ΗΥ-215 Εφαρμοσμένα μαθηματικά για Μηχανικούς

Επαναληπτικό φροντιστήριο 27/04/2012

$\boxed{\text{Άσκηση 1}}$ - Συνέλιξη

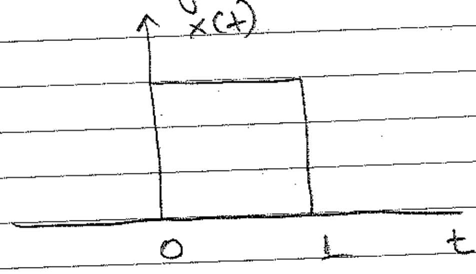
Έστω $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

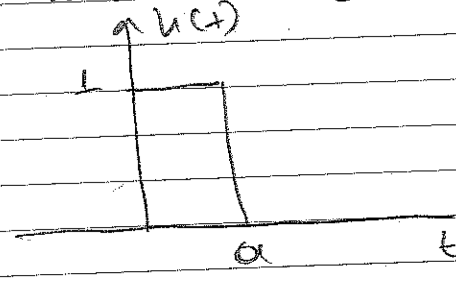
και έστω $h(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$ όπου $0 < a \le 1$

(α) Υπολογίστε και σχεδιάστε το $y(t) = h(t) * x(t)$

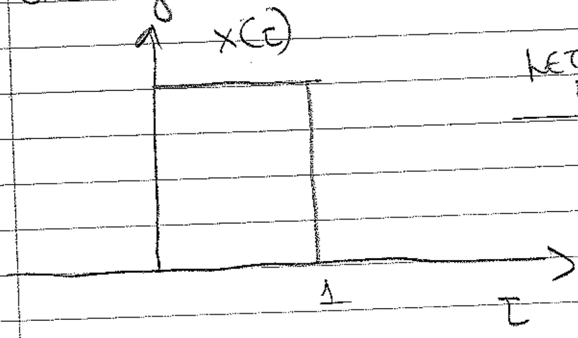
(α) <u>λύση</u>

σχεδιάζω τα $x(t)$ και $h(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$

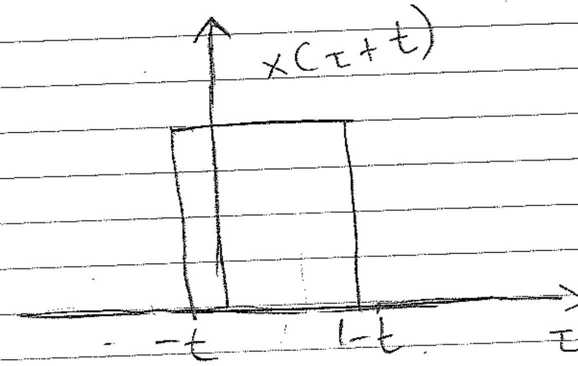


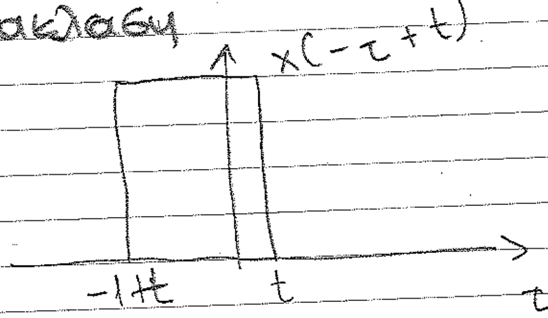

σχεδιάζω το $x(t-\tau)$




μετατόπιση κατά t

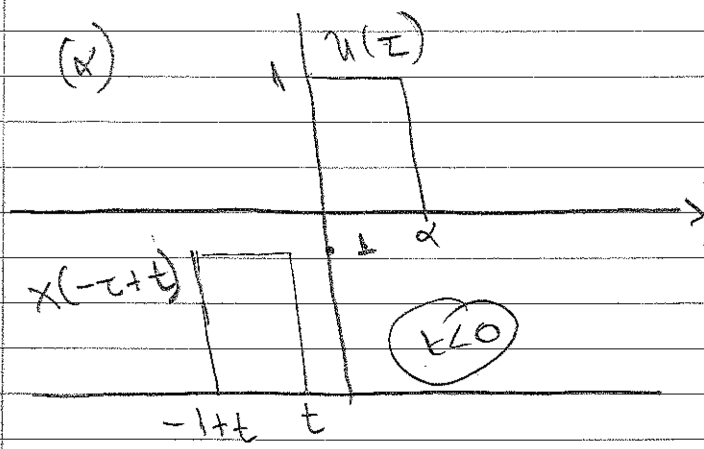



ανάκλαση

