ΗΥ - 215 - Φροντιστήριο 09/05/2012

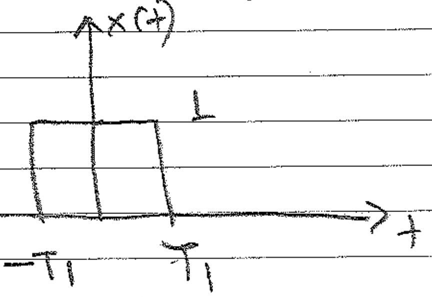
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$ synthesis equation

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$ analysis equation

Ασκηση 1

Δινεται το $x(t)$. Βρειτε το $X(\omega)$.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-T_1}^{T_1} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega T_1}}{-j\omega} - \frac{e^{j\omega T_1}}{-j\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}}{-j}\right) \Rightarrow$$

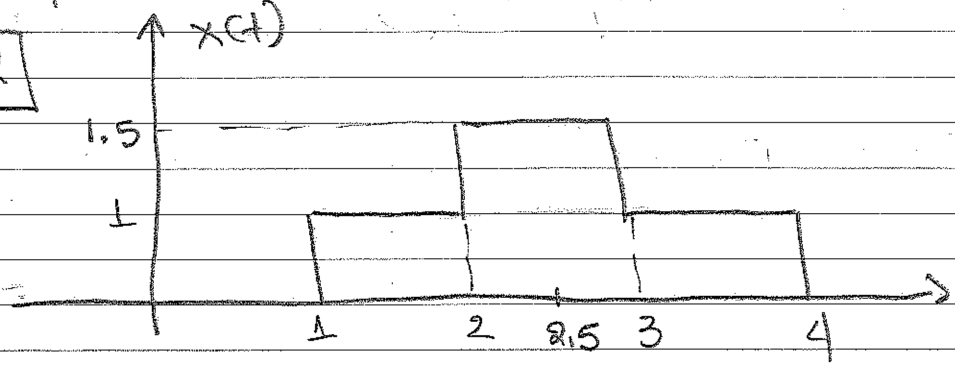
αλλα απο Euler $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}}{-2j}\right) = \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{2j}\right) =$$

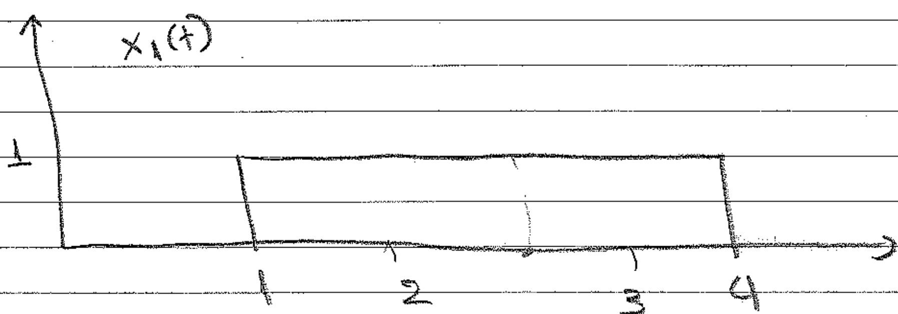
$$= \frac{2}{\omega}\sin(\omega T_1) = 2\,\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

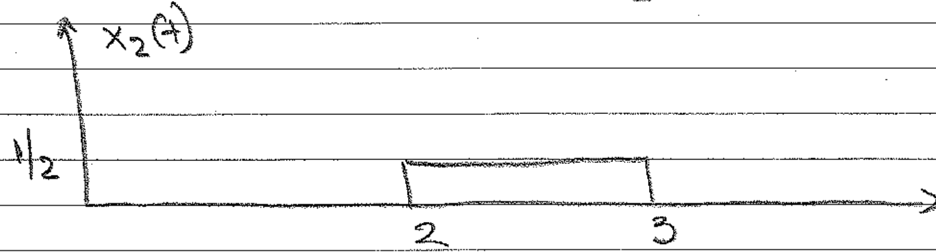
Τωρα εστω το σημα $x(t)$ ως φαινεται παρακατω

