Φροντιστήριο ΗΥ-215 Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς - 29/05/2012

1

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ FOURIER - LAPLACE

Άσκηση 1

Δίνεται το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(t) = \dfrac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$.

Βάζουμε ως είσοδο στο ως άνω φίλτρο το σήμα $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

Ζητείται η συχνότητα αποκοπής τέτοια ώστε το φίλτρο να περνάει ακριβώς τη μισή της συνολικής ενέργειας του σήματος $x(t)$.

Λύση

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

Από γνωστό ζεύγος FT $\quad H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$

και $\quad x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 2}$

άρα η απόκριση του φίλτρου στο πεδίο των συχνοτήτων είναι

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \Rightarrow \boxed{Y(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \quad |\omega| < \omega_c}$$

Η ενέργεια του σήματος εισόδου είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2t}u(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{-4} e^{-4t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

Θέλουμε η ενέργεια του σήματος εξόδου $y(t)$ να είναι ίση με $E_y = \frac{1}{2}E_x \Rightarrow E_y = \frac{1}{8} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{8}$

αλλά από σχέση Parseval $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{8} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|Y(\omega)|^2\,d\omega = \frac{\pi}{4}$$ (2).

$$\text{και} \quad Y(\omega) = \frac{1}{2+j\omega} \quad |\omega| < \omega_c \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\omega_c}^{\omega_c}\left|\frac{1}{2+j\omega}\right|^2 d\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{1}{|2+j\omega|^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{1}{4+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{\omega_c}\frac{1}{4+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\,\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\omega}{2}\Big|_0^{\omega_c} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\omega_c}{2} - \tan^{-1}\frac{0}{2} = \pi/4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\omega_c}{2} = \pi/4 \Rightarrow \frac{\omega_c}{2} = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\omega_c}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_c = 2 \text{ rad/sec}}$$

χρησιμοποιήθηκε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

Άσκηση 2

Έστω το σήμα $x_p(t)$ που προκύπτει από δειγματοληψία του σήματος $x(t)$ με ένα τρένο παλμών. Το σήμα $x(t)$ είναι ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας ίσης με το μισό της συχνότητας δειγματοληψίας, δηλαδή $x(t)=\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t+\varphi\right)$.

και $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$ με $T=\frac{2\pi}{\omega_s}$.

(α) Βρείτε ένα σήμα $g(t)$ τέτοιο ώστε

$$x(t)=\cos\varphi\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)+g(t).$$

(β) Δείξτε ότι $g(nT)=0$ για $n=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots$

(γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β) δείξτε ότι αν το $x_p(t)$ δοθεί ως είσοδο σε ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\frac{\omega_s}{2}$ τότε η έξοδος είναι $y(t)=\cos(\varphi)\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$.

Λύση

(α) Χρησιμοποιώ την ταυτότητα:
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

οπότε $x(t)=\cos\left(\frac{\omega_s}{2}t+\varphi\right)=\cos\frac{\omega_s t}{2}\cos\varphi-\sin\frac{\omega_s t}{2}\sin\varphi$ $\Big\}\Rightarrow$

και $x(t)=\cos\varphi\cos\frac{\omega_s t}{2}+g(t)$

$$\Rightarrow g(t)=-\sin\varphi\sin\frac{\omega_s t}{2}$$

(β) $T=\frac{2\pi}{\omega_s}\Rightarrow g(nT)=-\sin\varphi\sin\frac{\cancel{\omega_s}}{\cancel{2}}n\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\omega_s}}\Rightarrow g(nT)=-\sin\varphi\sin(n$

οπότε $g(nT)=0$. για n ακέραιο

(γ) έχω $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\Longrightarrow$

$$\Rightarrow x_p(t) = \sum_{n=-\infty} \left(\cos\varphi \cos\frac{\omega_s}{2} nT - \sin\varphi \sin\frac{\omega_s}{2} nT\right) \delta(t-nT) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\varphi \cos\frac{\omega_s}{2} nT \, \delta(t-nT) \Rightarrow$$