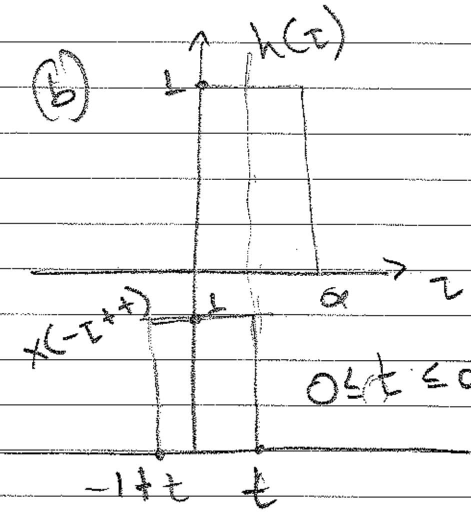


οποτε εχω

(α)




(b)




$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

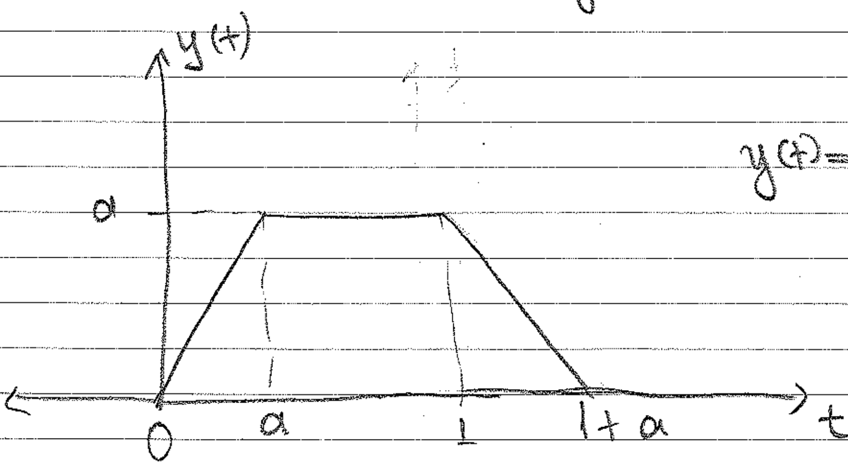
(α) για $t<0$ $\quad y(t)=0$

(b) για $0\le t\le a$ $\quad y(t)=\int_{0}^{t} 1\,d\tau=\tau\Big|_{0}^{t}=t \Rightarrow y(t)=t$

(γ) για $a\le t\le 1$ $\quad y(t)=\int_{0}^{a} 1\,d\tau=\tau\Big|_{0}^{a}=a \Rightarrow y(t)=a$

(δ) για $1\le t\le a+1$ $\quad y(t)=\int_{-1+t}^{a} 1\,d\tau=\tau\Big|_{-1+t}^{a}=a+1-t$

(ε) για $t>a+1$ $\quad y(t)=0$




$$y(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le a \\ a & a\le t\le 1 \\ a+1-t & 1\le t\le a+1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(b) αν η $\frac{dy(t)}{dt}$ εχη μονο 3 σημεια ασυνεχειας, ποια ειναι η τιμη του α?

