

Συνέλιξη και Συσχέτιση

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

1 Απριλίου 2014

1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι η συνέλιξη αποτελεί μια πράξη πολύ σημαντική, γιατί σχετίζεται με την ανάλυση συστημάτων, αλλά και με το γεγονός ότι η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο όταν αλλάζουμε χώρους (από το χρόνο στη συχνότητα και αντίστροφα). Η συνέλιξη, λόγω του ότι εμπλέκει τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος, έχει μια δυσκολία. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *ανάκλαση και μετατόπιση*.

2 Η συνέλιξη αναλυτικά

Εδώ θα ξεδιαλύνουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

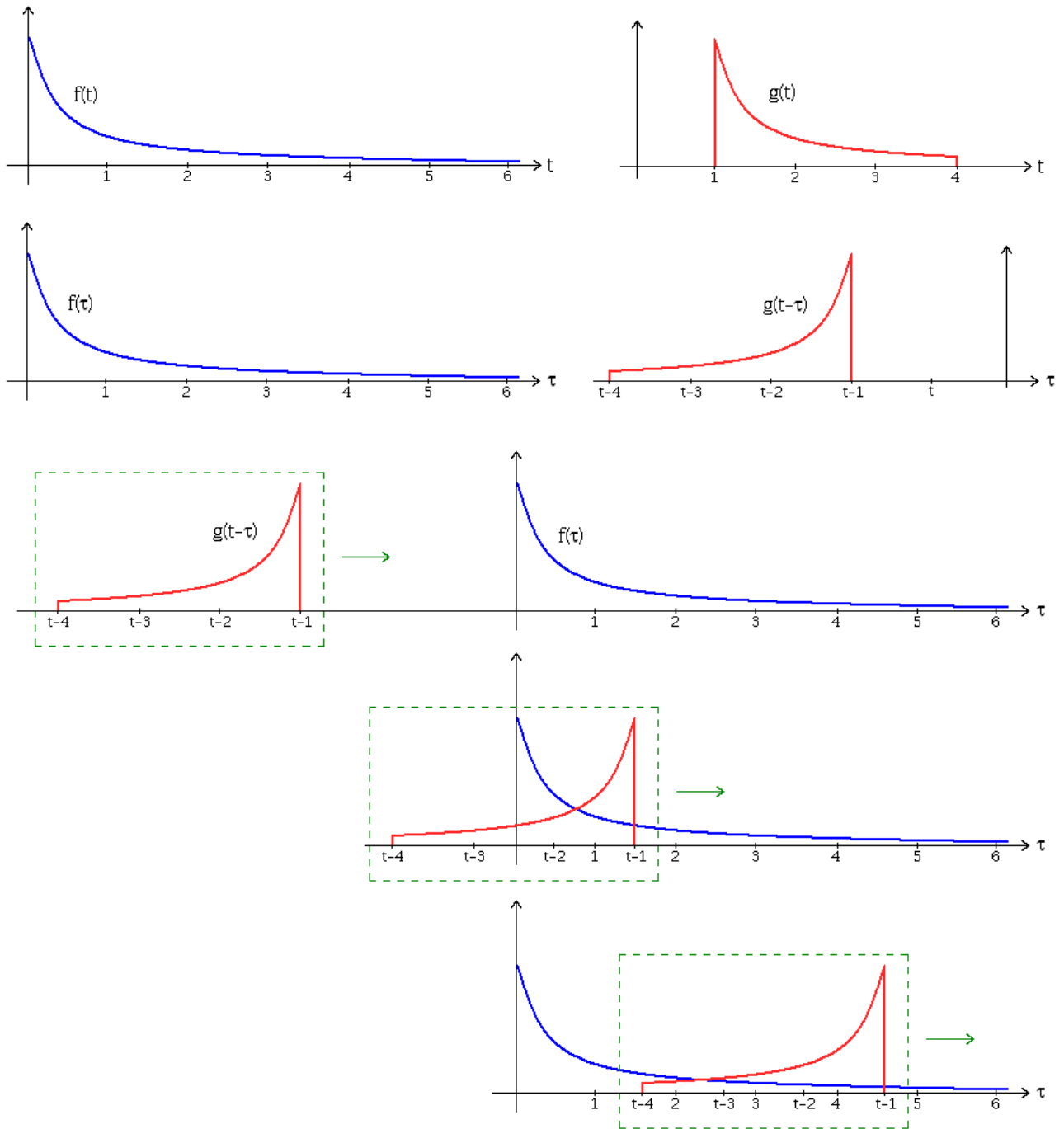
$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ ! ΌΧΙ το t . Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, το ολοκλήρωμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το $x(\tau)$ και το $y(t - \tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y(t) \rightarrow y(\tau) \rightarrow y(-\tau) \rightarrow y(-\tau + t) = y(t - \tau) \quad (2)$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και *ακολουθώς* μια *μετατόπιση* ως προς t . Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ . Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $f(t)$ και το $g(t)$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να παίζουμε με το $g(t)$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσεσι του τ και όχι του t , όπως ακριβώς επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, και το $g(\tau)$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά t . Θυμίζω ότι αυτό το t το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $g(\tau)$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.
- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $g(t - \tau)$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το “σέρνουμε” πάνω στον ίδιο άξονα με το $f(\tau)$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.



Σχήμα 1: Διαδικασία συνέλιξης

- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $f(\tau)$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. Άρα, αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του $g(t-\tau)$ συναντά το αριστερό άκρο του $f(\tau)$ και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του $g(t-\tau)$ ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t-1 \geq 0 \Rightarrow t \geq 1 \text{ και } t-4 \leq 0 \Rightarrow t \leq 4 \quad (3)$$

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $t - 1$, εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων, ως

$$c_{fg}(t) = \int_0^{t-1} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \dots, \quad (4)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $g(t - \tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $f(\tau)$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της $g(t - \tau)$ περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4 \quad (5)$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

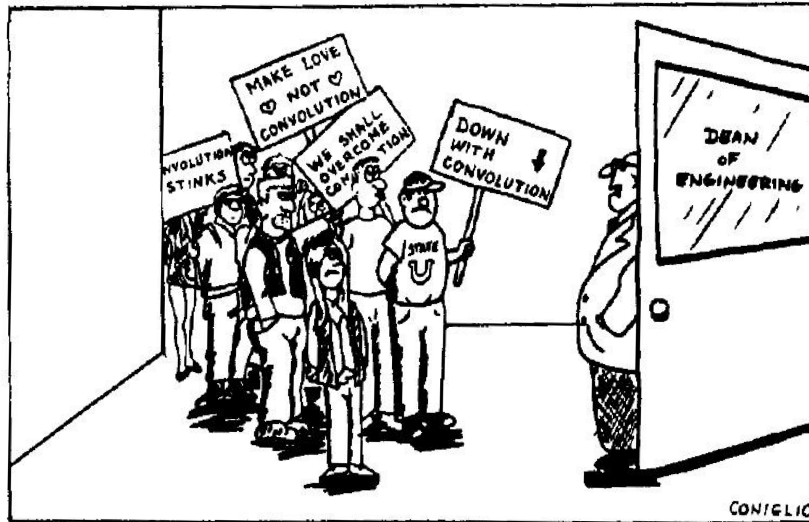
$$c_{fg}(t) = \int_{t-4}^{t-1} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \dots, \quad (6)$$

όπου και αντικαθιστούμε τις μαθηματικές μορφές των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

$$c_{fg}(t) = 0, \quad t < 1 \quad (7)$$

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις...



Σχήμα 2: Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη...

1. Όπως βλέπετε, το πιο σημαντικό πράγμα είναι να μπορείτε να υπολογίσετε το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του ολοκληρώματος. Οι πράξεις στο ολοκλήρωμα είναι απλά μαθηματικά.
2. Η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{fg}(t) = f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = c_{gf}(t) \quad (8)$$

δηλ. αν παίζαμε με το $f(t)$ αντί για το $g(t)$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

3. Προτιμούμε να παίζουμε με το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδραστικότητα. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.
4. Χρήσιμη παρατήρηση για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a + c, b + d]$. Είναι χρήσιμη παρατήρηση για να μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο σχήμα 1, είχαμε συνέλιξη της $g(t)$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{gg}(t) = g(t) * g(t)$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.
5. Στη βιβλιογραφία, θα βρείτε τον ορισμό της συνέλιξης με διαφορετικές μεταβλητές. Π.χ.

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad (9)$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)dt \quad (10)$$

Και οι δυο παραπάνω σχέσεις είναι σωστές. Απλά αλλάξαμε τις μεταβλητές t, τ μεταξύ τους. Διαλέξτε όποια σας βολεύει, αρκεί να είστε συνεπείς και προσεκτικοί. Σε αυτές τις σημειώσεις, προτιμούμε συνήθως την πρώτη σχέση.

6. Η γραφική επίλυση που συζητήσαμε εδώ φαίνεται εκ πρώτης όψεως περίπλοκη και αποθαρρύνει το φοιτητή. Πράγματι, κάποιοι ισχυρίζονται ότι η συνέλιξη έχει οδηγήσει πολλούς προπτυχιακούς σε τμήματα Μηχανικών Η/Υ να ενστερνιστούν τη Θεολογία, είτε για σωτηρία ψυχής είτε ως εναλλακτική καριέρα!! :-) (δείτε το περιοδικό IEEE Spectrum, Μάρτιος 1991, σελ. 60).

3 Πίνακας Συνέλιξης

Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης, όπως ο Πίνακας 1). Αυτός ο πίνακας, που αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους, μπορεί να σας βοηθήσει στον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

4 Συστήματα

Τα συστήματα δεν είναι τίποτα άλλο από σήματα κι αυτά, τα οποία συνήθως κάνουν μια συγκεκριμένη δουλειά επάνω στο σήμα εισόδου τους, $x(t)$. Αυτή η δουλειά αντικατοπτρίζεται στην έξοδο του συστήματος, $y(t)$. Το σήμα που περιγράφει το σύστημα συνήθως συμβολίζεται ως $h(t)$, και λέγεται *κρουστική απόκριση*. Η σχέση εισόδου-εξόδου ορίζεται ως η συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (11)$$

όπου $*$ συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης. Επίσης, μπορεί ένα σύστημα να περιγραφεί με μια απλή μαθηματική σχέση, ως η έξοδος συναρτήσει της εισόδου:

$$y(t) = f(x(t)) \quad (12)$$

4.1 Ιδιότητες Συστημάτων

Τα συστήματα έχουν ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες, τις οποίες και θα συζητήσουμε εδώ. Οι ιδιότητες αυτές είναι οι εξής:

1. **Συστήματα με μνήμη:** τα συστήματα με μνήμη είναι αυτά για τα οποία η έξοδος τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t)$ είναι ένα σύστημα χωρίς μνήμη, ενώ το σύστημα $y(t) = e^{x(t-1)}$ είναι ένα σύστημα με μνήμη.

