑΝΤΑ θετικό) και το $\angle X_k$ το λέμε φάση του συντελεστή $X_k$. Η φάση ΠΑΝΤΑ εκφράζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Υπάρχουν πολλές ιδιότητες σχετικά με τους συντελεστές $X_k$ ανάλογα με το είδος του σήματος $x(t)$. Για παράδειγμα, αν το σήμα είναι πραγματικό, τότε ισχύει ότι $X_k^* = X_{-k}$, δηλ. οι συντελεστές για αρνητικά $k$ είναι απλά οι συζυγείς συντελεστές των θετικών $k$. Προσοχή! Αυτό ισχύει μόνο για ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ, περιοδικά σήματα $x(t)$!

## 2.1 Ύπαρξη Σειράς Fourier

Είπαμε πιο πριν ότι μπορούμε να γράψουμε ΣΧΕΔΟΝ οποιοδήποτε περιοδικό σήμα ως ανάπτυγμα Fourier. Ποιές είναι αυτές οι συνθήκες που καθορίζουν πότε μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό σήμα ως σειρά Fourier και πότε οχι; Προφανώς τα σήματα που δεν μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier πρέπει να έχουν ένα βαθμό ‘‘ανωμαλίας ’’ :-) . Αν και από τη σκοπιά του μηχανικού δε μας ενδιαφέρουν τέτοια σήματα, μια και υπάρχουν μόνο στη θεωρία, ενδιαφέρον είναι να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που καθορίζουν την ύπαρξη ή όχι του αναπτύγματος Fourier.

Υπάρχουν ΔΥΟ βασικές συνθήκες για την ύπαρξη της σειράς Fourier.

1. Οι συντελεστές $X_k$ πρέπει να εχουν πεπερασμένο μέτρο, δηλ. $|X_k| < \infty$. Αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει μόνον όταν
$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \tag{14}$$
Η σχέση 14 ονομάζεται *ασθενής συνθήκη του Dirichlet*. Αν μια συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την ασθενή συνθήκη του Dirichlet, η ύπαρξη της σειράς Fourier είναι εγγυημένη, αλλά μπορεί η σειρά να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο. Για παράδειγμα, αν ένα σημα $x(t)$ απειρίζεται σε κάποιο σημείο, τότε προφανώς κανένα άθροισμα ημιτόνων δεν μπορει να αναπαραστήσει αυτήν την περιοχή, οπότε η σειρά που θα αναπαριστά το σήμα θα είναι ‘‘προβληματική’’ σε αυτήν την περιοχή, με άλλα λόγια, δε θα συγκλίνει. Παρόμοια, αν ένα σήμα έχει άπειρα σημεία μεγιστου-ελαχίστου σε μια περίοδό του[3]. Αυτό σημαίνει ότι οι συχνότητες που περιέχονται στο σήμα τείνουν στο άπειρο και ΔΕΝ έχουν συντελεστες $X_k$ που φθίνουν κατά μέτρο, όσο $f \to \infty$. Έτσι, απαιτούμε μια ακόμα συνθήκη.

2. Το σήμα $x(t)$ πρέπει να εχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων σε μια περίοδό του, και πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών σε μια περίοδό του. Αυτές οι δυο συνθήκες λέγονται *ισχυρές συνθήκες του Dirichlet*. Αξίζει να σημειωθεί οτι οποιοδήποτε σήμα μπορούμε να παράξουμε στο εργαστήριο ικανοποιεί τις ισχυρές συνθήκες του Dirichlet, και άρα έχει σειρά Fourier που συγκλίνει. Έτσι, στην πράξη, η φυσική ύπαρξη του σήματος ειναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της σειράς Fourier του. ;-)

[3] Είπαμε, αυτά τα σήματα έχουν κάποιες ‘‘ανωμαλίες ’’ :-)

### 2.2 Ιδιότητες Σειρών Fourier

Υπάρχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, που θα σας λύσουν τα χέρια σε πολλές εφαρμογές. Ο πίνακας 1 απεικονίζει τις περισσότερες.

| Ιδιότητες σειρών Fourier | | |
|---|---|---|
| Ιδιότητα | Περιοδικό σήμα | Συντελεστές Fourier |
| | $x(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$ | $X_k$ |
| | $y(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$ | $Y_k$ |
| Γραμμικότητα | $Ax(t) + By(t)$ | $AX_k + BY_k$ |
| Χρονική μετατόπιση | $x(t - t_0)$ | $X_k e^{-j2\pi k t_0/T_0}$ |
| Μετατόπιση στη συχνότητα | $e^{j2\pi Mt/T_0} x(t)$ | $X_{k-M}$ |
| Συζυγές σήμα στο χρόνο | $x^*(t)$ | $X^*_{-k}$ |
| Αντιστροφή στο χρόνο | $x(-t)$ | $X_{-k}$ |
| Στάθμιση στο χρόνο | $x(at)$, $a > 0$ | $X_k$, με περίοδο $T_0/a$ |
| Περιοδική συνέλιξη | $\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$ | $T_0 X_k Y_k$ |
| Πολλαπλασιασμός | $x(t)y(t)$ | $\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$ |
| Παραγώγιση | $\frac{dx(t)}{dt}$ | $j2\pi k X_k/T_0$ |
| Ολοκλήρωση | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ | $\frac{X_k}{j2\pi k/T_0}$ |
| Συζυγής συμμετρία | $x(t)$ πραγματικό | $\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$ |
| Άρτιο μέρος | $x_e(t) = Ev\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό | $\Re\{X_k\}$ |
| Περιττό μέρος | $x_o(t) = Od\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό | $j\Im\{X_k\}$ |
| Θεώρημα του Parseval | $\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$ |