$\boxed{\text{Ασκηση 2}}$

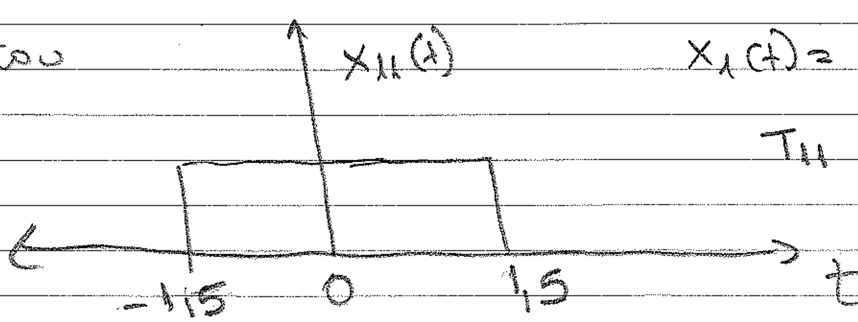


Παρατηρω οτι αυτο το σημα προερχεται απο αθροιση 2 τετραγωνικων παλμων:





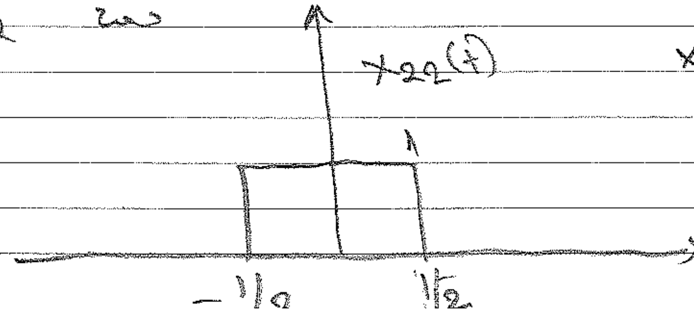
Ο $x_1(t)$ προερχεται απο μετατοπιση προς τα δεξια του



$x_1(t) = x_{11}(t-2{,}5)$

$T_{11} = 1{,}5$

και ο x_2 προερχεται απο μετατοπιση και πολλαπλασιασμο $1/2$ του



$x_2(t) = \frac{1}{2} x_{22}(t-2{,}5)$

$T_{22} = 1/2$

άρα

$$x(t) = x_{11}(t-2,5) + 1/2\, x_{22}(t-2,5)$$

αλλά $X_{11}(\omega) = \frac{2\sin(\omega 1,5)}{\omega} \Rightarrow X_1(\omega) = e^{-j\omega 2,5} \frac{2\sin(\omega 1,5)}{\omega}$

$T_{11} = 1,5$

και $X_{22}(\omega) = 1/2 \cdot \frac{2\sin(\omega 1/2)}{\omega} \Rightarrow$

$\tau_{22}\, 1/2$

$$\Rightarrow X_2(\omega) = e^{-j\omega 2,5} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\sin(\omega 1/2)}{\omega}$$

άρα $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) =$

$$= e^{-j\omega 5/2} \left[\frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(\omega 3/2)}{\omega} \right]$$

$\boxed{\text{Άσκηση 3}}$

Έχουμε το ευσταθές ΓΧΑ σύστημα που χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

ζητείται η κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$

λύση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \overset{FT}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{4dy(t)}{dt} + 3y(t)\right\} = F\left\{\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right\} \Rightarrow$$

(4)

$$\Rightarrow (j\omega)^2 Y(\omega) + 4j\omega Y(\omega) + 3Y(\omega) = j\omega X(\omega) + 2X(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 + 4j\omega + 3) Y(\omega) = (2 + j\omega) X(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2+j\omega}{-\omega^2+4j\omega+3} \Rightarrow H(\omega) = \frac{2+j\omega}{-\omega^2+4j\omega+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

$$ax^2+bx+\gamma=0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16-4\cdot 3} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{A}{(j\omega+1)} + \frac{B}{(j\omega+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j\omega+2 = j\omega A + 3A + j\omega B + B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 3A+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 1-A \qquad \Rightarrow B = 1/2 \\ 3A+1-A=2 \Rightarrow 2A=1 \Rightarrow A=1/2 \end{array}$$

άρα $$H(\omega) = \frac{1/2}{j\omega+1} + \frac{1/2}{j\omega+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{j\omega+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{j\omega+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{2}\, e^{-t} u(t) + \frac{1}{2}\, e^{-3t} u(t)}$$

Άσκηση 4

$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a>0$

από εξίσωση ανάλυσης

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(-a-j\omega)t} dt = \frac{1}{-a-j\omega} e^{(a-j\omega)t} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{-a-j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-a-j\omega}[0 \;\; -1] =$$

$$= \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow \boxed{X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}} \quad a>0$$