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$x(t)$	$y(t)$	$x(t) * y(t)$
$x(t)$	$\delta(t - T)$	$x(t - T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1 - e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}u(t), a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^n \frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt} - e^{at} + (a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)^{n+j+1}}u(t) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t)$
$e^{at} \cos(bt + \theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} - e^{-at} \cos(bt + \theta - \phi)}{\sqrt{(a + \lambda)^2 + b^2}}u(t)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{-b}{a + \lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t)}{b - a}, \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{b - a}u(-t)$

Πίνακας 1: Πίνακας ζευγών συνέλιξεων

- Αιτιατά συστήματα:** τα αιτιατά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου ΔΕΝ απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t - 1) + \sin(x(t))$ είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα $y(t) = x(t - 2)^2 + 4x(t + 4)$ είναι μη αιτιατό, επειδή για τον υπολογισμό του $y(t)$ απαιτείται μελλοντική τιμή της εισόδου, η $x(t + 4)$. Εναλλακτικά, μπορείτε να ελέγχετε την $h(t)$, αν σας δίνεται. Αν ισχύει ότι $h(t) = 0, t < 0$, τότε το σύστημα είναι αιτιατό. Μια και είπαμε ότι ένα σύστημα δεν είναι τίποτα άλλο από ένα σήμα κι αυτό, θα δείτε λίγο παρακάτω ότι ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ικανοποιεί τη σχέση $x(t) = 0, t < 0$.
- Γραμμικά συστήματα:** τα γραμμικά συστήματα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \rightarrow y(t) &= T\{Ax_1(t) + Bx_2(t)\} \\ &= AT\{x_1(t)\} + BT\{x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Με λόγια, γραμμικά είναι τα συστήματα στα οποία αν εφαρμόσουμε ως είσοδο ένα άθροισμα σημάτων, θα πάρουμε ως έξοδο το άθροισμα των εξόδων που θα παίρναμε αν είχαμε δώσει ως είσοδο ένα-ένα

τα σήματα, κι όχι όλα μαζί ως άθροισμα. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 2x(t + 1) - 3x(t - 4)$ είναι γραμμικό, ενώ το σύστημα $y(t) = \sqrt{x(t)}$ δεν είναι γραμμικό, όπως επίσης και το $y(t) = x^2(t)$ δεν είναι γραμμικό. Η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι πολύ σημαντική.

4. **Χρονικά Αμετάβλητα συστήματα:** τα συστήματα που είναι χρονικά αμετάβλητα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι η έξοδος τους ΔΕΝ εξαρτάται ρητά από το χρόνο t . Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = 3x(t + 2) - 2\cos(x(t - 2))$ είναι χρονικά αμετάβλητο, ενώ το σύστημα $y(t) = tx(t)$ είναι χρονικά μεταβλητό.
5. **Ευσταθή συστήματα:** τα συστήματα που είναι ευσταθή είναι αυτά για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| < M_x \Rightarrow |y(t)| < M_y, \quad M_x, M_y < +\infty \quad (14)$$

Με λόγια, αν η είσοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, το σύστημα $y(t) = x(t - 1) + t$ δεν είναι ευσταθές, όπως επίσης και το σύστημα $y(t) = t/x(t + 2)$, ενώ το σύστημα $y(t) = \sin(x(t))$ είναι ευσταθές. Ο συγκεκριμένος ορισμός της ευστάθειας λέγεται και BIBO stability - Bounded Input Bounded Output stability, που δηλώνει ακριβώς ό,τι είπαμε: όταν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη, τότε και η έξοδος είναι απολύτως φραγμένη (κι όχι απαραίτητα από τον ίδιο αριθμό-φράγμα, όπως φαίνεται παραπάνω).

Από όλες αυτές τις κατηγορίες σημάτων, τα πιο σημαντικά είναι αυτά που είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, και σε αυτά θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα όταν μιλάμε για συστήματα. Η ευστάθεια είναι συνήθως μια επιθυμητή ιδιότητα αλλά δε θα τη θεωρήσουμε δεδομένη στη μελέτη μας.

4.2 Συνέλιξη και συστήματα - I

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η συνέλιξη είναι μια πολύ σημαντική πράξη, γιατί συνδέει την έξοδο, $y(t)$, ενός συστήματος με την είσοδό του, $x(t)$, μέσω της σχέσης

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (15)$$

όπου $h(t)$ η περίφημη κρουστική απόκριση, το σήμα δηλαδή που χαρακτηρίζει το σύστημά μας και τη λειτουργία του. Η αναλυτική μελέτη συστημάτων δεν είναι αντικείμενο του μαθήματος – δυστυχώς :-) – οπότε πριν δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος, ας δούμε μερικές διατάξεις συστημάτων που συναντώνται συχνά στην πράξη.



(α) Συστήματα σε σειρά

(β) Συστήματα σε σειρά - ισοδύναμη διάταξη

Σχήμα 3: Συστήματα σε σειρά

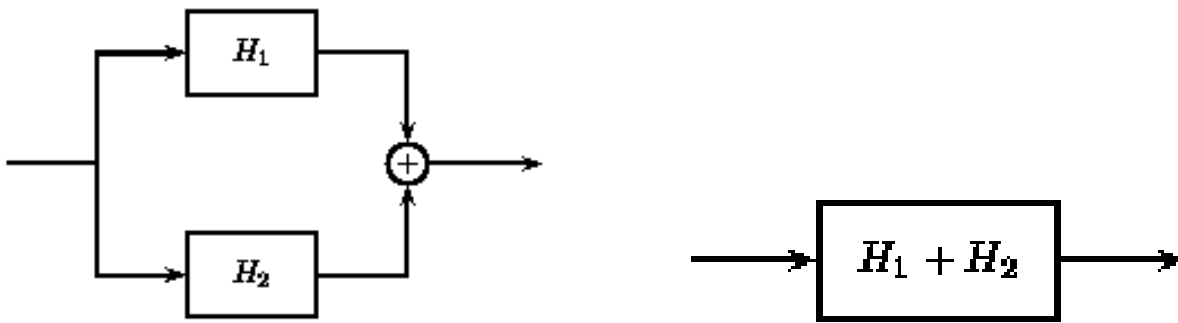
Στο σχήμα 3α', φαίνονται δυο συστήματα σε σειρά. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y_{s1}(t)$, είναι:

$$y_{s1}(t) = (x_1(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x_1(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x_1(t) * h_2(t)) * h_1(t) \quad (16)$$

λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης.

Αν αναδιατάξουμε τη σειρά των συστημάτων, θα έχουμε τη διάταξη στο σχήμα 3β', για την οποία η έξοδος είναι

$$y_{s2}(t) = (x_1(t) * h_2(t)) * h_1(t) = x_1(t) * (h_2(t) * h_1(t)) = (x_1(t) * h_1(t)) * h_2(t) \quad (17)$$



(α') Παράλληλα συστήματα

(β') Παράλληλα συστήματα - ισοδύναμη διάταξη

Σχήμα 4: Παράλληλα συστήματα

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση 16, άρα οι δυο διατάξεις είναι ισοδύναμες.

Στο σχήμα 4α', φαίνονται δυο συστήματα σε παραλληλία. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y_{s1}(t)$, είναι:

$$y_{s1}(t) = (x_1(t) * h_1(t)) + (x_1(t) * h_2(t)) = x_1(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \quad (18)$$

λόγω ιδιοτήτων της συνέλιξης.

Έστω ότι έχουμε τη διάταξη στο σχήμα 4β', για την οποία η έξοδος είναι

$$y_{s2}(t) = x_1(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (x_1(t) * h_1(t)) + (x_1(t) * h_2(t)) \quad (19)$$

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση 18, άρα οι δυο διατάξεις είναι ισοδύναμες.

4.3 Συνέλιξη και Συστήματα - II

Είπαμε προηγουμένως ότι η σχέση που συνδέει την είσοδο, $x(t)$, με την έξοδο, $y(t)$, ενός συστήματος, $h(t)$, εκφράζεται μέσω της συνέλιξης:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (20)$$

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα, και το αντίστροφο. Άρα η ίδια σχέση που περιγράφει το σύστημα μπορεί να γραφεί και ως:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (21)$$

Ο μετασχ. Fourier του συστήματος $h(t)$ λέγεται, στην ορολογία των συστημάτων, *απόκριση συχνότητας*. Ένα σύστημα $h(t)$ με απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ ίσως μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα στο χώρο των συχνοτήτων απ' ότι στο χώρο του χρόνου. Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad (22)$$

Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας f . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{N(f)}{D(f)} \quad (23)$$

όπου $N(f), D(f)$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από μια απλή διαδικασία που λέγεται “Αναπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα”, και περιγράφεται αναλυτικά στο Παράρτημα αυτών των σημειώσεων. Εν συντομία, το Αναπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα λέει ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{\beta_k - j2\pi f} \quad (24)$$

Σύμφωνα με τον πίνακα με τα ζεύγη Fourier που έχετε σε προηγούμενες σημειώσεις, μπορούμε, έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα, να βρούμε την $h(t)$, ως

$$H(f) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{\alpha_k + j2\pi f} + \sum_{k=1}^L \frac{B_k}{\beta_k - j2\pi f} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^M A_k e^{-\alpha_k t} u(t) + \sum_{k=1}^L B_k e^{\beta_k t} u(-t) \quad (25)$$

Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και το $x(t) \longleftrightarrow X(f)$, αφού και το $X(f)$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} \quad (26)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω σε αυτά.

Παράδειγμα 1:

Έστω το σύστημα

$$h(t) = e^{-3t} u(t) \quad (27)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x(t) = 2e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(t) \quad (28)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$.