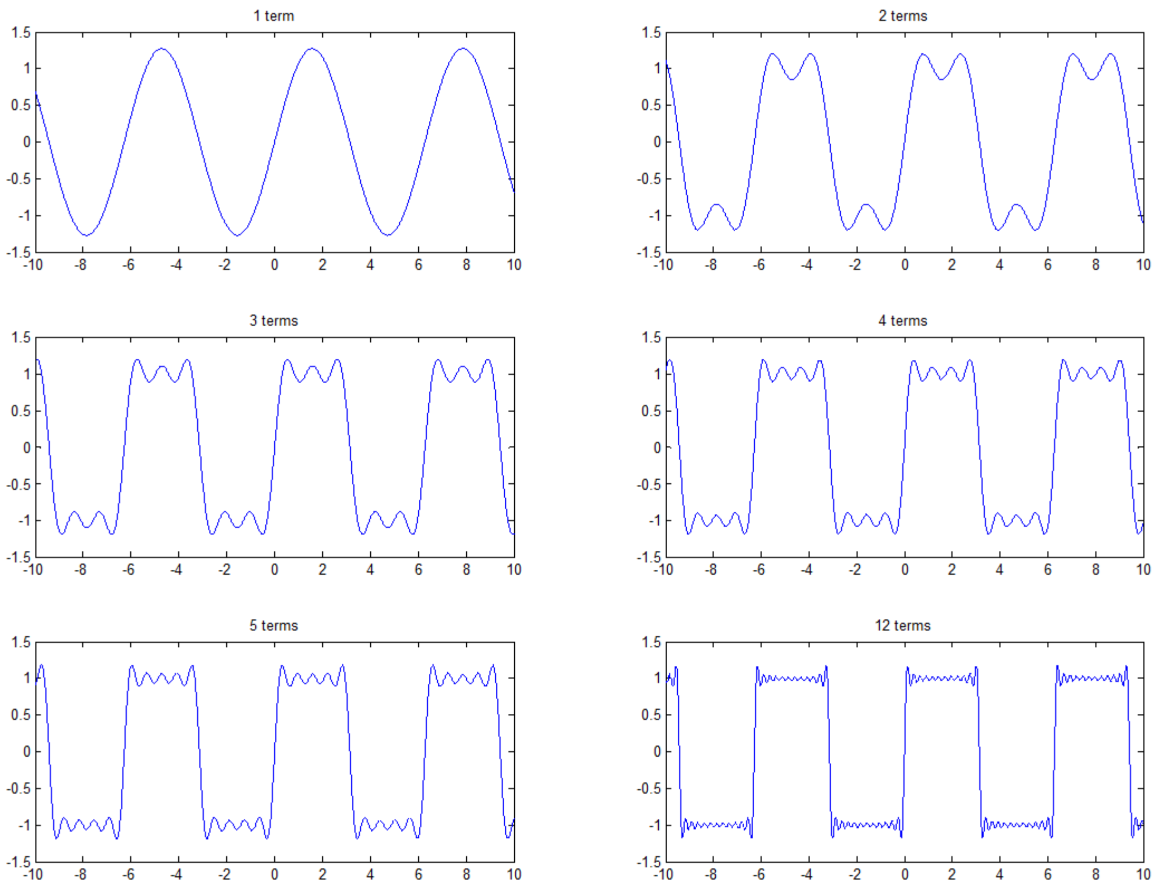
Πίνακας 1: Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

### 2.3 Μερικές ακόμα παρατηρήσεις

1. Τα μαθηματικά που περιγράφουν την ανάλυση Fourier πρέπει να σας είναι ξεκάθαρα, σαν απλά μαθηματικά. Το πρόβλημα είναι ότι δεν πρέπει να αρκείστε σε αυτό. Πρέπει να καταλάβετε πώς αυτά ερμηνεύονται απ'τη σκοπιά του μηχανικού. Δυστυχώς η ερμηνεία από την πρακτική σκοπιά της ανάλυσης Fourier έτσι όπως την έχουμε γράψει, δεν είναι βολική. Ας αλλάξουμε στυλ. Αποδεικνύεται – δείτε στις σημειώσεις σας – ότι κάθε *πραγματικό, περιοδικό σήμα* μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{15}$$

όπου $A_0 = X_0$, $A_k = 2|X_k|$, και $\phi_k = \angle X_k$. Είναι προφανές ότι η σχέση (15) προκύπτει ΑΜΕΣΑ, αν έχουμε βρει όλους τους αγνώστους της σχέσης (8). ;-) Αυτή η σχέση είναι ΠΛΗΡΩΣ ισοδύναμη με την αντίστοιχη σχέση των εκθετικών. Μάλιστα υπάρχουν τύποι για τον υπολογισμό των $A_k$ χωρίς τη χρήση του $X_k$. Εδώ λοιπόν είναι πολύ πιο φανερό ότι ένα περιοδικό, πραγματικό σήμα, αναλύεται σε ένα άθροισμα ημιτόνων, με συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους $f_0$. Το σχήμα




Σχήμα 8: Ανάλυση πραγματικού σήματος σε ημίτονα

8 δείχνει ένα πολύ γνωστό σήμα και το πώς αυτό προσεγγίζεται σιγά σιγά από το άθροισμα των ημιτόνων, τα οποία έχουν συχνότητες πολλαπλάσιες της $f_0 = \frac{1}{2\pi}$.

2. Πώς προέκυψαν αυτοί οι τύποι όμως; Ειδικά οι τύποι με τα ολοκληρώματα των $X_k$ είναι αρκετά περίεργοι. Τι σημαίνουν; Γιατί εκείνα τα ολοκληρώματα δίνουν τους συντελεστές $X_k$; Γιατί πολλαπλασιάζουμε το $x(t)$ με $e^{-j2\pi k f_0 t}$ και μετά ολοκληρώνουμε; Η απάντηση δίνεται από την έννοια της *προβολής*.
Ας πούμε, εντελώς εκλαϊκευμένα, ότι είστε σε ένα δωμάτιο με μια λάμπα στην οροφή. Προφανώς, στο πάτωμα θα υπάρχει μια σκιά σας, λόγω του φωτισμού. Αυτή η σκιά σας θα είναι είτε μεγάλη είτε μικρή – ανάλογα τη θέση σας στο χώρο. Η λάμπα ‘‘προβάλλει’’ τον εαυτό σας στο πάτωμα, μέσω της σκιάς σας. Η σκιά σας είναι δηλαδή μια προβολή του εαυτού σας στο πάτωμα. Αν τώρα κάνετε τις αντικαταστάσεις