(b) λυση : απο τη γραφικη παρασταση του $y(t)$ παρατηρω οτι η $dy/dt$ εχη 4 σημεια ασυνεχειας στα σημεια για $t = 0, a, 1$ και $1+a$
Για να εχω 3 σημεια θα πρεπει το $\boxed{a=1}$
παρατηρηση : το α δεν μπορη να ειναι 0 γιατι ξερω οτι $0<a\leq 1$

$\boxed{\text{Ασκηση 2}}$ – Συνελιξη

Η επιφανεια κατω απο ενα σημα συνεχους χρονου $v(t)$ οριζεται ως

$$A_v = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt$$

Δειξτε οτι αν $y(t) = x(t) * h(t)$ τοτε

$$A_y = A_x \cdot A_h$$

απο τον ορισμο της επιφανειας

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * h(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,dt\right)d\tau$$

$$\overset{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(k)\,dk\right)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} A_h\,x(\tau)\,d\tau =$$

$$= A_h \cdot A_x$$

* αλλαγη $t - \tau = k \Rightarrow dt = dk$

## Άσκηση 3

Δίνεται το σήμα $x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi/4\right)$. Να βρεθούν οι συντελεστές Fourier αυτού και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης

<u>λύση</u> :

χρησιμοποιώ την ταυτότητα

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

οπότε $x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \pi/4\right) = 3\,\frac{e^{j(\frac{\pi}{2}t + \pi/4)} + e^{-j(\frac{\pi}{2}t + \pi/4)}}{2} =$

$$+\frac{3}{2} e^{j\pi/2 t} e^{j\pi/4} + \frac{3}{2} e^{-j\pi/4} e^{-j\pi/2 t}$$

αλλά από την εξίσωση της σύνθεσης

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk2\pi f_0 t}$$

και γνωρίζοντας ότι $\frac{\pi}{2} = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\pi}{2\cdot 2\pi} = 1/4$

και $\omega_0 = \pi/2$

έχω $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, e^{jk\frac{\pi}{2}t}$