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον κλασικό τρόπο του ολοκληρώματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον πίνακα με τα ζεύγη μετασχηματισμών, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) \longleftrightarrow Y(f) &= X(f)H(f) = \left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} \right) \frac{1}{3+j2\pi f} \\ &= \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} + \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} \\ &= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{3+j2\pi f} + \frac{C}{2+j2\pi f} + \frac{D}{3+j2\pi f} \longleftrightarrow \\ y(t) &= Ae^{-t} u(t) + (B+D)e^{-3t} u(t) + Ce^{-2t} u(t) \end{aligned} \quad (29)$$

με

$$A = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} (1+j2\pi f) \Big|_{f=-1/j2\pi} = \frac{2}{(3+j2\pi f)} \Big|_{f=-1/j2\pi} = 1 \quad (30)$$

$$B = \frac{2}{(1+j2\pi f)(3+j2\pi f)} (3+j2\pi f) \Big|_{f=-3/j2\pi} = \frac{2}{(1+j2\pi f)} \Big|_{f=-3/j2\pi} = -1 \quad (31)$$

$$C = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} (2+j2\pi f) \Big|_{f=-2/j2\pi} = \frac{1}{(3+j2\pi f)} \Big|_{f=-2/j2\pi} = 1 \quad (32)$$

$$D = \frac{1}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)} (3+j2\pi f) \Big|_{f=-3/j2\pi} = \frac{1}{(2+j2\pi f)} \Big|_{f=-3/j2\pi} = -1 \quad (33)$$

και άρα

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \quad (34)$$

Ας υπολογίσουμε το ίδιο με εφαρμογή του ορισμού της συνέλιξης (χωρίς γραφική λύση, μια και δεν είναι απαραίτητο). Έτσι, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{-\tau}u(\tau) + e^{-2\tau}u(\tau))e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\ &\left(\text{ισχύει ότι } u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \right) \\ &= \int_0^t 2e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_0^t 2e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_0^t 2e^{2\tau-3t}d\tau + \int_0^t e^{\tau-3t}d\tau \\ &= 2e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau + e^{-3t} \int_0^t e^{\tau}d\tau \\ &= e^{-3t}e^{2\tau} \Big|_0^t + e^{-3t}e^{\tau} \Big|_0^t \\ &= e^{-3t}(e^{2t} - 1) + e^{-3t}(e^t - 1) \\ &= e^{-t} - e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-3t} \\ &= e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-2t}, \quad 0 < t \\ &= e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) + e^{-2t}u(t) \end{aligned} \quad (35)$$

που είναι η ίδια ακριβώς σχέση με την 34! :-) Διαλέξτε τι προτιμάτε. :-)

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x(t)$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 2:

Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \quad (36)$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα $x(t)$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \quad (37)$$

Βρείτε την είσοδο, $x(t)$.

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f} \quad (38)$$

Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} Y(f) = H(f)X(f) \iff X(f) &= \frac{Y(f)}{H(f)} = \frac{\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}}{\frac{1}{3+j2\pi f}} \\ &= \frac{1}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)} \\ &= \frac{1}{3+j2\pi f} \\ &= \frac{A}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)} \\ &= \frac{A}{2+j2\pi f} + \frac{B}{1+j2\pi f} \longleftrightarrow \\ x(t) &= Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) \end{aligned} \quad (39)$$

με

$$A = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f) \Big|_{f=-2/j2\pi} = \frac{3+j2\pi f}{(1+j2\pi f)} \Big|_{f=-2/j2\pi} = -1 \quad (40)$$

$$B = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)(1+j2\pi f)}(1+j2\pi f) \Big|_{f=-1/j2\pi} = \frac{3+j2\pi f}{(2+j2\pi f)} \Big|_{f=-1/j2\pi} = 2 \quad (41)$$

και άρα τελικά η είσοδος θα είναι

$$x(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) \quad (42)$$

Μερικές παρατηρήσεις...

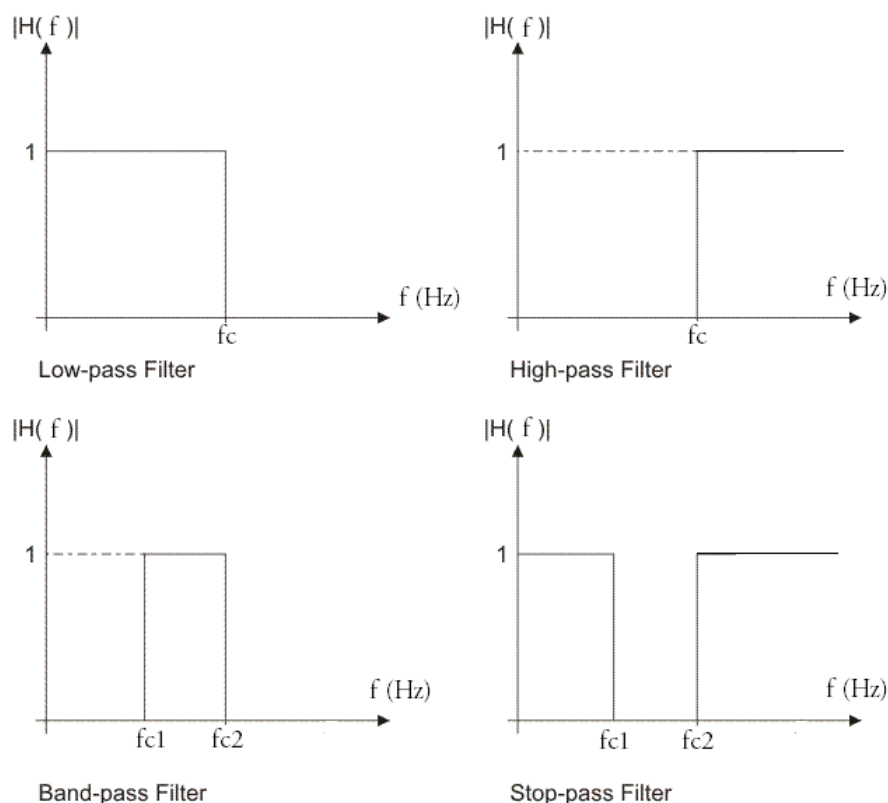
1. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το σύστημα $h(t)$ αν μας δίνεται η είσοδος και η έξοδος, $x(t), y(t)$, αντίστοιχα. Κάντε το! :-)
2. ~~Για τον υπολογισμό των σταθερών A, B, C, D παραπάνω, δείτε το Παράρτημα αυτών των σημειώσεων.~~
3. Φυσικά για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιος τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία και τριβή σε ασκήσεις. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι εμφανές με το μάτι κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε. :-)

4.4 Φίλτρα

Κάποια συστήματα εκτελούν συγκεκριμένες λειτουργίες, οι οποίες είναι πολύ συνήθεις και πολύ χρήσιμες στην πράξη. Αυτές οι λειτουργίες περιλαμβάνουν την αποκοπή συγκεκριμένων συχνοτήτων του σήματος εισόδου και τη διέλευση κάποιων άλλων, και/ή την ενίσχυση των συχνοτήτων του σήματος εισόδου που διέρχονται ελεύθερα του συστήματος. Λόγω αυτής της λειτουργίας τους, αυτά τα συστήματα ονομάζονται “φίλτρα”. Ο λόγος, προφανής: όπως το φίλτρο (του καφέ π.χ.) δεσμεύει τον καφέ σε στέρεα μορφή και επιτρέπει τη διέλευση του υγρού καφέ, έτσι και αυτά τα φίλτρα, επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων ενώ δεσμεύουν (καταστέλλουν, μηδενίζουν το πλάτος τους δηλαδή) κάποιες άλλες.

Υπάρχουν τέσσερα βασικά είδη φίλτρων:

1. Το βαθυπερατό (lowpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από τη μηδενική συχνότητα ως μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*, f_c .
2. Το υψιπερατό (highpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη, που λέγεται *συχνότητα αποκοπής*, f_c , ως το $+\infty$.
3. Το ζωνοπερατό (bandpass) φίλτρο: επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή.
4. Το ζωνοαπαγορευτικό (bandstop) φίλτρο: απαγορεύει τη διέλευση συχνοτήτων από μια συγκεκριμένη f_{c1} , ως μια άλλη συγκεκριμένη συχνότητα, f_{c2} . Συνήθως αυτή η ζώνη συχνοτήτων είναι μικρή. Το ζωνοαπαγορευτικό φίλτρο είναι κάπως σαν το “αντίθετο” του ζωνοπερατού. :-)

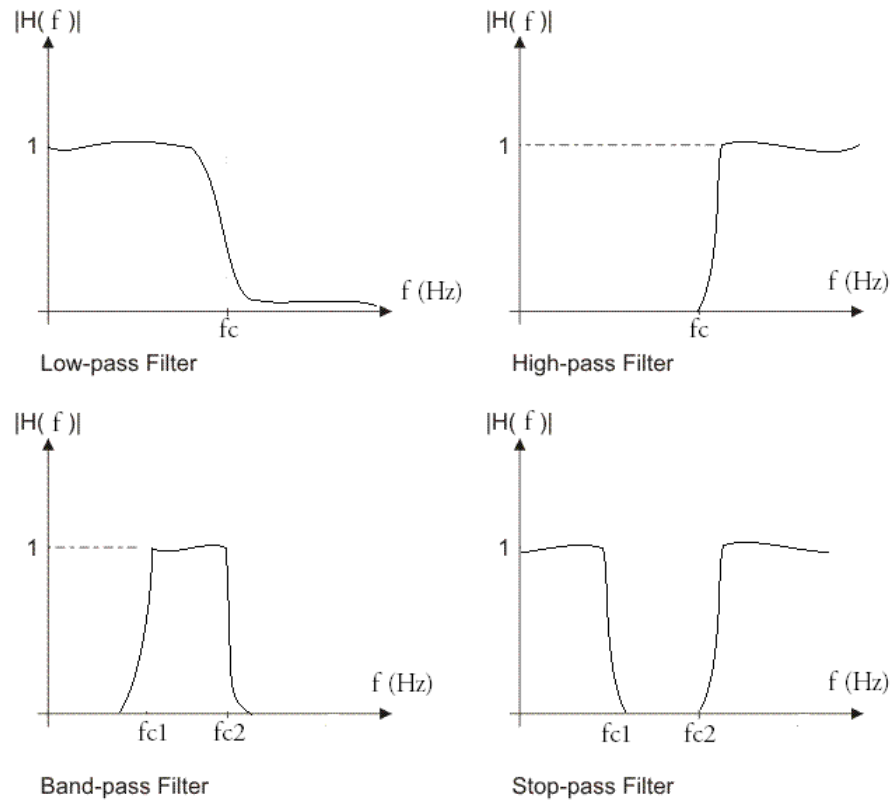


Σχήμα 5: Ιδανικά Φίλτρα

Τα φίλτρα αυτά φαίνονται σχηματικά στην εικόνα 5, μόνο για τις θετικές συχνότητες. Συμμετρικά είναι τα σχήματα και για τις αρνητικές, αφού μιλάμε για πραγματικά σήματα. Τα φίλτρα αυτά λέγονται *ιδανικά*, γιατί ορίζονται μόνο θεωρητικά, δηλ. δεν μπορούμε να τα κατασκευάσουμε στην πράξη έτσι όπως φαίνονται στην εικόνα. Μπορούμε να τα προσεγγίσουμε αρκετά καλά, με φίλτρα όπως αυτά της εικόνας 6. Προς το παρόν και σε αυτό το μάθημα, μας ενδιαφέρουν μόνο τα ιδανικά φίλτρα, για τα οποία μπορούμε να έχουμε μια εύκολη μαθηματική αναπαράστασή τους. Για παράδειγμα, το χαμηλοπερατό φίλτρο μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά ως:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases} \quad (43)$$

Η Σχεδίαση Φίλτρων είναι ένας ολόκληρος τομέας της Επεξεργασίας Σήματος από μόνος του, οπότε δε θα επεκταθούμε περισσότερο εδώ.