   - πάτωμα == συναρτήσεις βάσης $e^{-j2\pi k f_0 t}$,
   - εαυτός == περιοδικό σήμα,

- λάμπα == ολοκλήρωμα, και
- συντελεστές $X_k$ == σκιά,

έχετε την αναλογία. :-) Όπως η λάμπα προβάλλει εσάς στο πάτωμα μέσω της σκιάς σας, έτσι το ολοκλήρωμα των συντελεστών Fourier προβάλλει το $x(t)$ σε ένα χώρο από εκθετικά $e^{-j2\pi kf_0t}$. Αν το αποτέλεσμα $X_k$ είναι μεγάλο, σημαίνει ότι περιέχεται ''πολύ'' απ'το $e^{-j2\pi kf_0t}$ μέσα στο περιοδικό σήμα. Στη δική μας αναλογία, η σκιά σας είναι αρκετά μεγάλη στο πάτωμα του δωματίου. :-) Αντίστοιχα, όταν το αποτέλεσμα είναι μικρό. Όταν το σήμα δεν περιέχει καθόλου μια συγκεκριμένη συχνότητα, δηλ. ένα συγκεκριμένο εκθετικό, τότε το ολοκλήρωμα θα πρέπει να είναι μηδέν. Αντίστοιχα, στο δικό μας παράδειγμα, βρίσκεστε ακριβώς κάτω απ'τη λάμπα, άρα η σκιά σας δεν προβάλλεται πουθενά στο πάτωμα. :-)
Φυσικά, για κάθε $k$ συνήθως υπάρχει διαφορετική τιμή του $X_k$. Αυτό σημαίνει ότι το $x(t)$ που προβάλλουμε έχει διαφορετικό μέγεθος ''σκιάς '', $X_k$, πάνω σε κάθε $e^{-j2\pi kf_0t}$, για κάθε τιμή του $k = k_0$. Άρα το συγκεκριμένο εκθετικό $e^{-j2\pi k_0f_0t}$ περιέχεται ''πολύ'' ή ''λίγο'' στο περιοδικό σήμα, ανάλογα με την τιμή του $X_{k_0}$. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε στη δική μας αναλογία ως μετακίνηση της λάμπας σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Κάθε μετακίνηση δηλώνει μια διαφορετική τιμή του $k = k_0$, άρα η σκια που παράγεται θα έχει ένα συγκεκριμένο ''μέγεθος '', $X_{k_0}$.
Μπορούμε λοιπόν τελικά να πούμε ότι το περιοδικό σχήμα αναλύεται σε μια άπειρη, εν γένει, σειρά από εκθετικά, των οποίων το ''βάρος '', δηλ. το πόσο ''πολύ'' ή ''λίγο'' περιέχονται στο περιοδικό σήμα, σχετίζεται με την προβολή του σήματος πάνω στην οικογένεια αυτών των εκθετικών σημάτων. Ακριβώς όμοια είναι η ιστορία αν στη θέση των εκθετικών βάλουμε τα ημίτονα, όπως αποδεικνύει η σχέση (15).

Για παράδειγμα, έστω οτι αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα, και ένας συντελεστής Fourier είναι $X_3 = 2e^{j\pi/4}$, τότε αυτό τι μας λέει; Δεδομένου ότι το περιοδικό σήμα συντίθεται από μιγαδικά εκθετικά ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kf_0t} \tag{16}$$

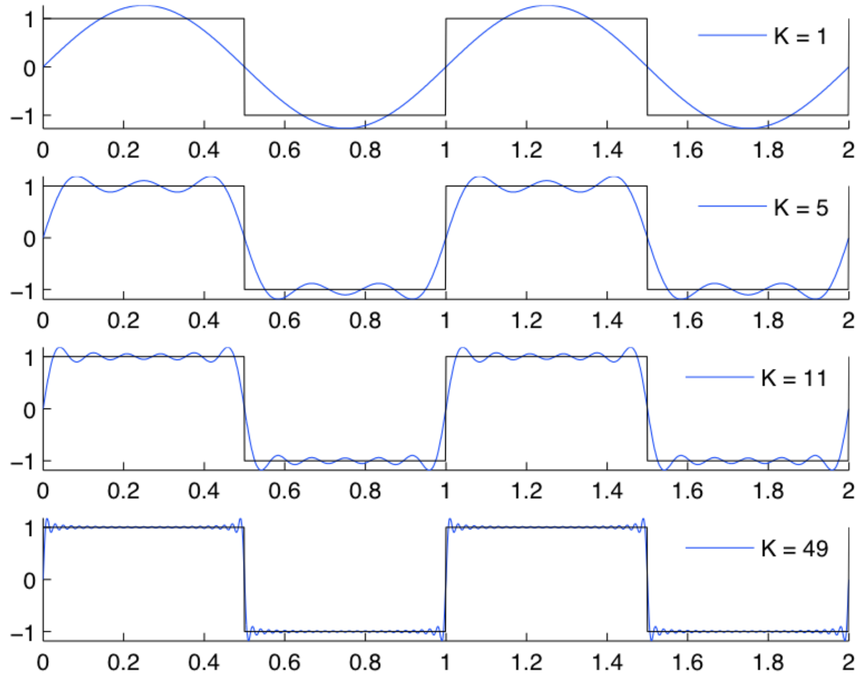
ο προαναφερθέντας συντελεστής μας λέει ότι το εκθετικό $e^{j2\pi 3f_0t}$ συνεισφέρει στη σύνθεση του σήματος με πλάτος 2 και φάση $\pi/4$. Αν αυτό σας φαντάζει κάπως δυσνόητο (αν και δε θα έπρεπε), τότε αφού το σήμα ειναι πραγματικό, θα έχει και ένα συντελεστή $X^*(3) = 2e^{-j\pi/4}$. Αν προσθέσουμε τα εκθετικά $X_3e^{j2\pi 3f_0t} + X_3^*e^{-j2\pi 3f_0t}$ θα έχουμε:

$$X_3e^{j2\pi 3f_0t} + X_3^*e^{-j2\pi 3f_0t} = 2e^{j2\pi 3f_0t+\pi/4} + 2e^{-j2\pi 3f_0t-\pi/4} = 4\cos(2\pi 3f_0t + \pi/4) \tag{17}$$

Αυτό ξεκάθαρα δηλώνει ότι το περιοδικό σήμα που αναλύουμε περιέχει τον όρο $4\cos(2\pi 3f_0t + \pi/4)$, με άλλα λόγια, για να κατασκευάσουμε το σήμα που αναλύουμε είναι *αναγκαίο* να χρησιμοποιήσουμε ένα ημίτονο με συχνότητα $f_3 = 3f_0$, πλάτος $A = 4$, και φάση $\phi = \pi/4$ (μεταξύ άλλων ημιτονων, πιθανότατα). Έτσι λοιπόν, τώρα σας ειναι ξεκάθαρο τι ακριβώς σημαίνουν οι συντελεστές Fourier όσον αφορά τη σημασια τους στην ανάλυση και στη σύνθεση.