Άσκηση 5

$x(t) = e^{-a|t|}$

μπορώ να γράψω $x(t) = e^{-at} u(t) + e^{-a(-t)} u(-t)$

ξέρω ότι $F\{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega}$

και από scaling $\quad x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\omega/a)$ έχω

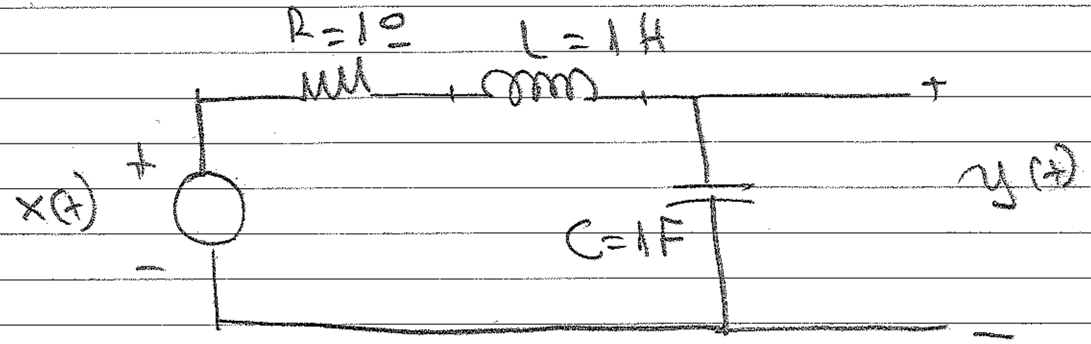
$$F\{e^{-a(-t)} u(-t)\} = \frac{1}{a-j\omega}$$

οπότε $\quad X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{a-j\omega+a+j\omega}{(a+j\omega)(a-j\omega)} =$

$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Άσκηση 6.

Έχω το παρακάτω RLC κύκλωμα



α) Βρείτε τη διαφορική εξίσωση που συνδέει την είσοδο x(t) με την έξοδο y(t)

β) Βρείτε την κρουστική απόκριση του κυκλώματος

α) Το ρεύμα που περνάει από τον πυκνωτή είναι

$$I_C = C\frac{dy}{dt}$$

η $x(t) = V_R + V_L + V_C \Rightarrow$

$$I_R = I_L = I_C$$

$$\Rightarrow x(t) = R I_R + L\frac{dI_L}{dt} + V_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dy(t)}{dt}\right) + y(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t)}$$

β) $X(\omega) = j\omega Y(\omega) + (j\omega)^2 Y(\omega) + Y(\omega) \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(\omega) = Y(\omega)\left(j\omega + (j\omega)^2 + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1}$$

7

Για να παραγοντοποιήσω το $(j\omega)^2 + j\omega + 1$

έχω $\Delta = 1 - 4 = -3$ άρα οι ρίζες είναι

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{|-3|}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$$

άρα $H(\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} = \dfrac{A_1}{j\omega + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \dfrac{A_2}{j\omega + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Παρατήρηση: Επειδή έχω μιγαδικές ρίζες (που είναι αναγκαία συζυγείς αριθμοί) τα A_1 και A_2 θα είναι μιγαδικοί αριθμοί και συζυγείς

άρα $H(\omega) = \dfrac{1}{(j\omega + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})(j\omega + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})} = \dfrac{A + Bj}{(j\omega + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})} +$

$+ \dfrac{A - Bj}{(j\omega + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = (j\omega + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})(A + Bj) + (j\omega + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})(A - Bj) = $

$\Rightarrow 1 = j\omega A + \frac{1}{2}A + j\frac{\sqrt{3}}{2}A - B\omega + \frac{B}{2}j - \frac{B\sqrt{3}}{2} + j\omega A + \frac{A}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}A +$

$+ B\omega - \frac{B}{2}j + \frac{B\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$1 = j2\omega A - B\sqrt{3} \Rightarrow$ $\boxed{A = 0 \quad B = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$

άρα $H(\omega) = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{3}}j}{j\omega + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}j}{j\omega + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{3}} j \left[\frac{-1}{\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\omega} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\omega} \right]$$

και χρησιμοποιώντας το ζεύγος FT

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a + j\omega}$$

με $Re(a) > 0$ αν ο a είναι μιγαδικός

Έχω

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} j \left(-e^{\left(-1/2 + j\sqrt{3}/2\right)t} u(t) + e^{\left(-1/2 - j\sqrt{3}/2\right)t} u(t) \right)$$