Σχήμα 6: Πραγματοποιησιμα Φίλτρα

5 Σύγκριση σημάτων - Συσχέτιση

Έχοντας πλέον όλα τα εργαλεία της Ανάλυσης Fourier διαθέσιμα, μπορούμε να ρίξουμε μια γρήγορη ματιά στη σύγκριση σημάτων. Η σχέση που μας βοηθάει σε αυτήν την κατεύθυνση λέγεται *Συσχέτιση* και για δυο σήματα $x(t), y(t)$ δίνεται από την εξίσωση

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau + t)d\tau \quad (44)$$

Η συζυγία στο $x(t)$ εμφανίζεται επειδή εν γένει τα σήματα είναι μιγαδικά. Αν πρόκειται για πραγματικά σήματα, η συζυγία απλά παραλείπεται. Η συσχέτιση “βαφτίζεται” με διαφορετικό όνομα αν συγκρίνουμε διαφορετικά σήματα (*ετεροσυσχέτιση*), ενώ αν συγκρίνουμε το σήμα με τον εαυτό του ($x(t) = y(t)$), λέγεται *αυτοσυσχέτιση*. Η συσχέτιση μεταξύ δυο σημάτων είναι εξαιρετικά σημαντική επειδή είναι ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ δυο σημάτων. Η θεωρία της συσχέτισης εμφανίζεται σε διάφορους τομείς επεξεργασίας σήματος, όπως στα ραντάρ, στα σόναρ, στις ψηφιακές επικοινωνίες, κλπ.

5.1 Περιοδική Συσχέτιση

Ας ξεκινήσουμε από την περιοδική συσχέτιση, δηλ. από τη μελέτη ομοιότητας περιοδικών σημάτων. Για να θυμηθούμε κάποια πράγματα. Δείτε:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (45)$$

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau) y(\tau + t) d\tau \quad (46)$$

Βλέπετε πως η ομοιότητα είναι προφανής! (μη μου πείτε πως δεν το βλέπετε! :-) Και μαντέψτε – η ιδέα της προβολής που συζητήσαμε παραπάνω για τους συντελεστές X_k , ισχύει κι εδώ! Παντού αυτή η προβολή, τελικά! :-) Εδώ όμως, προβάλλουμε το σήμα $x(t)$ πάνω σε ένα άλλο σήμα $y(t)$ το οποίο εδώ έχει την ικανότητα να μετακινείται στο χρόνο, $y(\tau + t)$, και για κάθε χρονική μετακίνηση t , παίρνουμε και ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ των σημάτων. Όπως ακριβώς παίρναμε ένα X_k για κάθε ακεραία πολλαπλάσια συχνότητα $e^{-j2\pi k f_0 t}$ στη σχέση 45, έτσι κι εδώ παίρνουμε ένα $\phi_{xy}(\Delta t)$ για κάθε απειροστή μετακίνηση Δt του σήματος $y(t)$, και φυσικά αυτή η διαδικασία μας δίνει στο τέλος μια συνεχή συνάρτηση $\phi_{xy}(t)$.

Για να καταλάβουμε διαισθητικά τη συσχέτιση, ας θεωρήσουμε πρώτα το παράδειγμα της αυτοσυσχέτισης, δηλ. της συσχέτισης ενός σήματος με τον εαυτό του:

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau) x(\tau + t) d\tau \quad (47)$$

Εδώ έχουμε λοιπόν ένα μέτρο της ομοιότητας του σήματος με τον εαυτό του. Πρέπει να σας είναι αντιληπτό ότι η μέγιστη ομοιότητα του σήματος θα συμβαίνει όταν δεν υπάρχει καμιά μετακίνηση, δηλ. όταν $t = 0$. Τότε τα δυο σήματα “πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο” και το γινόμενό τους είναι μέγιστο. Όσο το t αρχίζει να αλλάζει, δηλ. το $x(\tau + t)$ να μετακινείται, τόσο διαφοροποιείται αυτό το γινόμενο, γιατί πλέον τα δυο σήματα αρχίζουν να μη μοιάζουν πια σε μια χρονική στιγμή t_0 . Όμως, πρέπει να θυμόμαστε ότι έχουμε να κάνουμε με περιοδικό σήμα. Άρα μετά από μετακίνηση κατά $t = T_0$, τα σήματα πάλι θα πέφτουν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο, και άρα πάλι η ομοιότητά τους θα είναι μέγιστη! Κι αυτό θα συνεχίζεται επ’ άπειρον. Από αυτήν την παρατήρηση, συμπεραίνουμε ότι

$$|\phi_{xx}(t)| \leq \phi_{xx}(0) = \phi_{xx}(kT_0) \quad (48)$$

που είναι η μαθηματική γραφή της παρατήρησης που κάναμε μόλις σχετικά με τη μέγιστη ομοιότητα. Η ετεροσυσχέτιση μπορεί να γίνει αντιληπτή με παρόμοιο τρόπο, μόνο που τώρα δεν έχουμε δυο ίδια σήματα, αλλά δυο διαφορετικά $x(t), y(t)$. Τα σημεία μεγίστου της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης είναι εκεί που τα δυο σήματα μοιάζουν περισσότερο το ένα με το άλλο. :-)

Στο χώρο των συχνοτήτων, αποδεικνύεται ότι το σήμα της συσχέτισης μεταφράζεται ως

$$\phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(\tau) y(\tau + t) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (49)$$

Πολύ πιο απλή σχέση στη συχνότητα, συμφωνείτε; Για την περίπτωση της αυτοσυσχέτισης, η παραπάνω σχέση απλά γίνεται

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^*(\tau) x(\tau + t) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 t} \quad (50)$$

Παρατηρήστε ότι για $t = 0$, η αυτοσυσχέτιση μας δίνει την ισχύ του σήματος, σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval:

$$\phi_{xx}(0) = E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad (51)$$

5.2 Συσχέτιση για μη περιοδικά σήματα

Ας συνεχίσουμε με την συσχέτιση για μη περιοδικά σήματα. Η αντιστοιχία κι εδώ είναι εμφανής. Δείτε:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (52)$$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (53)$$

Βλέπετε πως κι εδώ η ομοιότητα είναι προφανής! (κι εδώ μη μου πείτε πως δεν το βλέπετε! :-) Εδώ, αυτή τη φορά, προβάλλουμε το σήμα $x(t)$ πάνω σε ένα άλλο σήμα $y(t)$ το οποίο εδώ έχει την ικανότητα να μετακινείται στο χρόνο $y(\tau+t)$, και για κάθε χρονική μετακίνηση t , παίρνουμε και ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ των σημάτων. Όπως ακριβώς παίρναμε ένα $X(\Delta f)$ για κάθε συχνότητα $e^{-j2\pi\Delta f t}$ στη σχέση 52, έτσι κι εδώ παίρνουμε ένα $\phi_{xy}(\Delta t)$ για κάθε απειροστή μετακίνηση Δt του σήματος $y(t)$, και φυσικά αυτή η διαδικασία μας δίνει στο τέλος μια συνεχή συνάρτηση $\phi_{xy}(t)$.

Κι εδώ η αυτοσυσχέτιση, ορίζεται ως:

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau+t)d\tau \quad (54)$$

Και εδώ έχουμε λοιπόν ένα μέτρο της ομοιότητας του σήματος με τον εαυτό του. Η μέγιστη ομοιότητα του σήματος θα συμβαίνει όταν δεν υπάρχει καμιά μετακίνηση, δηλ. όταν $t = 0$. Τότε τα δυο σήματα “πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο” και το γινόμενό τους είναι μέγιστο. Όσο το t αρχίζει να αλλάζει, δηλ. το $x(\tau+t)$ να μετακινείται, τόσο διαφοροποιείται αυτό το γινόμενο, γιατί πλέον τα δυο σήματα αρχίζουν να μη μοιάζουν πια σε μια χρονική στιγμή t_0 . Από αυτήν την παρατήρηση, συμπεραίνουμε ότι

$$|\phi_{xx}(t)| \leq \phi_{xx}(0) \quad (55)$$

που είναι η μαθηματική γραφή της παρατήρησης που κάναμε μόλις σχετικά με τη μέγιστη ομοιότητα. Σημειώστε ότι τα σήματα δεν είναι πια περιοδικά, οπότε υπάρχει μόνο ένα σημείο όπου η αυτοσυσχέτιση είναι μέγιστη. Η ετεροσυσχέτιση μπορεί να γίνει αντιληπτή με παρόμοιο τρόπο, μόνο που τώρα δεν έχουμε δυο ίδια σήματα, αλλά δυο διαφορετικά $x(t), y(t)$. Το σημείο μέγιστου της συνάρτησης ετεροσυσχέτισης – δεν μπορεί να είναι παραπάνω από ένα – είναι εκεί που τα δυο σήματα μοιάζουν περισσότερο το ένα με το άλλο (όχι απαραίτητα στο 0). :-)

Στο χώρο των συχνοτήτων, αποδεικνύεται ότι το σήμα της συσχέτισης μεταφράζεται ως

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \quad (56)$$

όπου η

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \quad (57)$$

ονομάζεται Energy Interspectral Density – Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας.

Για την περίπτωση της αυτοσυσχέτισης, η παραπάνω σχέση απλά γίνεται

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau+t)d\tau \leftrightarrow \Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2 \quad (58)$$

όπου η

$$\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2 \quad (59)$$

ονομάζεται (πιο απλά) Energy Spectral Density – Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας, και μας περιγράφει την κατανομή της ενέργειας του σήματος ανά τις συχνότητες. Άρα εδώ φαίνεται ότι η ετεροσυσχέτιση στο χρόνο είναι απλά το μέτρο του μετασχ. Fourier στο τετράγωνο, στη συχνότητα!

Παρατηρήστε ότι για $t = 0$, η αυτοσυσχέτιση μας δίνει την ενέργεια του σήματος, σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval:

$$\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (60)$$

5.3 Συσχέτιση για σήματα ισχύος

Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος αλλά όχι μόνο αυτά. Θα επεκτείνουμε την ανάλυση των περιοδικών σημάτων για σήματα ισχύος. Για σήματα ισχύος, η ετεροσυσχέτιση ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (61)$$

ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως

$$\phi_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau)x(\tau+t)d\tau \quad (62)$$

Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ονομάζεται Power Spectral Density – Φασματική Πυκνότητα Ισχύος, και μας περιγράφει την κατανομή της ισχύος ανά συχνότητα, ενώ ο αντίστοιχος της ετεροσυσχέτισης ονομάζεται Power Interspectral Density – Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος.