3. Φυσικά παρατηρείτε ότι η σειρά Fourier αποτελείται από άπειρα εκθετικά (ή ημίτονα). Στην πράξη, δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα ημίτονα. Αναγκαστικά κρατάμε έναν αριθμό από αυτά. Δείτε παρακάτω τη σχετική παράγραφο *Σειρές Fourier στην πράξη*, για το πως η πρόσθεση όλων αυτών των ημιτόνων δίνει το αρχικό, περιοδικό σήμα. Για μια γρήγορη ματιά, δείτε το σχήμα 9.

4. Παρατηρήστε στο σχήμα 9 ότι στα άκρα του παλμού υπάρχει μια ταλάντωση. Αυτή η ταλάντωση ονομάζεται *φαινόμενο Gibbs* και δεν εξαλείφεται στην πράξη, λόγω του ότι πάντα χρησιμοποιούμε πεπερασμένο αριθμό ημιτόνων για να προσεγγίσουμε το περιοδικό σήμα. Οφείλεται στο γεγονός ότι η ασυνέχεια του παλμού (αυτές οι ακαριαίες άνοδοι και κάθοδοι του περιοδικού σήματος) δεν μπορεί να προσεγγιστεί από πεπερασμένο αριθμό συνεχών συναρτήσεων.

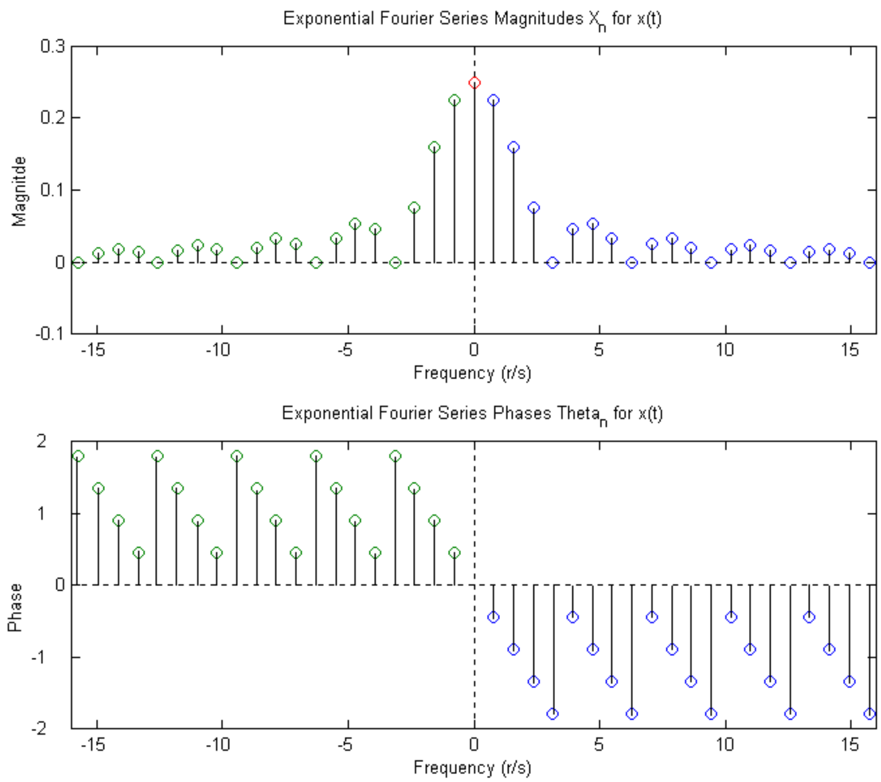



Σχήμα 9: Προσέγγιση τετραγωνικού περιοδικού παλμού από 49 ημίτονα

5. Η ανάλυση σε σειρές Fourier εφαρμόζεται σε περιοδικά σήματα, δηλ. σε σήματα άπειρης διάρκειας που έχουν το χαρακτήρα της περιοδικότητας. Αυτά τα σήματα λέγονται *σήματα ισχύος*, διότι έχουν πεπερασμένη ισχύ και άπειρη ενέργεια.