άρα αναγνωρίζω $\frac{\pi}{2} = k\pi/2 \Rightarrow k = 1$

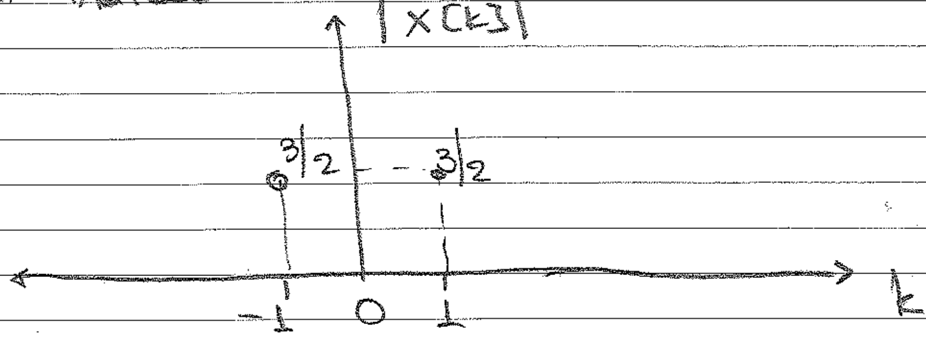
άρα $X[1] = \frac{3}{2} e^{j\pi/4}$

$-\pi/2 = k\,\pi/2 \Rightarrow k = -1$

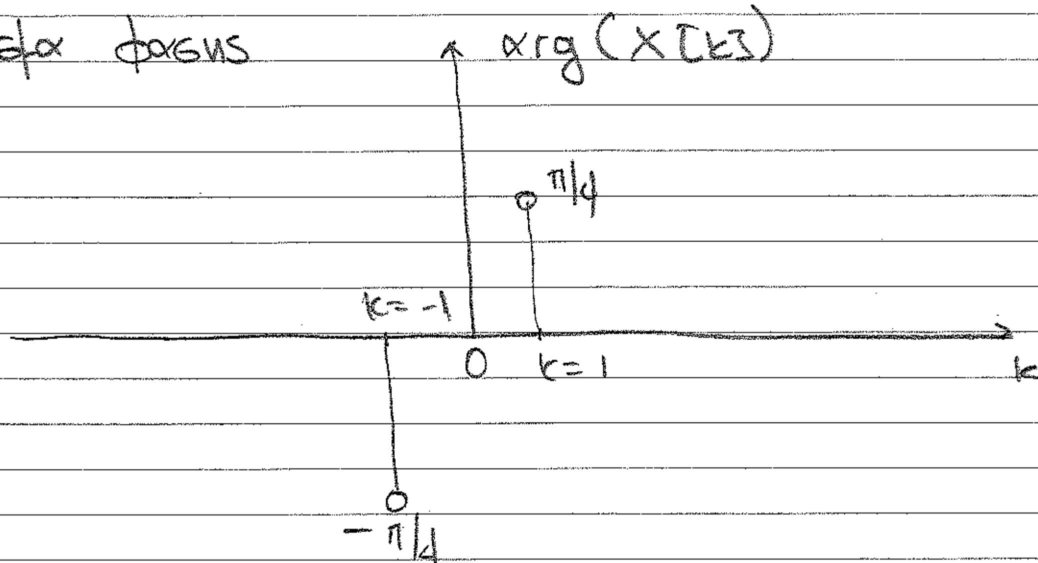
$X[-1] = \frac{3}{2} e^{-j\pi/4}$

άρα $X[k] = \begin{cases} 3/2\, e^{j\pi/4} & k = 1 \\ 3/2\, e^{-j\pi/4} & k = -1 \end{cases}$

φασμα πλατους




φασμα φασης




**Άσκηση 4**

Δινονται τα σηματα

$$x_1(t) = 3/2 + \cos(16\pi t + \pi/6)$$

$$x_2(t) = 5\sin(\pi t + 3/2)$$

(a) Να υπολογισθουν οι συντελεστες Fourier της καθε μιας συναρτησης

(b) Χρησιμοποιωντας τις ιδιοτητες των σειρων Fourier αποφανθειτε για το ποιο σημα (στο πεδιο του χρονου) $x_4(t)$ αναπαρισταται απο τους κατωθεν συντελεστες Fourier

Υποδειξη: χρησιμοποιειστε τα αποτελεσματα του ερωτηματος (a).

$$X_4[k] = \begin{cases} 3 & k=0 \\ 5/2\, e^{j3/2}(\pi - j) & k=1 \\ 5/2\, e^{-j3/2}(\pi + j) & k=-1 \\ e^{j\pi/6} & k=16 \\ e^{-j\pi/6} & k=-16 \end{cases}$$

(c) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $x_1(t)$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση ανάλυσης. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας βάση της απάντησης που δώσατε στο ερώτημα (α)

Λύση:

(α)

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = \dfrac{3}{2} + \cos(16\pi t + \pi/6) \\ \text{από Euler} \quad \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{3}{2} + \frac{e^{j(16\pi t + \pi/6)} + e^{-j(16\pi t + \pi/6)}}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{j(16\pi t + \pi/6)} + \frac{1}{2} e^{-j(16\pi t + \pi/6)} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{j\pi/6} e^{j16\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/6} e^{-j16\pi t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1[k] = \begin{cases} 3/2 & k=0 \\ \frac{1}{2} e^{j\pi/6} & k=1 \\ \frac{1}{2} e^{-j\pi/6} & k=-1 \end{cases} \qquad \omega_1 = 16\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2(t) = 5\sin(\pi t + 3/2) \\ \text{απο euler} \quad \sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{5e^{j(\pi t + 3/2)}}{2j} - \frac{5}{2j} e^{-j(\pi t + 3/2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = -j\frac{5}{2} e^{j3/2} e^{j\pi t} + j\frac{5}{2} e^{-j3/2} e^{-j\pi t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_2[k] = \begin{cases} -j\frac{5}{2} e^{j3/2} & k=1 \\ j\frac{5}{2} e^{-j3/2} & k=-1 \end{cases} \qquad \omega_2 = \pi$$