Παρατηρήστε ότι για $t = 0$, η αυτοσυσχέτιση μας δίνει την ισχύ (και όχι πια ενέργεια – μιλάμε για σήματα ισχύος άλλωστε) του σήματος, σύμφωνα με το θεώρημα του Parseval:

$$\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)df \quad (63)$$

Προσέξτε πως εδώ, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος ΔΕΝ ισούται με το μέτρο του μετασχ. Fourier στο τετράγωνο της αυτοσυσχέτισης, όμως μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τη σχέση

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad (64)$$

όπου $X(f, T)$ είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t, T) = x(t) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (65)$$

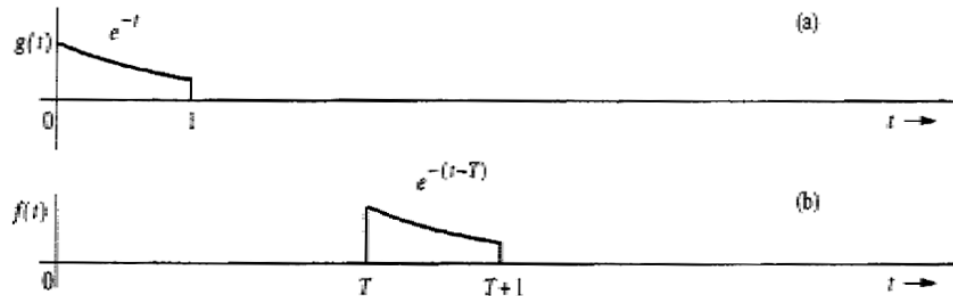
όπου $x(t)$ είναι το σήμα ισχύος, ενώ το $x(t, T)$ είναι ένα κομμάτι του σήματος ισχύος, διάρκειας T , δηλ. είναι σήμα ενέργειας.

5.4 Εφαρμογές

Ας αναφέρουμε απλά δυο εφαρμογές της συσχέτισης στην πράξη, έτσι, για να σας πείσουμε για τη σημασία της. :-)

1. Ας θεωρήσουμε ένα ραντάρ, όπου στόχος του είναι να ανιχνεύσει έναν πιθανό στόχο, στέλνοντας προς αυτόν ένα σήμα. Αν ο στόχος είναι παρών, το σήμα αντανακλάται και επιστρέφει στον πομπό, ενώ αν όχι, ο πομπός λαμβάνει μόνο θόρυβο (φυσικά τα σήματα αυτά είναι μη περιοδικά). Η παρουσία ή η απουσία του ανακλώμενου σήματος επιβεβαιώνει την παρουσία ή την απουσία του στόχου (δε μιλάμε για καταστάσεις Stealth, έτσι; Μιλάμε για απλά πράγματα :-)). Το κρίσιμο πρόβλημα σε αυτή τη διαδικασία είναι η ανίχνευση του ανακλώμενου σήματος. Φυσικά, το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνεται έχει αλλοιωθεί σοβαρά λόγω απόστασης και θορύβου του περιβάλλοντος. Σε μια τέτοια περίπτωση, η συσχέτιση του ληφθέντος σήματος με τον αρχικό, που μεταδόθηκε, μπορεί να μας βοηθήσει σημαντικά!

Ας εξηγήσουμε ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΑ :-) πώς γίνεται η ανίχνευση του σήματος με χρήση της συσχέτισης. Μετρώντας τη χρονική καθυστέρηση μεταξύ του σήματος που στάλθηκε και αυτού που ελήφθη, μπορούμε να προσδιορίσουμε την απόσταση του στόχου. Έστω ότι το σήμα που στάλθηκε είναι το



Σχήμα 7: Ερμηνεία της συσχέτισης

$g(t)$ και αυτό που ελήφθη είναι το $f(t)$, όπως περιγράφονται στο σχήμα 7. Αν γινόταν απ' ευθείας σύγκριση για την ομοιότητα, με μια εξίσωση όπως

$$\phi_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \quad (66)$$

το αποτέλεσμα θα ήταν μηδέν. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε τη γνωστή σχέση συσχέτισης

$$\phi_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau + t)d\tau \quad (67)$$

Αν για κάποιο t (που είναι οι διαφορές καθυστερήσεις του ενός σήματος) παρατηρηθεί ισχυρή συσχέτιση (που σημαίνει μεγάλη τιμή στο ολοκλήρωμα), δεν ανιχνεύεται μόνο η παρουσία του σήματος αλλά και η σχετική χρονική μετατόπιση του $f(t)$ σε σχέση με το $g(t)$. Έτσι, όχι μόνο μετράμε την παρουσία ενός στόχου αλλά και την απόστασή του. ;-) Οπότε ή χτυπάμε το συναγερμό ή στέλνουμε τον πύραυλο να τον χτυπήσει... :-)

- Ένα πολύ hot θέμα στην Επεργασία Σήματος Φωνής (ω ναι, ασχολούμαστε πολύ με αυτά εμείς :-) είναι η εύρεση της λεγόμενης θεμελιώδους συχνότητας f_0 σε τμήματα φωνής που είναι έμφωνα, όπως το /α/. Σε αυτά τα τμήματα, θεωρούμε ότι οι συχνότητες του φάσματος είναι ακέραιες (ή σχεδόν ακέραιες) πολλαπλάσιες μιας θεμελιώδους συχνότητας. Αν βρούμε αυτή, μπορούμε να βρούμε και τις υπολοιπες. Θεωρούμε δηλαδή ότι το έμφωνο σήμα φωνής είναι περιοδικό (που δεν είναι, αλλά μας βολεύει και στην πράξη δουλεύει κιόλας! :-)) Ένας από τους πρώτους τρόπους που προτάθηκαν για την εύρεση αυτής της συχνότητας, είναι η μέθοδος της αυτοσυσχέτισης. Θεωρώντας μικρά τμήματα φωνής που θεωρούμε με κάποια βεβαιότητα ότι είναι έμφωνα, εφαρμόζουμε την αυτοσυσχέτιση στο χρόνο σε κάθε ένα από αυτά. Συσχετίζουμε δηλαδή κάθε τμήμα με τον εαυτό του. Όπως είδαμε, η συσχέτιση περιοδικών σημάτων δίνει μέγιστα σε χρονικές στιγμές πολλαπλάσιες της περιόδου T_0 . Έτσι λοιπόν, βρίσκοντας τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (εκτός φυσικά από την τιμή στη θέση 0), βρίσκουμε την περίοδο του σήματος, και άρα τη θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 1/T_0$.

5.5 Παρατηρήσεις

- Παρατηρήστε ότι η συσχέτιση μοιάζει καταπληκτικά με τη συνέλιξη. Όμως ενώ η συνέλιξη εμπλέκει την ανάκλαση και τη μετατόπιση ενός εκ των δυο σημάτων, η συσχέτιση εμπλέκει ΜΟΝΟ τη

μετατόπιση. Δείτε παρακάτω – θεωρούμε πραγματικά σήματα:

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad (68)$$

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t+\tau)d\tau \quad (69)$$

Άρα πρέπει να σας είναι πιο εύκολο να υπολογίσετε τη συσχέτιση, απλά μετατοπίζοντας – κι όχι αναστρέφοντας – το ένα εκ των δυο σημάτων, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτή που ακολουθήσαμε στη συνέλιξη.

2. Φυσικά, αυτή η τόση μεγάλη ομοιότητα μεταξύ συνέλιξης και συσχέτισης δε θα μπορούσε παρά να μας οδηγήσει σε μια σχέση που τις συνδέει:

$$\phi_{xy}(t) = x(-t) * y(t) \quad (70)$$

ενώ για την αυτοσυσχέτιση είναι

$$\phi_{xx}(t) = x(-t) * x(t) \quad (71)$$

3. Σημαντικό είναι να παρατηρήσετε ότι ΔΕΝ ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη συσχέτιση, δηλ.

$$\phi_{xy}(t) \neq \phi_{yx}(t) \quad (72)$$

ενώ έχουμε δει ότι ισχύει για τη συνέλιξη:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = c_{yx}(t) \quad (73)$$

Αυτή είναι μια σημαντική διαφοροποίηση των δυο σχέσεων.

4. Είδαμε παραπάνω ότι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης $\phi_{xx}(t)$ (που τον βαφτίσαμε *Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας*) είναι ίσος με $|X(f)|^2$, δηλ. είναι ΠΑΝΤΑ πραγματική συνάρτηση, και ΠΑΝΤΑ θετική για όλες τις συχνότητες! Άρα η φάση του μετασχηματισμού είναι πάντα μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης είναι ανεξάρτητος οποιασδήποτε μετακίνησης στο χρόνο (φάση στη συχνότητα == μετακίνηση στο χρόνο) της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Ενδιαφέρον! :-)

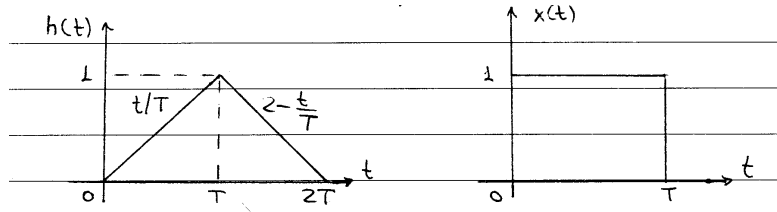
5. Σημαντικό είναι να θυμάστε ότι:

(α') Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης μας δίνει τη *Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας*

(β') Ο αντίστρ. μετασχ. Fourier της *Φασματικής Πυκνότητας Ενέργειας* μας δίνει την αυτοσυσχέτιση

6 Ασκήσεις

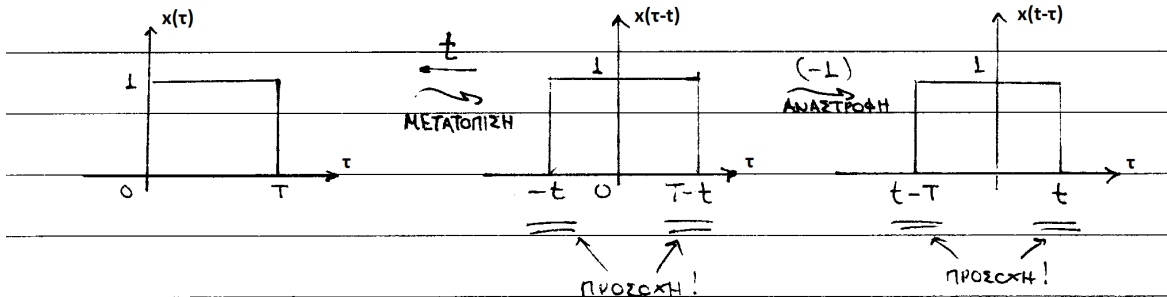
1. Έστω τα παρακάτω σήματα: Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$.