6. Επίσης, μια βολική αναπαράσταση της ανάλυσης σε σειρές Fourier είναι η σχεδίαση του *φάσματος πλάτους* και του *φάσματος φάσης*. Οι φασματικές αναπαραστάσεις (και οι δυο μαζί) μας δίνουν ΟΛΗ την απαραίτητη πληροφορία για το περιοδικό σήμα. Με άλλα λόγια, αν έχουμε τις φασματικές αναπαραστάσεις, μπορούμε να γράψουμε την σειρά Fourier που αυτές αντιπροσωπεύουν. Σημαντικό! Θυμίζεται ότι στο φάσμα πλάτους αναπαριστούμε το $|X_k|$, δηλ. το πως αλλάζει το πλάτος των συντελεστών ανά συχνότητα, ενώ στο φάσμα φάσης το $\angle X_k$, που δηλώνει το πως αλλάζει η φάση των συντελεστών ανά συχνότητα. Για παράδειγμα, στο σχήμα 10, βλέπετε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης ενός περιοδικού σήματος. Οι συχνότητες στους οριζόντιους άξονες εδώ παρουσιάζονται σε μονάδα μέτρησης rad/sec (δηλ. στη λεγόμενη γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi f$), κι όχι Hz, ενώ η φάση μετριέται σε ακτίνια (rad). Για την ακρίβεια, η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ και η συχνότητα $f$ χρησιμοποιούνται ευρέως και εναλλάξ στη βιβλιογραφία. Εμείς προτιμούμε την συχνότητα $f$ που μετριέται σε Hz. Βλέπετε ότι οι μπλε τιμές του $|X_k|$ αντιστοιχούν στα θετικά $k$, ενώ οι πράσινες τιμές του $|X_k|$ αντιστοιχούν στα αρνητικά $k$. Η κόκκινη τιμή είναι η μέση τιμή του σήματος, το $X_0$. Όμοια και για τις τιμές της φάσης, $\angle X_k$. Βλέπετε ότι για τις τιμές $k = \pm k_0$, οι τιμές του φάσματος $|X_{k_0}|$ είναι ίδιες, και οι τιμές του φάσματος φάσης $\angle X_{k_0}$ είναι αντίθετες. Άρα τα φάσματα αυτά αντιστοιχούν σε πραγματικό σήμα, γιατί ικανοποιούν την ιδιότητα $X_k^* = X_{-k}$. Οπότε πρέπει να έχετε υπόψη σας ότι ένα πραγματικό σήμα έχει *άρτιο* φάσμα πλάτους και *περιττό* φάσμα φάσης. ;-)

7. Προσέξτε ότι το μέτρο των συντελεστών Fourier, $|X_k|$, είναι σταθερό ή φθίνει και τείνει στο 0 όσο το $k \to +\infty$. Αυτό είναι ΚΑΝΟΝΑΣ στο φάσμα πλάτους, όταν έχουμε άπειρα $X_k$. Δε θα μπορούσαν




Σχήμα 10: Φάσμα πλάτους (πάνω) και φάσμα φάσης (κάτω) ενός περιοδικού σήματος

τα $|X_k|$ να αυξάνονται, γιατί ένα τέτοιο άθροισμα $|X_k|$ θα έδινε συνολικά άπειρο πλάτος στο περιοδικό σήμα. Έχοντας αυτό στο μυαλό σας, και την προηγούμενη παρατήρηση, μπορείτε να ελέγχετε τις απαντήσεις σας στο φάσμα πλάτους σε θεωρητικές ασκήσεις. Τονίζεται ότι το παραπάνω ισχύει όταν αναλύουμε ένα περιοδικό σήμα σε ΑΠΕΙΡΑ ημίτονα. Όταν π.χ. έχουμε ένα άθροισμα

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{18}$$

ή

$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{19}$$

τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους ημίτονα ($N$ στην πρώτη περίπτωση, πόσα στη δεύτερη; – quiz – :-) ), άρα τα $A_k$ ή τα $X_k$ μπορούν να έχουν όποια κατανομή θέλουν, όσο αυξάνει το $k$.

8. Σίγουρα ένα στοιχείο που θα σας ξενίζει αρκετά είναι αυτό των αρνητικών συχνοτήτων στα εκθετικά. Ξέρουμε ότι συχνότητα είναι ο αριθμός επαναλήψεων ενός σήματος στη μονάδα του χρόνου, και αναμφίβολα αυτός ο αριθμός είναι μια θετική ποσότητα. Δεν μπορούμε να έχουμε $-4$ επαναλήψεις ανά δευτερόλεπτο! :-) Πώς ερμηνεύεται μια αρνητική συχνότητα; Χρησιμοποιώντας μια γνωστή ταυτότητα, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ημίτονο αρνητικής συχνότητας $-f_0$ ως

$$\cos(-2\pi f_0 t + \theta) = \cos(-(2\pi f_0 t - \theta)) = \cos(2\pi f_0 t - \theta) \tag{20}$$

Αυτή η εξίσωση δείχνει καθαρά ότι η συχνότητα του ημιτόνου είναι $|f_0|$, και είναι θετική. Πώς τώρα όμως ερμηνεύουμε τις φασματικές γραμμές στις αρνητικές συχνότητες; Ένας ασφαλής τρόπος είναι να πούμε απλά ότι το φάσμα είναι μια γραφική αναπαράσταση των συντελεστών $|X_k|$ συναρτήσει του $f$. Η παρουσία αρνητικών συχνοτήτων απλά σημαίνει ότι υπάρχει ένα εκθετικό μιας τέτοιας αρνητικής συχνότητας στη σειρά Fourier που αναλύουμε. Απλό, έτσι δεν είναι; :-D Επίσης, έχετε υπόψη σας ότι δυο εκθετικά στις συχνότητες $kf_0$ και $-kf_0$, ιδίου μέτρου $A$, δίνουν ένα ημίτονο πλάτους $2A$ στη συχνότητα $kf_0$.

9. Ας πούμε και δυο κουβέντες για το περίφημο θεώρημα του Parseval. Ας ξαναγράψουμε εδώ τις αναπαραστάσεις κατά Fourier που έχουμε δει:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) \tag{21}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \tag{22}$$

Ας δούμε τη σχέση 21 πρώτα. Κάθε όρος στο δεξιό μέρος είναι ένα περιοδικό σήμα, δηλ. ένα σήμα ισχύος. Αποδεικνύεται ότι η ισχύς του αθροίσματος συνημιτόνων ισούται με το άθροισμα των ισχύων των επιμέρους συνημιτόνων. Άρα η ισχύς του $x(t)$ είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ισχύων των συνημιτόνων που το αποτελούν. Αυτό σημαίνει ότι

$$P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \tag{23}$$

και αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το θεώρημα του Parseval: δηλώνει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος είναι ίση με το άθροισμα των ισχύων των συντελεστών Fourier.

Φυσικά μπορούμε να γράψουμε το ίδιο και για το εκθετικό ανάπτυγμα Fourier:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \tag{24}$$

# 3 Οι σειρές Fourier στην πράξη

Η παράγραφος αυτή δεν έχει σκοπό τόσο να σας δείξει πώς αναπτύσσεται θεωρητικά ένα περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier, αλλά να δείξει πώς ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΤΑΙ ένα περιοδικό σήμα από τα συνημίτονα της σειράς Fourier και τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σήμα ΠΕΡΙΕΧΕΙ κάποιες συχνότητες.