(b)

Δινεται

$$X_4[k] = \begin{cases} 3 & k=0 \\ 5/2\, e^{j3/2}(\pi - j) & k=1 \\ 5/2\, e^{-j3/2}(j-\pi) & k=-1 \\ e^{j\pi/6} & k=16 \\ e^{-j\pi/6} & k=-16 \end{cases}$$

απο το $X_4[0]=3/2$ ξερω οτι εχω μια dc συνιστωσα ισυ με $3 \Rightarrow x_4(t) = 3 + \dots$

απο το $X_4[1] = \frac{5}{2} e^{j3/2}(\pi - j) = \frac{5}{2}\pi e^{j3/2} - j\frac{5}{2}e^{j3/2}$

αλλα ξερω οτι $X_2[1] = -j\frac{5}{2}e^{j3/2}$ και $\omega_2 = \pi$

επισης παρατηρω οτι: $Xj \cdot 1 \cdot \omega_0 \; X_2[1] = j\pi(-j\frac{5}{2}e^{j3/2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow j\omega_0 X_2[1] = \frac{5\pi}{2} e^{j3/2}$

ομοια απο το $X_2[-1] = j\frac{5}{2}e^{-j3/2}$ :

$-j\pi X_2[-1] = -j\pi j \frac{5}{2} e^{-j3/2} = \pi \frac{5}{2} e^{-j3/2}$

αλλα απο την (1) ιδιοτητα της διαφορισης

$$\frac{d\,x(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS;\omega_0} jk\omega_0 X[k]$$

και απο την (2) ιδιοτητα γραμμικοτητας συμπεραινω

$$x_4(t) = 3 + x_2(t) + \frac{dx_2(t)}{dt}$$

Τελος απο τους συντελεστες $X[16]$ και $X[-16]$ και αναγνωριζοντας οτι ο ΜΚΔ του:

$$F_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{16\pi}{2\pi} = 8$$

$$\text{και } F_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 1/2$$

είναι η $F_4 = 1/2 \Rightarrow \omega_4 = \pi$ και χρησιμοποιώντας ξανά γραμμικότητα έχω
έχω

$$x_4(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + \frac{dx_2(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_4(t) = 3 + 2\cos(16\pi t + \pi/6) + 5\sin(\pi t + 3/2)$$
$$+ 5\pi\cos(\pi t + 3/2)$$

(c) απο την εξίσωση της ανάλυσης

$$\left.\begin{array}{l} X_1[k] = \dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{T_1} x_1(t)e^{-jk\omega_1 t}dt \\ \text{και} \\ x_1(t) = \dfrac{3}{2} + \cos(16\pi t + \pi/6) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1[k] = \frac{1}{T_1}\int_{T_1}\left[\frac{3}{2} + \cos\left(16\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right]e^{-jk\omega_1 t}dt =$$

$$= \frac{1}{T_1}\left[\int_{T_1}\frac{3}{2}e^{-jk\omega_1 t}dt + \int_{T_1}\cos\left(16\pi t + \frac{\pi}{6}\right)e^{-jk\omega_1 t}dt\right] =$$

$$\overset{euler}{=} \frac{1}{T_1}\left[\int_{T_1}\frac{3}{2}e^{-jk\omega_1 t}dt + \int_{T_1}\frac{e^{j(16\pi t + \pi/6)} + e^{-j(16\pi t + \pi/6)}}{2}e^{-jk\omega_1 t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{T_1}\left[\int_{T_1}\frac{3}{2}e^{-jk\omega_1 t}dt + \int_{T_1}\frac{1}{2}e^{j(16\pi t + \pi/6)}e^{-jk\omega_1 t}dt +\right.$$