Απο το ως άνω σήμα, όταν θα περάσει από βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής των $\omega_s/2$, ουσιαστικά κρατάμε το φάσμα των από $-\omega_s/2$ έως $\omega_s/2$ που αντιστοιχεί στο σήμα $\boxed{y(t) = \cos\varphi \cos\frac{\omega_s}{2} t}$

Άσκηση 3

Έστω ΓΧΑ σύστημα που είσοδος και έξοδος συνδέονται με τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t).$$

(α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά της

(b). βρείτε το $h(t)$ αν:

(i) το σύστημα είναι ευσταθές

(ii). το σύστημα είναι αιτιατό.

(iii) το σύστημα δεν είναι ούτε ευσταθές ούτε αιτιατό.

(c) επαναλάβετε τα ερωτήματα (α) & (b) για το ΓΧΑ σύστημα που εκφράζεται από τη διαφορική.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9\frac{dy(t)}{dt} - 13y(t) = x(t)$$

Λύση

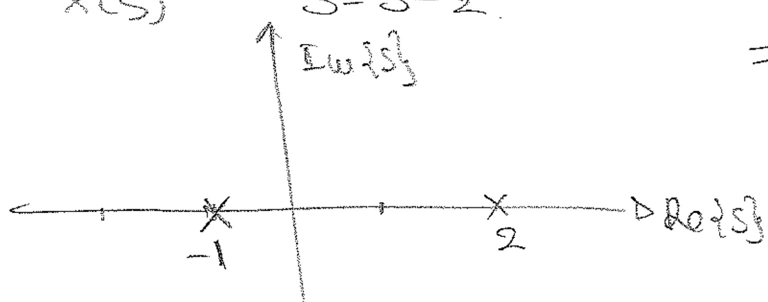
(α) $s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y(s)[s^2 - s - 2] = X(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2-s-2} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2-s-2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)} =$

$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}$

$A = \frac{1}{3}, \ B = -\frac{1}{3}$



(b) (i) για ευστάθεια θέλω τον άξονα των φανταστικών μέσα στη ROC οπότε. $-1 < Re\{s\} < 2$, οπότε

$$H(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \qquad -1 < Re\{s\} < 2$$

απο το ζευγος $e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\} > -a$

και από το ζευγος $-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$, $Re\{s\} < -a$

εχω $h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

(ii) για αιτιατοτητα θελω $Re\{s\} > 2$

οποτε $H(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

(iii) για σημα απο τα αριστερα θελω $Re\{s\} < -1$

οποτε $h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$

(c) $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9\frac{dy(t)}{dt} - 13y(t) = x(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^3Y(s) + 3s^2Y(s) + 9sY(s) - 13Y(s) = X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3+3s^2+9s-13} = \frac{1}{s^3+3s^2+13s-4s-13} =$$

$$= \frac{1}{s^3+3s^2+13(s-1)-4s} = \frac{1}{s^3+4s^2-s^2+13(s-1)-4s} = \frac{1}{s^3-s^2+4s(s-1)+13(s-1)}$$

$$= \frac{1}{s^2(s-1)+4s(s-1)+13(s-1)} = \frac{1}{(s-1)(s^2+4s+13)} \; *$$

* $s^2+4s+13=0$

$\Delta = 16-52 = -36$

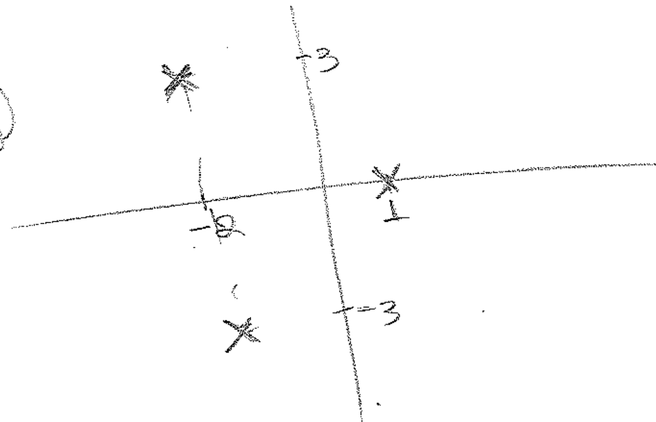
$s_{1,2} = \frac{-4 \pm j6}{2}$, $s_1 = -2+3j$, $s_2 = -2-3j$