Έστω λοιπόν το περιοδικό σήμα $x(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδό του $T_0$ ως:

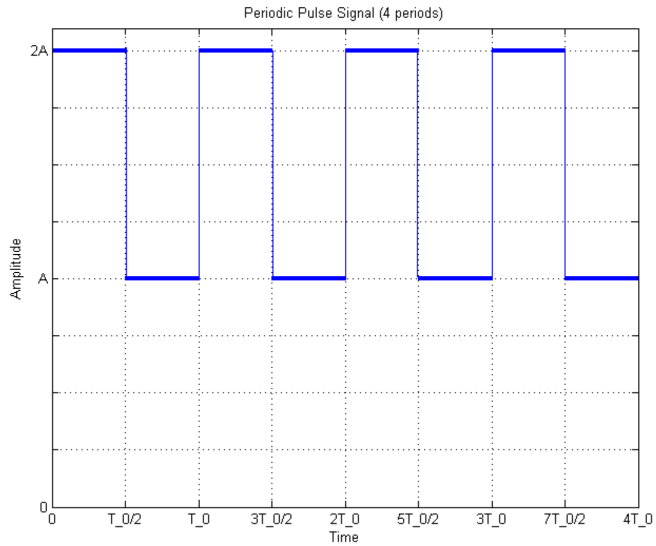
$$x(t) = \begin{cases} 2A, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ A, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

το οποίο θέλουμε να το αναπτύξουμε σε σειρά Fourier. Τέσσερις περίοδοι του σχήματος αυτού φαίνονται παρακάτω, στο σχήμα 11. Αποδείξτε μόνοι σας - εξάσκηση! :-) - ότι:

$$X_0 = \frac{3A}{2},\ X_k = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k\ odd \\ 0, & k\ even \end{cases} \tag{25}$$

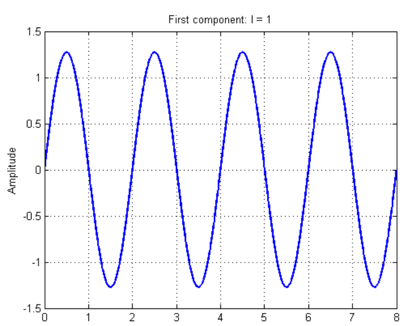
Έστω λοιπόν ότι αποδείξατε τα παραπάνω. :-) Έτσι, το περιοδικό σήμα που συζητάμε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως εξής:

$$x(t) = \frac{3A}{2} + \sum_{k=-\infty, k\ odd}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{3A}{2} + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2A}{\pi(2l-1)} \cos(2\pi(2l-1) f_0 t - \frac{\pi}{2}) \tag{26}$$

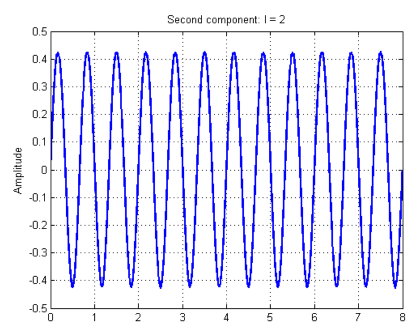



Σχήμα 11: Τέσσερις περίοδοι ενός περιοδικού σήματος

(ουσιαστικά θέσαμε παραπάνω $k = 2l - 1$. Ο συμβολισμός με το $l$ αντί για $k$ έγινε για να μπορούμε να ξεχωρίζουμε σε ποιό δείκτη αναφερόμαστε στη διάρκεια του κειμένου - δεν είναι λάθος να κρατήσουμε το δείκτη $k$ παντού) Θα χρησιμοποιήσουμε MATLAB για να δούμε πως σχηματίζεται το σήμα από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων. Για πρακτικούς λόγους, ας ορίσουμε ότι $A = 2$ και $T_0 = 2 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2}Hz$. Γράφοντας κατάλληλο κώδικα, ας δούμε πως σχηματίζεται σιγά σιγά το περιοδικό σήμα μας από το άθροισμα αυτών των συνημιτόνων που βρήκαμε παραπάνω. Προτού το δούμε αυτό, ας δούμε ένα-ένα τα πρώτα λίγα συνημίτονα του παραπάνω αθροίσματος στα σχήματα 12, 13. Όλα αυτά τα συνημίτονα έχουν συχνότητα




(α΄) Πρώτο συνημίτονο της σειράς Fourier

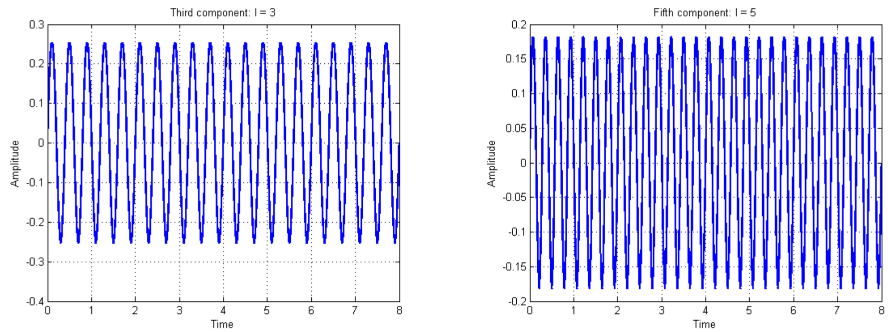



(β΄) Τρίτο συνημίτονο της σειράς Fourier

Σχήμα 12: Συνημίτονα που συνθέτουν το περιοδικό σήμα - 1

ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας $f_0 = 0.5$ Hz. Βλέπετε ότι όσο προχωράμε προς τις υψηλότερες αρμονικές συχνότητες, τόσο η συχνότητα των συνημιτόνων μεγαλώνει και το πλάτος τους φθίνει. Λογικό, αν σκεφτούμε αυτό που μόλις είπαμε για τις αρμονικές και την παρατήρηση για τα πλάτη σε προηγούμενη παράγραφο. Το πρώτο συνημίτονο του αθροίσματος έχει συχνότητα $(2l-1)f_0 = (2*1-1)f_0 = f_0$, το δεύτερο έχει συχνότητα $(2*2-1)f_0 = 3f_0$, το τρίτο $5f_0$, ..., το 21ο έχει συχνότητα $41f_0$.