$$\left. + \int_{T_1}\frac{1}{2}e^{-j\left(16\pi t + \frac{\pi}{6}\right)}e^{-jk\omega_1 t}dt\right] =$$

$$\stackrel{k\neq 0}{=} \frac{1}{T_1}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{-jk\omega_1}e^{-jk\omega_1 t}\Big|_0^{T_1} +\right.$$

$$\left. + \int_{T_1}\frac{1}{2}e^{j16\pi t}e^{j\pi/6}e^{-jk\omega_1 t}\,dt + \int_{T_1}\frac{1}{2}e^{-j16\pi t}e^{-j\pi/6}e^{-jk\omega_1 t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T_1}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{jk\omega_1}\left[e^{-jk\omega_1 T_1} - 1\right] + \frac{1}{2}e^{j\pi/6}\int_{T_1} e^{t(16j\pi - jk\omega_1)}\,dt\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}\int_{T_1} e^{t(-j16\pi - jk\omega_1)}\,dt\right] =$$

$$\stackrel{\omega_1 = 2\pi/T_1}{=} \frac{1}{T_1}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T_1}}\left[\cancel{e^{-jk2\pi}} - 1\right] + \frac{1}{2}e^{j\pi/6}\int_{T_1} e^{t(j16\pi - jk\frac{2\pi}{T_1})}\,dt\right. +$$

$$\left. + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}\int_{T_1} e^{t(-j16\pi - jk\frac{2\pi}{T_1})}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{T_1}\left[\frac{1}{2}e^{j\pi/6}\frac{e^{t(16\pi j - jk\frac{2\pi}{T_1})}}{16\pi j - jk\frac{2\pi}{T_1}}\Bigg|_0^{T_1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}\frac{e^{t(-j16\pi - jk\frac{2\pi}{T_1})}}{-j16\pi - jk\frac{2\pi}{T_1}}\Bigg|_0^{T_1}\right] \qquad \underline{\underline{\begin{matrix}T_1 = 2\pi/\omega_1\\ \omega_1 = 16\pi\end{matrix}}}$$

$$\stackrel{T_1 = 1/8}{=} 8\left[\frac{1}{2}e^{j\pi/6}\frac{e^{t(16\pi j - jk16\pi)}}{16\pi j - jk16\pi}\Bigg|_0^{1/8} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}\frac{e^{t(-j16\pi - jk16\pi)}}{-j16\pi - jk16\pi}\Bigg|_0^{1/8}\right.$$

$$\stackrel{\substack{k\neq 1\\ k\neq -1}}{=} 8\left[\frac{1}{2}e^{j\pi/6}\frac{e^{16\pi j t(1-k)}}{16\pi j(1-k)}\Bigg|_0^{1/8} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}\frac{e^{-t16\pi j(1+k)}}{-16j\pi(1+k)}\Bigg|_0^{1/8}\right] =$$

$$= 8\left[\frac{1}{2}\frac{e^{j\pi/6}}{16\pi j(1-k)}\left[\cancel{e^{j2\pi(1-k)}} - 1\right] + \frac{1}{2}\frac{e^{-j\pi/6}}{-16j\pi(1+k)}\left[\cancel{e^{-j2\pi(1+k)}} - 1\right]\right] =$$