Σχήμα 8: Σχήμα Άσκησης 4.1

Λύση:

Επιλέγουμε να παίζουμε με το $x(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 9. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο 2, θα έχουμε



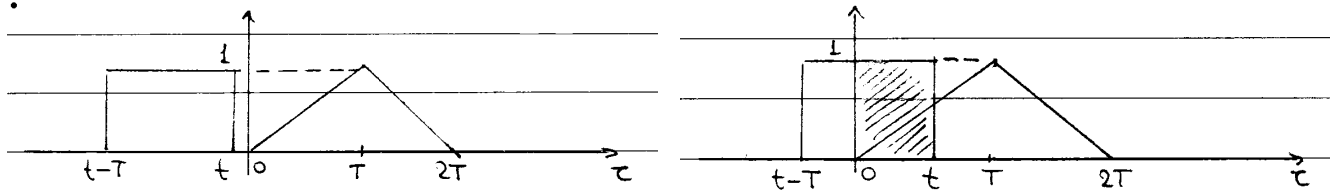
Σχήμα 9: Μετατόπιση και ανάκλαση για Άσκηση 4.1

τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = 0, t < 0$ (σχήμα 10α')
- $y(t) = \int_0^t \frac{\tau}{T} d\tau = \frac{\tau^2}{2T} \Big|_0^t = \frac{t^2}{2T}$, για $t \geq 0$ και $t - T \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T$ (σχήμα 10β')
- $y(t) = \int_{t-T}^t \frac{\tau}{T} d\tau + \int_T^t \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}$, για $t - T < T$ και $t \geq T \Leftrightarrow T \geq t < 2T$ (σχήμα 11α')
- $y(t) = \int_{t-T}^{2T} \left(2 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \left(2\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right) \Big|_{t-T}^{2T} = \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}$, για $t < 3T$ και $t \geq 2T \Leftrightarrow 2T \leq t < 3T$ (σχήμα 11β')
- $y(t) = 0, t \geq 3T$ (σχήμα 12α')

Άρα τελικά θα είναι:

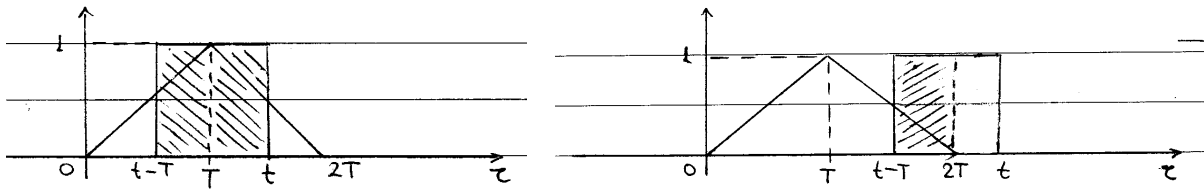
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ και } t \geq 3T \\ \frac{t^2}{2T}, & 0 \leq t \leq T \\ -\frac{t^2}{T} + 3t - \frac{3T}{2}, & T \geq t < 2T \\ \frac{t^2}{2T} - 3t + \frac{9T}{2}, & 2T \leq t < 3T \end{cases} \quad (74)$$



(α) 1η περίπτωση Άσκησης 4.1

(β) 2η περίπτωση Άσκησης 4.1

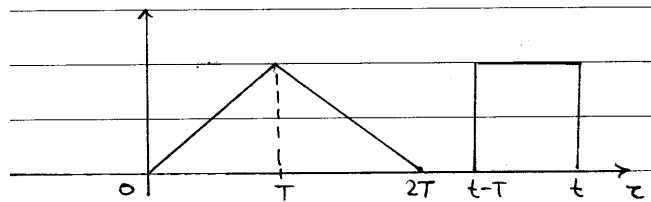
Σχήμα 10: Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - I



(α) 3η περίπτωση Άσκησης 4.1

(β) 4η περίπτωση Άσκησης 4.1

Σχήμα 11: Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - II



(α) 5η περίπτωση Άσκησης 4.1

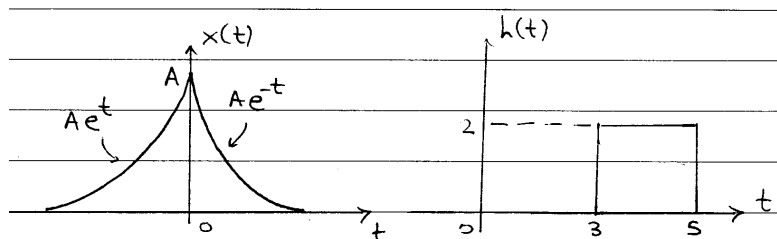
Σχήμα 12: Περιπτώσεις Άσκησης 4.1 - III

που είναι και το ζητούμενο.

2. Έστω τα σήματα

$$x(t) = Ae^{-|t|}, \quad h(t) = 2(u(t-3) - u(t-5))$$

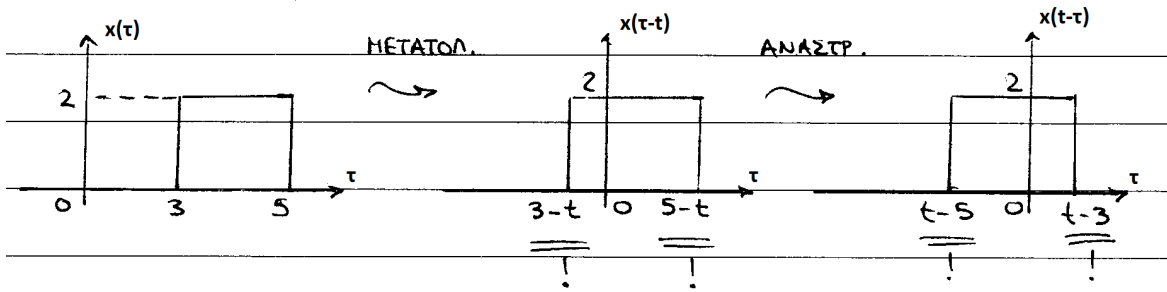
που φαίνονται στο σχήμα 13 Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.



Σχήμα 13: Σχήμα Άσκησης 4.2

Λύση:

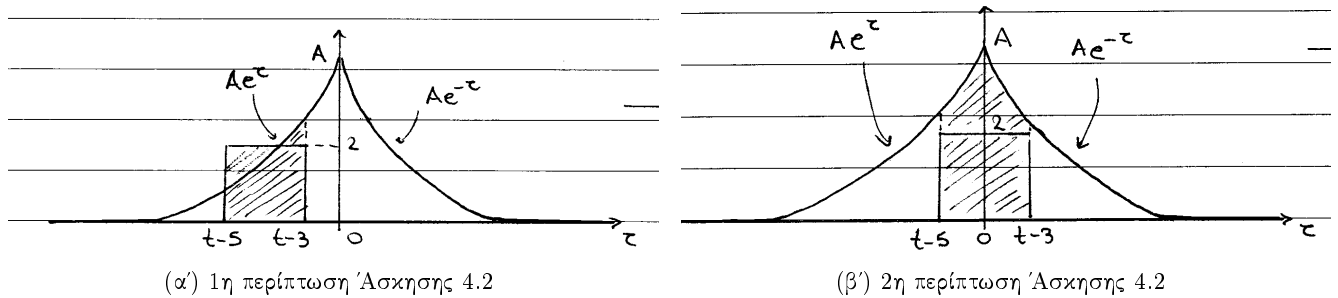
Επιλέγουμε να παίζουμε με το $h(t)$, καθ' ότι ευκολότερο. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 14. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο 2, θα έχουμε



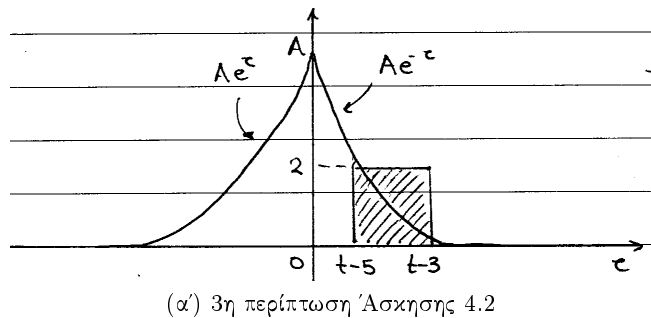
Σχήμα 14: Ανάκλαση και μετατόπιση του σήματος Άσκησης 4.2

τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{\tau} d\tau = 2A(e^{t-3} - e^{t-5})$, για $t-3 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3$ (σχήμα 15α')
- $y(t) = \int_{t-5}^0 2Ae^{\tau} d\tau + \int_0^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A(2A - e^{t-5} - e^{3-t})$, για $t \leq 5$ και $t > 3 \Leftrightarrow 3 < t \leq 5$ (σχήμα 15β')
- $y(t) = \int_{t-5}^{t-3} 2Ae^{-\tau} d\tau = 2A(e^{5-t} - e^{3-t})$, για $t-5 > 0 \Leftrightarrow t > 5$ (σχήμα 16α')



Σχήμα 15: Περιπτώσεις Άσκησης 4.2 - I



Σχήμα 16: Περιπτώσεις Άσκησης 4.2 - II

Άρα τελικά θα έχουμε

$$y(t) = \begin{cases} 2A(e^{t-3} - e^{t-5}), & t \leq 3 \\ 2A(2A - e^{t-5} - e^{3-t}), & 3 < t \leq 5 \\ 2A(e^{5-t} - e^{3-t}), & t > 5 \end{cases} \quad (75)$$

που είναι και το ζητούμενο.

3. Έστω τα σήματα

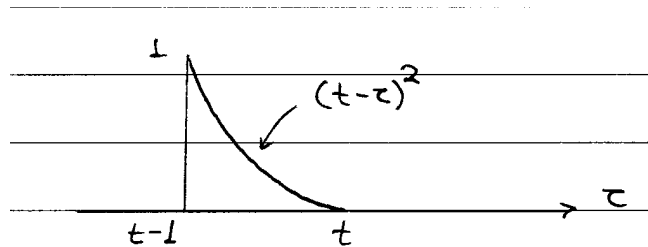
$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ \frac{1}{t}, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.

Λύση:

Επιλέγουμε να παίζουμε με το $h(t)$, καθ' ότι ευκολότερο στη σχεδίαση. Η ανάκλαση και η μετατόπιση του σήματος φαίνεται στο σχήμα 17. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο



Σχήμα 17: Ανακλασμένο και μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 4.3

2, θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = 0, t \leq 1$
- $y(t) = \int_1^t \frac{1}{\tau} (t - \tau)^2 d\tau = t^2 \ln |\tau| \Big|_1^t - 2t\tau \Big|_1^t + \frac{\tau^2}{2} \Big|_1^t = \dots$, για $t < 2$ και $t > 1 \Leftrightarrow 1 < t < 2$
- $y(t) = \int_{t-1}^t \frac{1}{\tau} (t - \tau)^2 d\tau = t^2 \ln |\tau| \Big|_{t-1}^t - 2t\tau \Big|_{t-1}^t + \frac{\tau^2}{2} \Big|_{t-1}^t = \dots$, για $t - 1 \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 2$

Επιβεβαιώστε εσείς σχηματικά ότι τα παραπάνω είναι σωστά! :-)

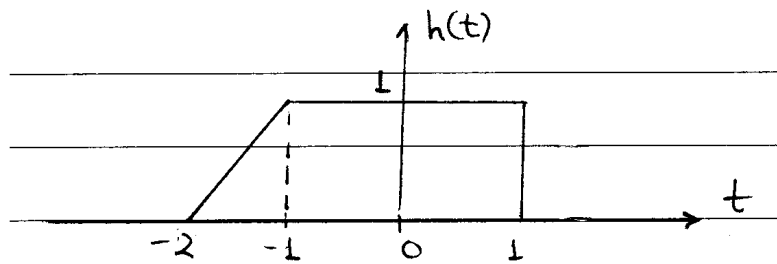
4. Έστω το σήμα

$$\mathbf{x}(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t - 4)$$

και το σήμα $h(t)$ που φαίνεται στο σχήμα 18. Βρείτε το αποτέλεσμα της συνέλιξης των δυο σημάτων.