Βλέπετε ότι οι συχνότητες είναι επίσης περιττές ακέραιες πολλαπλάσεις της θεμελιώδους. Είναι αναμενόμενο, μιας και είδαμε παραπάνω ότι το ανάπτυγμά μας αποτελείται μόνο από περιττά $k$. Τα άρτια $k$ έχουν πλάτος μηδέν, άρα τα αντίστοιχα συνημίτονα είναι μηδενικά - προσέξτε, μιλάμε για τα $k$, όχι για τα $l$, τα




(α΄) Πέμπτο συνημίτονο της σειράς Fourier (β΄) Έβδομο συνημίτονο της σειράς Fourier

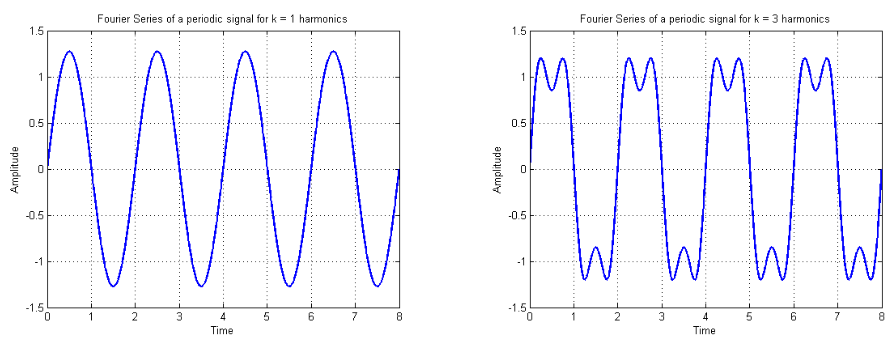
Σχήμα 13: Συνημίτονα που συνθέτουν το περιοδικό σήμα - 2

οποία παίρνουν όλες τις ακέραιες τιμές αλλά δίνουν μόνο περιττά $k$!

Προσοχή ξανά όμως! :-) Όταν μιλάμε για αρμονικές συχνότητες και για τα αντίστοιχα συνημίτονα, αναφερόμαστε στις ακέραιες πολλαπλάσεις της θεμελιώδους, άσχετα αν το αντίστοιχο πλάτος του συνημιτόνου είναι μηδέν! Δηλ. για παράδειγμα, η πρώτη αρμονική έχει πλάτος $\frac{4}{\pi}$ και συχνότητα $f_0$, η δεύτερη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα $2f_0$, η τρίτη αρμονική έχει πλάτος $\frac{4}{3\pi}$ και συχνότητα $3f_0$, η τέταρτη έχει πλάτος μηδέν και συχνότητα $4f_0$, η πέμπτη έχει πλάτος $\frac{4}{5\pi}$ και συχνότητα $5f_0$, κ.ο.κ.

Τέλος, αν υπολογίσετε τα πλάτη των παραπάνω συνημιτόνων από τον τύπο της σειράς Fourier, θα βρείτε αντίστοιχα $\frac{4}{\pi} = 1.2732$, $\frac{4}{3\pi} = 0.4244$, $\frac{4}{5\pi} = 0.2546$, $\frac{4}{7\pi} = 0.1819$, $\frac{4}{41\pi} = 0.0311$, που συμβαδίζουν απόλυτα με τα πλάτη των συνημιτόνων στα παραπάνω σχήματα.

Οπότε αυτό που μας λέει η θεωρία των σειρών Fourier είναι ότι αν αθροίσουμε ΟΛΑ αυτά τα συνημίτονα (και προσθέσουμε στο τέλος και τη μέση τιμή $X_0$) το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι ίδιο κι απαράλλακτο με το περιοδικό σήμα που είχαμε εξ΄ αρχής! Φυσικά για να είναι απόλυτα ίδιο, πρέπει να αθροίσουμε άπειρα συνημίτονα – έτσι λέει η θεωρία. Στην πράξη φυσικά αυτό δεν μπορεί να γίνει. Θα αθροίσουμε κάποια από αυτά, όσα θέλουμε εμείς, με βάση κάποιο οπτικό, μαθηματικό, ή άλλο κριτήριο. Αυτό σημαίνει ότι το σήμα που θα πάρουμε θα έχει κάποιες διαφορές με το αρχικό. Το πόσο μεγάλες θα είναι, εξαρτάται από το πλήθος των συνημιτόνων που θα αθροίσουμε. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν να αθροίζουμε ένα-ένα τα συνημίτονα για να δούμε πώς σχηματίζεται το αρχικό σήμα. Δείτε το αποτέλεσμα στα σχήματα 14, 15, 16, 17. Βλέπετε ότι για 1000 αρμονικές, το αποτέλεσμα είναι ουσιαστικά ολόιδιο στο μάτι με το αρχικό σήμα

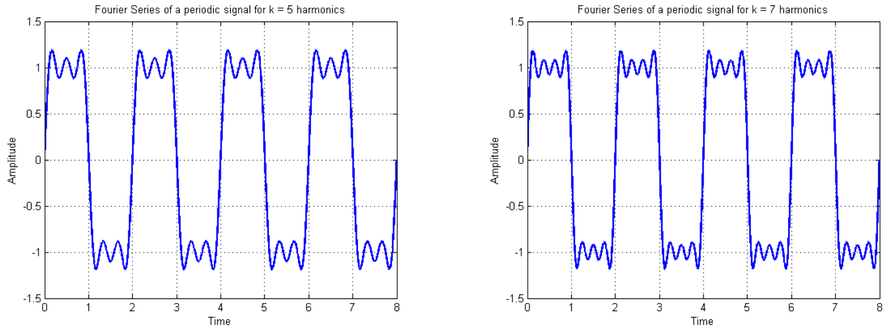



(α΄) Άθροισμα ενός ημιτόνου της σειράς Fourier (β΄) Άθροισμα τριών ημιτόνων της σειράς Fourier

Σχήμα 14: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 1

- στην ουσία δεν είναι όμως.