αρα $H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2-3j)(s+2+3j)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B+jC}{s+2-3j} + \frac{B-jC}{s+2+3j}$

$A = \frac{1}{(1-3j)(1+3j)} = \frac{1}{10}$

$B+jC = \frac{1}{(-2+3j-1)(-2+3j+2+3j)} =$

$\frac{1}{(-3+3j)6j} = -\frac{1}{36} + \frac{1}{36}j$



(i) για ευστάθεια θέλω $-2 < Re\{s\} < 1$

οπότε

$H(s) = \frac{1/10}{(s-1)} - \frac{1}{36}\frac{1}{s+2-3j} + \frac{j}{36}\frac{1}{s+2-3j} - \frac{1}{36}\frac{1}{s+2+3j} -$

$-\frac{j}{36}\frac{1}{s+2+3j} \Rightarrow$

$\Rightarrow h(t) = -\frac{1}{10}e^{t}u(-t) - \frac{1}{36}e^{(-2+3j)t}u(t) + \frac{j}{36}e^{(-2+3j)t}u(t) - \frac{1}{36}e^{(2+3j)t}u(t)$

$-\frac{j}{36}e^{(2+3j)t}u(t)$

(ii) για αιτιατότητα θέλω $Re\{s\} > 1$

οπότε $h(t) = \frac{1}{10}e^{t}u(t) - \frac{1}{36}e^{(-2+3j)t}u(t) + \frac{j}{36}e^{(-2+3j)t}u(t) - \frac{1}{36}e^{(2+3j)t}u(t) -$

$-\frac{j}{36}e^{(2+3j)t}u(t)$

(iii) για τίποτα από τα δύο θέλω $Re\{s\} < -2$

αρα $u(t) = -\frac{1}{10}e^{t}u(-t) + \frac{1}{36}e^{(-2+3j)t}u(-t) - \frac{j}{36}e^{(2+3j)t}u(-t) + \frac{1}{36}e^{(2+3j)t}u(-t) +$

$+\frac{j}{36}e^{(2+3j)t}u(-t)$

Άσκηση 4

Έστω το σήμα

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + 2\cos(8\pi t)$$

το $x(t)$ δειγματοληπτείται με ένα τρένο παλμών

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \text{περιόδου } T.$$

Αποδείξτε πόση πρέπει να είναι η συχνότητα δειγματοληψίας ω_s που εξασφαλίζει ορθή ανακατασκευή του σήματος $x(t)$.

Λύση

το δειγματοληπτημένο σήμα $x_p(t)$ είναι

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

και το φάσμα του είναι

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

το φάσμα του $X(\omega)$ είναι

$$X(\omega) = 3\pi\,\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right) + 3\pi\,\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{4}\right) + 2\pi\,\delta(\omega - 8\pi) + 2\pi\,\delta(\omega + 8\pi)$$