Λύση:

Η συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα απλά παράγει αντίγραφα των σημάτων με τα οποία συνελίσσεται,



Σχήμα 18: Σχήμα Άσκησης 4.4

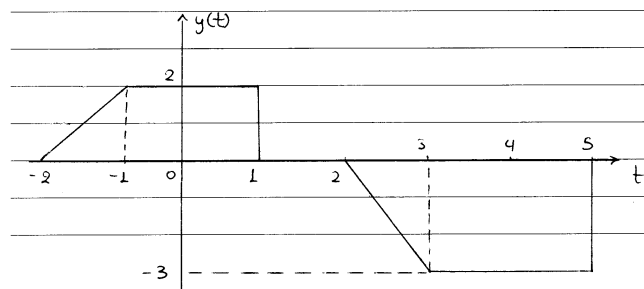
μετατοπισμένα στη θέση της συνάρτησης Δέλτα, πολλαπλασιασμένα με το πλάτος της. Ούτε ολοκληρώματα, ούτε μετατοπίσεις, ούτε αναστροφές, ούτε τίποτα! :-) Γίνεται όμως ευρεία χρήση των ιδιοτήτων της συνάρτησης Δέλτα, όπως η

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Άρα θα είναι απλά

$$y(t) = h(t) * (2\delta(t) - 3\delta(t - 4)) = 2h(t) * \delta(t) - 3h(t) * \delta(t - 4) = 2h(t) - 3h(t - 4)$$

Το αποτέλεσμα της συνέλιξης φαίνεται στο σχήμα 19.



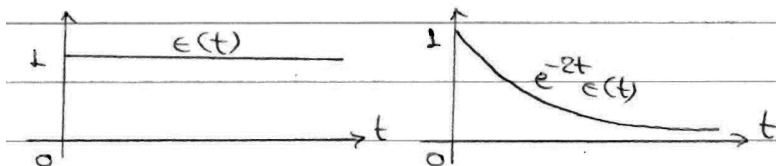
Σχήμα 19: Σήμα συνέλιξης $h(t) * x(t)$ Άσκησης 4.4

5. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \\ y(t) &= e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

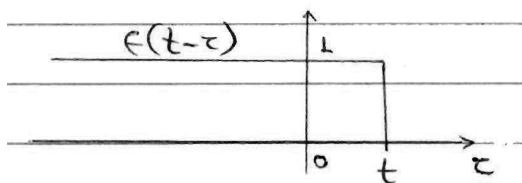
Λύση:

Τα δυο σήματα είναι όπως στο σχήμα 20. Παίζουμε με το $x(t)$. Το ανεστραμμένο και ανακλασμένο



Σχήμα 20: Σήματα Άσκησης 4.5

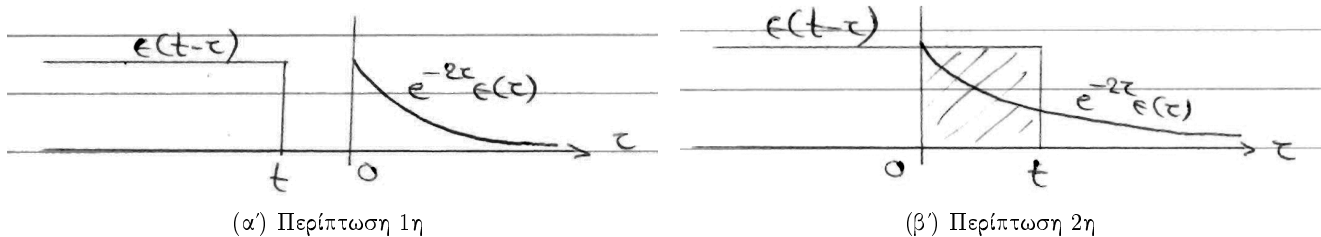
σήμα φαίνεται στο σχήμα 21. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, οι οποίες φαίνονται στα σχήματα 22α' και



Σχήμα 21: Μετατοπισμένο σήμα Άσκησης 4.5

22β'.

- $c_{xy}(t) = 0, t \leq 0$
- $c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau} u(t) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1-e^{-2t}}{2}, t > 0$

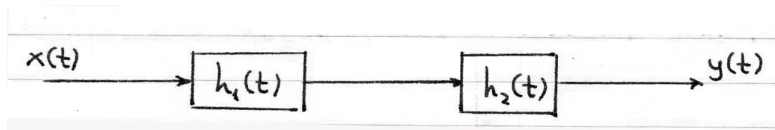


Σχήμα 22: Περιπτώσεις Άσκησης 4.5

Άρα τελικά θα είναι

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (76)$$

που είναι και το ζητούμενο.



Σχήμα 23: Σήμα Άσκησης 4.6

6. Θεωρούμε το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα 23, με

$$x(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$h_1(t) = \delta\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

$$h_2(t) = u(t) - u(t - 3)$$

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η έξοδος του συστήματος, $y(t)$.

Λύση:

Αφού τα συστήματα είναι σε σειρά, μπορούμε να βρούμε το συνολικό σύστημα $h(t)$, που είναι η συνέλιξη των δυο συστημάτων, και είναι

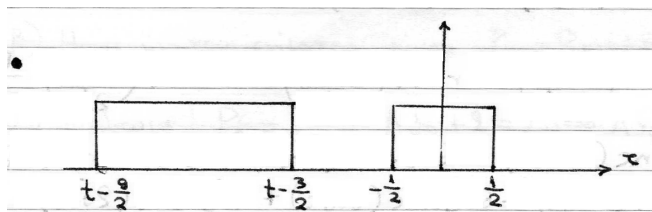
$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) * h_2(t) = \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) * (u(t) - u(t - 3)) \\ &= u\left(t - \frac{3}{2}\right) - u\left(t - 3 - \frac{3}{2}\right) = u\left(t - \frac{3}{2}\right) - u\left(t - \frac{9}{2}\right) \end{aligned}$$

Άρα είναι σαν να περνάμε την είσοδο $x(t)$ από το σύστημα $h(t)$. Παρατηρούμε ότι

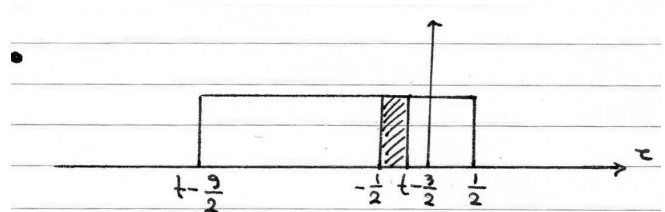
$$x(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{1}\right)$$

$$h(t) = u\left(t - \frac{3}{2}\right) - u\left(t - \frac{9}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t - 3}{3}\right)$$

Οι περιπτώσεις φαίνονται στο σχήμα 24, 25, 26. Κατά τα γνωστά λοιπόν, θα παίξουμε με το $h(t)$,



(α) Περίπτωση 1η

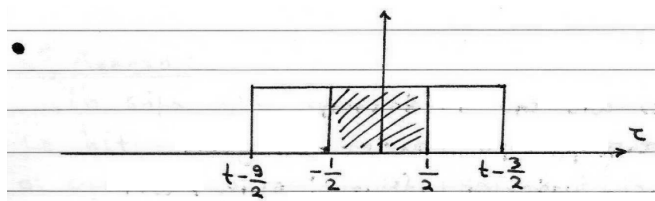


(β) Περίπτωση 2η

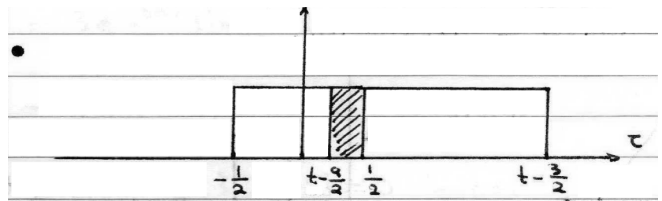
Σχήμα 24: Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 1

και θα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $y(t) = 0, t \leq 1$
- $y(t) = \int_{-1/2}^{t-3/2} d\tau = \tau \Big|_{-1/2}^{t-3/2} = t - 1, \text{ για } 1 < t \leq 2.$
- $y(t) = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau = \tau \Big|_{-1/2}^{1/2} = 1, \text{ για } 2 < t \leq 4$

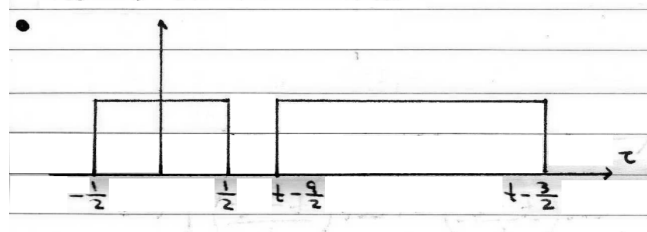


(α) Περίπτωση 3η



(β) Περίπτωση 4η

Σχήμα 25: Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 2



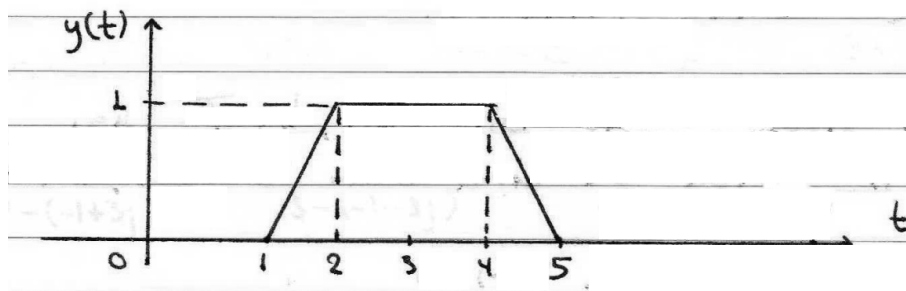
Σχήμα 26: Περιπτώσεις Άσκησης 4.6 - 3

- $y(t) = \int_{t-9/2}^{1/2} d\tau = \tau \Big|_{t-9/2}^{1/2} = 5 - t$, για $4 < t \leq 5$
- $y(t) = 0$, $t > 5$

Άρα συνολικά θα είναι

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \quad t > 5 \\ t - 1, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 4 \\ 5 - t, & 4 < t \leq 5 \end{cases} \quad (77)$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 27.