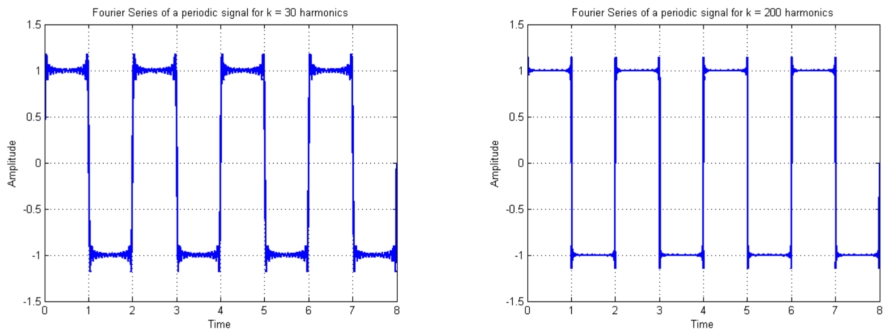
Τώρα λοιπόν είναι πια ξεκάθαρο γιατί η ανάλυση σε σειρές Fourier μας δίνει την απάντηση για το ποιό είναι το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος, δηλ. με άλλα λόγια ποιές συχνότητες περιέχει ένα σήμα.




(α′) Άθροισμα πέντε συνημιτόνων της σειράς Fourier

(β′) Άθροισμα επτά συνημιτόνων της σειράς Fourier

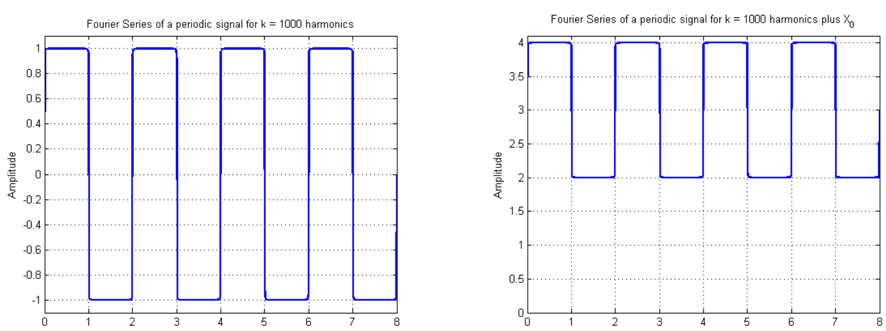
Σχήμα 15: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 2




(α′) Άθροισμα τριάντα συνημιτόνων της σειράς Fourier

(β′) Άθροισμα διακοσίων συνημιτόνων της σειράς Fourier

Σχήμα 16: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 3




(α′) Άθροισμα χιλίων συνημιτόνων της σειράς Fourier

(β′) Άθροισμα $X_0$+ χιλίων συνημιτόνων της σειράς Fourier

Σχήμα 17: Σύνθεση σήματος από συνημίτονα - 4

Περιέχει αυτές τις συχνότητες των οποίων τα συνημίτονα έχουν μη μηδενικό πλάτος στο ανάπτυγμα κατά Fourier, δηλ. στο παράδειγμά μας τις συχνότητες $f_0, 3f_0, 5f_0, \cdots = 0.5, 1.5, 4.5, \cdots$ Hz.

Βάσει αυτών, μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε αμφίπλευρο φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης, μια και έχουμε την εκθετική αναπαράσταση του αναπτύγματος. Το πλάτος $X_k$ είναι ίσο με $X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, για περιττά $k$. Άρα θέτοντας περιττές τιμές στο $k$, έχουμε τα αντίστοιχα πλάτη για τις περιττές συχνότητες $f_0, 3f_0, 5f_0, \cdots$. Προσοχή όμως, γιατί αφού το πλάτος $X_k$ είναι μιγαδικός αριθμός, θα πρέπει στο φάσμα πλάτους να βάλετε το $|X_k|$. Όμοια για το φάσμα φάσης, το οποίο είναι σταθερό και ίσο με $-\frac{\pi}{2}$ για τις θετικές περιττές συχνότητες, ενώ είναι μηδέν για τις θετικές άρτιες συχνότητες, και ίσο με $\frac{\pi}{2}$ για τις αρνητικές περιττές συχνότητες (και πάλι μηδέν για τις αρνητικές άρτιες συχνότητες). Καταλαβαίνετε το γιατί; Σχεδιάστε τα! :-)

# 4 Όμως...

Είδαμε – στη θεωρία σας και εδώ – μια μέθοδο αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος ως ένα άθροισμα εκθετικών σημάτων των οποίων οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους. Αυτή η αναπαράσταση (σειρά Fourier), καθώς και τα συμπεράσματά της, είναι πολύτιμη σε πολλές εφαρμογές. Όμως, έχει τα παρακάτω μειονεκτήματα:

1. Η σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για περιοδικά σήματα. Όλα όμως τα σήματα στην πράξη είναι μη περιοδικά (θυμηθείτε ότι ένα περιοδικό σήμα ξεκινά από το $-\infty$).

2. Η τεχνική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε ασυμπτωτικά ευσταθή συστήματα, αλλά όχι τόσο εύκολα σε ασταθή ή οριακά ευσταθή συστήματα. Προς το παρόν, δε γνωρίζετε τι σημαίνουν όλα αυτά, αλλά θα το μάθετε. :-)

Το πρώτο μειονέκτημα μπορεί να υπερκεραστεί με την αναπαράσταση μη περιοδικών σημάτων ως άθροισμα εκθετικών σημάτων. Αυτό δεν είναι άλλο από τον περίφημο *μετασχηματισμό Fourier*, που θα δείτε αμέσως μετά. Το δεύτερο μειονέκτημα μπορεί να υπερκεραστεί με τη χρήση εκθετικών της μορφής $e^{-st}$, όπου το $s$ δεν είναι απαραίτητα ίσο με $j2\pi kf_0$, αλλά μπορεί να πάρει κι άλλες τιμές. Αυτή τη γενίκευση θα τη δείτε σύντομα, στον περίφημο *μετασχηματισμό Laplace*. ;-)