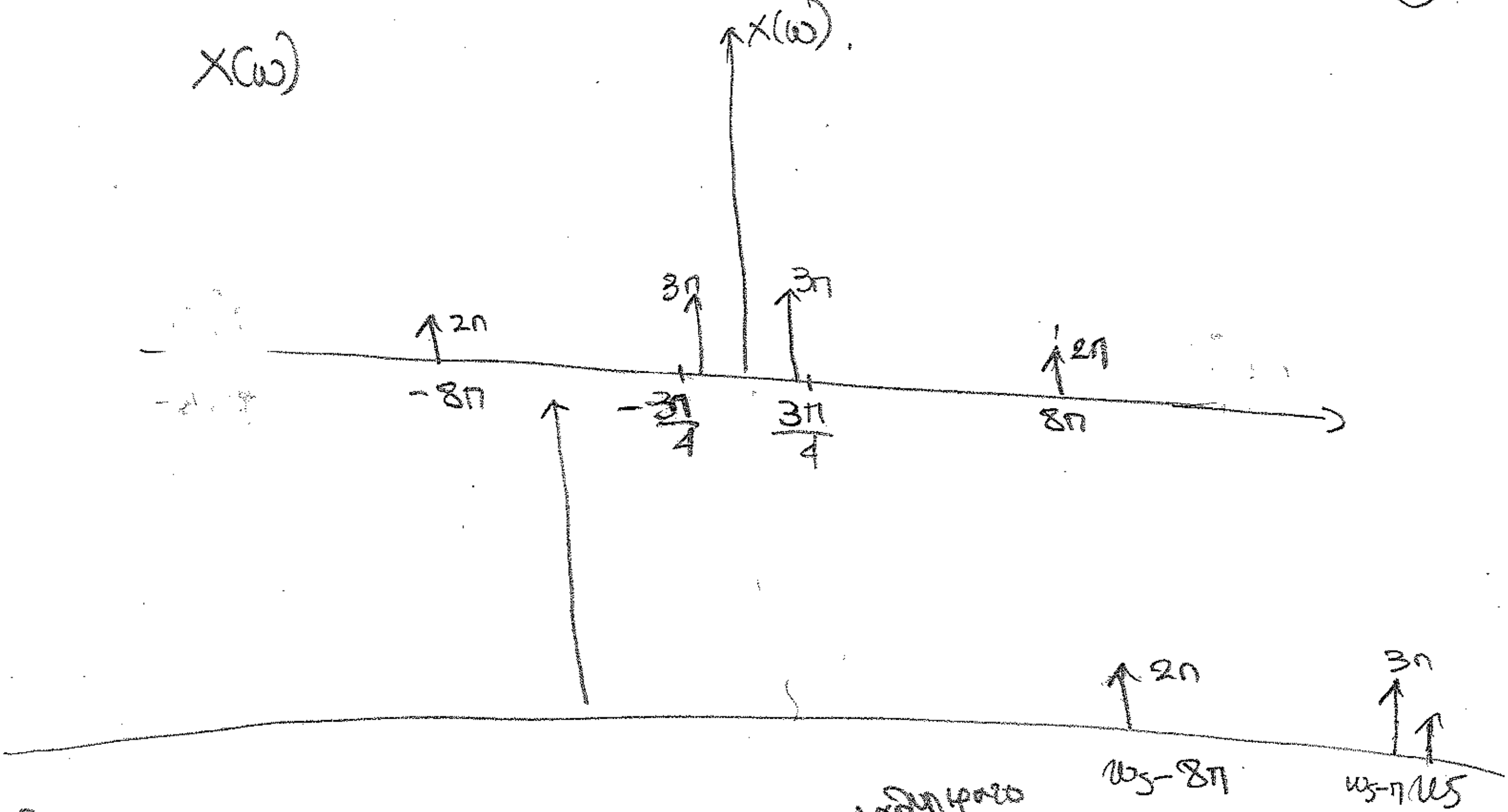
το φάσμα του $p(t)$ είναι $P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$

το φάσμα του $X_p(\omega)$ είναι $X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

άρα θέλω $16\pi < \frac{2\pi}{T} = 2 \cdot 16\pi < \omega_s \Rightarrow \boxed{\omega_s > 32\pi}$

X(ω)



(β) αν το $x_p(t)$ περαση απο βαθυπερατο φιλτρο $h(t)$ με συχνοτητα αποκοπης $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$ ποια η εξοδος του φιλτρου $y(t)$?

$$\boxed{y(t) = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)}$$