Σχήμα 27: Αποτέλεσμα Άσκησης 4.6

Παρατήρηση: Μπορούμε να περάσουμε την είσοδο από το $h_1(t)$, να βρούμε την έξοδο $y_1(t)$, και έπειτα να περάσουμε την $y_1(t)$ από το $h_2(t)$ και να βρούμε την τελική έξοδο $y(t)$.

7. Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

Λύση:

Η αυτοσυσχέτιση εμπλέκει το γινόμενο του σήματος με τον εαυτό του, μετατοπισμένο κατά t . Δουλεύουμε όπως με τη συνέλιξη, απλά δεν αναστρέφουμε το σήμα, μόνο το μετατοπίζουμε. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις, ανάλογα με τη θέση του $x(\tau + t)$.

- Είναι

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(t) &= \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-a(\tau+t)} d\tau = e^{-at} \int_0^{\infty} e^{-2a\tau} d\tau \\ &= e^{-at} \frac{1}{-2a} e^{-2a\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a} e^{-at}, \quad t > 0\end{aligned}$$

- Είναι

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(t) &= \int_{-t}^{\infty} e^{-a\tau} e^{-a(\tau+t)} d\tau = e^{-at} \int_{-t}^{\infty} e^{-2a\tau} d\tau \\ &= e^{-at} \frac{1}{-2a} e^{-2a\tau} \Big|_{-t}^{\infty} = \frac{1}{2a} e^{at}, \quad t < 0\end{aligned}$$

Άρα συνολικά ισχύει

$$\phi_{xx}(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (78)$$

8. Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας του σήματος

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{u}(t), \quad \alpha > 0$$

Λύση:

Ξέρουμε ότι η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας δίνεται από το μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης:

$$\Phi_{xx}(f) = F\{\phi_{xx}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Όμως έχουμε δείξει ότι

$$\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

Αρκεί να βρούμε το $|X(f)|^2$. Είναι:

$$\begin{aligned}X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = -\frac{1}{a+j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right)\end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα αυτό ισχύει ότι:

$$e^{-(a+j2\pi f)t} = e^{-at} e^{-j2\pi ft} = f(t)g(t)$$

Η συνάρτηση $f(t) = e^{-at}$ τείνει στο 0 όταν $t \rightarrow \infty$, ενώ η συνάρτηση $g(t) = e^{-j2\pi ft}$ είναι φραγμένη, γιατί $|g(t)| = |e^{-j2\pi ft}| = 1$, για κάθε f, t . Από γνωστό θεώρημα, το όριο του γινομένου τείνει στο 0. Άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = 0$$

Άρα τελικά,

$$X(f) = -\frac{1}{a + j2\pi f}(0 - 1) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Τέλος, η Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας είναι

$$\Phi_{xx}(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad a > 0 \quad (79)$$

9. Έστω $x(t), y(t)$ δυο μιγαδικά σήματα και

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau + t)d\tau$$

η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης τους. Έστω $X(f), Y(f)$ ο μετασχηματισμούς Fourier τους. Δείξτε ότι

$$(\alpha') \quad \phi_{yx}(t) \leftrightarrow Y^*(f)X(f)$$

$$(\beta') \quad \phi_{xy}^*(-t) = \phi_{yx}(t)$$

$$(\gamma') \quad \phi_{yx}^*(-t) = \phi_{xy}(t)$$

Λύση:
Είναι

(α')

$$\begin{aligned} F\{\phi_{yx}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)x(\tau + t)d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t)e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)X(f)e^{j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X(f) \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)e^{j2\pi f\tau} d\tau \\ &= X(f) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right)^* \\ &= X(f)Y^*(f) \end{aligned} \quad (80)$$

(β') Είναι

$$\phi_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\tau)x(t + \tau)d\tau \quad (81)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(t + \tau)d\tau, \quad (\text{θέτω } t \leftarrow -t) \\ \phi_{xy}(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau - t)d\tau \\ \phi_{xy}^*(-t) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau - t)d\tau \right)^* \\ \phi_{xy}^*(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(\tau - t)d\tau \end{aligned}$$

Θέτω $u = \tau - t \Rightarrow du = d\tau$. Άρα

$$\phi_{xy}^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u+t)y^*(u)du \quad (82)$$

Από τις σχέσεις 81, 82, αποδεικνύεται το ζητούμενο.

(γ') Είναι

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(\tau+t)d\tau \quad (83)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \phi_{yx}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau+t)y^*(\tau)d\tau, & (\text{θέτω } t \leftarrow -t) \\ \phi_{yx}(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t)y^*(\tau)d\tau \\ \phi_{yx}^*(-t) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-t)y^*(\tau)d\tau \right)^* \\ \phi_{yx}^*(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau-t)y(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Θέτω $u = \tau - t \Rightarrow du = d\tau$. Άρα

$$\phi_{yx}^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(u)y(u+t)du \quad (84)$$

Από τις σχέσεις 84, 83, αποδεικνύεται το ζητούμενο.

10. Έστω το σήμα

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} 5, & t = -2 \\ 2, & t = -1 \\ 2, & t = 1 \\ 5, & t = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (85)$$

(α') Σχεδιάστε το $\mathbf{x}(t)$.

(β') Γράψτε το $\mathbf{x}(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό της συνάρτησης Δέλτα

(γ') Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του $\mathbf{x}(t)$

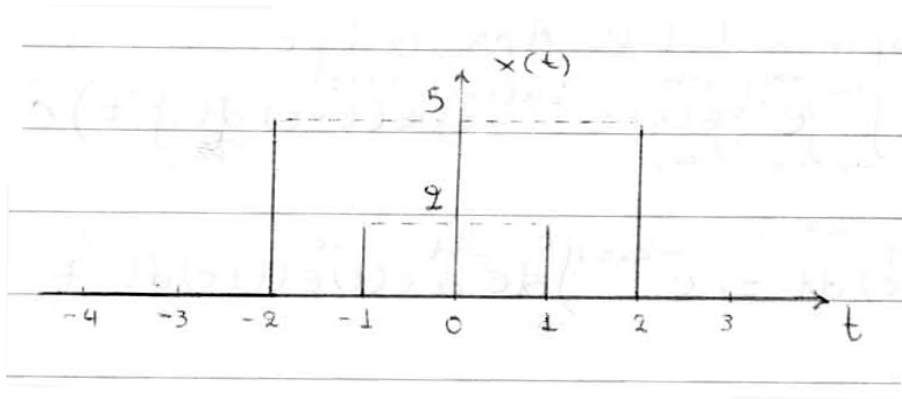
(δ') Δείξτε ότι $\Phi_{xx}(f) \leq 156$, όπου $\Phi_{xx}(f)$ η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος.

Λύση:

(α') Το σήμα φαίνεται στο σχήμα 28.

(β') Το $x(t)$ γράφεται ως

$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2) \quad (86)$$



Σχήμα 28: Άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα

(γ') Ο μετασχ. Fourier είναι

$$\begin{aligned}
 F\{x(t)\} &= 5e^{j2\pi 2f} + 2e^{j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} + 5e^{-j2\pi 2f} \\
 &= 10 \cos(4\pi f) + 4 \cos(2\pi f) \\
 &= 10(2 \cos^2(2\pi f) - 1) + 4 \cos(2\pi f) \\
 &= 20 \cos^2(2\pi f) - 10 + 4 \cos(2\pi f) \\
 &= 20 \cos^2(2\pi f) + 4 \cos(2\pi f) - 10
 \end{aligned} \tag{87}$$

(88)

(δ') Είναι

$$\begin{aligned}
 \Phi_{xx}(f) &= |X(f)|^2 \\
 &= |10 \cos(4\pi f) + 4 \cos(2\pi f)|^2 \\
 &= 100 \cos^2(4\pi f) + 40 \cos(4\pi f) \cos(2\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \\
 &= 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f)
 \end{aligned} \tag{89}$$

Προφανώς $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ και $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$, οπότε:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{xx}(f) &= 100 \cos^2(4\pi f) + 20 \cos(2\pi f) + 20 \cos(6\pi f) + 16 \cos^2(2\pi f) \\
 &\leq 100 + 20 + 20 + 16 \\
 &= 156
 \end{aligned} \tag{90}$$

11. Για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση.

Λύση:

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}(-t)$. Το σήμα μας είναι πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$. Είναι:

$$\begin{aligned}
 \phi_{xx}(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau - t)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau - t)d\tau \quad (\text{θέτω } \tau - t = u \Rightarrow d\tau = du) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u + t)x(t)du \\
 &= \phi_{xx}(u)
 \end{aligned} \tag{91}$$

που είναι και το ζητούμενο.

12. Αποδείξτε ότι για τα σήματα

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{-\alpha t} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= e^{-2\alpha t} \mathbf{u}(t), \alpha > 0 \end{aligned}$$

ισχύει $\Phi_{xy}(f) = \mathbf{X}^*(f)\mathbf{Y}(f)$, όπου $\Phi_{xy}(f)$ η συνάρτηση Διαφασματικής Πυκνότητας Ενέργειας.

Λύση:
Είναι

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}(f) &= F\{\phi_{xy}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{-2a(\tau+t)} u(\tau+t) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a(\tau+t)} u(\tau+t) e^{-j2\pi ft} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau+t) e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \left(Y(f) e^{j2\pi f\tau} \right) d\tau \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \\ &= Y(f) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} u(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right)^* \\ &= Y(f) X^*(f) = X^*(f) Y(f) \end{aligned} \quad (92)$$

Παρατήρηση:

Εδώ, αποδείξαμε τη ζητούμενη σχέση γενικά, για κάθε σήμα $x(t), y(t)$. Αποδείξτε εσείς το πραγματικό ζητούμενο, υπολογίζοντας τη $\Phi_{xy}(f)$ με τον ορισμό, και επιβεβαιώστε ότι ισούται με $X^*(f)Y(f)$, υπολογίζοντας και αυτό το γινόμενο. :-)

13. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt$$

δείξτε ότι:

(α') η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης έχει μέγιστο για $t = 0$.

(β') η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει μέγιστο για $t = 0$.

Λύση:

(α') Έχουμε

$$\begin{aligned} |\phi_{xy}(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)y(t+\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)|^2 d\tau \\ &= \phi_{xx}(0)\phi_{yy}(0) \Rightarrow |\phi_{xy}(t)| \leq \sqrt{\phi_{xx}(0)\phi_{yy}(0)} \end{aligned} \quad (93)$$

(β') Έχουμε

$$\begin{aligned} |\phi_{xx}(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t+\tau)d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \\ &= \phi_{xx}(0)\phi_{xx}(0) = \phi_{xx}^2(0) \Rightarrow |\phi_{xx}(t)| \leq |\phi_{xx}(0)| \end{aligned} \quad (94)$$