$= 0 \Rightarrow X[k] = 0$ για $k\neq 0,\ k\neq 1,\ k\neq -1$

για $k=0$

$$X_1[0] = \frac{1}{T_1}\int_{T_1}\left[\frac{3}{2} + \cos(16\pi t + \pi/6)\right]e^{-j0\omega_1 t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{T_1}\left[\frac{3}{2} + \cos(16\pi t + \pi/6)\right]dt \overset{euler}{=} \dots =$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{T_1}\frac{3}{2}\,dt + \frac{1}{T_1}\frac{1}{2}e^{j\pi/6}\int_{T_1}e^{j16\pi t}\,dt + \frac{1}{T_1}\frac{1}{2}e^{-j\pi/6}\int_{T_1}e^{-j16\pi t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T_1}\frac{3}{2}t\Big|_0^{T_1} + \frac{1}{T_1}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{j\pi/6}}{j16\pi}\cdot e^{j16\pi t}\Big|_0^{T_1} + \frac{1}{T_1}\frac{1}{2}\frac{e^{-j\pi/6}}{-j16\pi}e^{-j16\pi t}\Big|_0^{T_1} =$$

$$= \frac{1}{T_1}\cdot\frac{3}{2}T_1 + \frac{1}{T_1}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{j\pi/6}}{j16\pi}\left[e^{j16\pi T_1} - 1\right] + \frac{1}{T_1}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-j\pi/6}}{-j16\pi}\left[e^{-j16\pi T_1} - 1\right]$$

$$\overset{T_1 = 1/8}{=} \frac{3}{2} + 4\frac{e^{j\pi/6}}{j16\pi}\cancel{\left[e^{j2\pi} - 1\right]}^{\to 0} + 4\frac{e^{-j\pi/6}}{-j16\pi}\cancel{\left[e^{-j2\pi} - 1\right]}^{\to 0} =$$

$$= 3/4 \Rightarrow X_1[0] = 3/4$$

για $k=1$

$$X_1[1] = \frac{1}{T_1}\int_{T_1}\left[\frac{3}{2} + \cos(16\pi t + \pi/6)\right]e^{-j\omega_1 t}\,dt \overset{euler}{=}$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{T_1}\frac{3}{2}e^{-j\omega_1 t}\,dt + \frac{1}{T_1}\frac{1}{2}e^{j\pi/6}\int_{T_1}e^{j16\pi t - j\omega_0 t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{T_1}\frac{1}{2}e^{-j\pi/6}\int_{T_1}e^{-j16\pi t - j\omega_0 t}\,dt \underset{\omega_1 = 16\pi}{\overset{T_1 = 1/8}{=}}$$

$$= 8\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{-j16\pi}e^{-j16\pi t}\Big|_0^{T_1} + 8\cdot\frac{1}{2}e^{j\pi/6}\int_{T_1}e^{j16\pi t - j16\pi t}\,dt +$$

$$+ 8\cdot\frac{1}{2}e^{-j\pi/6}\int_{T_1}e^{-j16\pi t - j16\pi t}\,dt =$$

$$= 12 \frac{1}{-j16\pi}\left[\cancel{e^{-j2\pi}}^{\to 0} - 1\right] + 4e^{j\pi/6}\int_{T_1} 1\,dt +$$

$$+ 4e^{-j\pi/6}\int_{T_1} e^{-j32\pi t}\,dt =$$

$$= 4e^{j\pi/6}\, t\Big|_0^{T_1} + 4e^{-j\pi/6}\frac{1}{-32\pi j} e^{-j32\pi t}\Big|_0^{T_1} =$$

$$= 4e^{j\pi/6}\left[\frac{1}{8} - 0\right] + \frac{e^{-j\pi/6}}{-8\pi j}\left[\cancel{e^{-j4\pi}}^{\to 0} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\pi/6} \Rightarrow X_1[1] = 1/2\, e^{j\pi/6}$$

αντιστοιχα βρισκουμε και $X_1[-1] = \frac{1}{2}e^{-j\pi/6}$

## $\boxed{\text{Ασκηση 5}}$

Να σχεδιαστει το φασμα πλατους και φασης του σηματος

$$x(t) = 3 + 2\cos(16\pi t + \pi/6) + 5\sin(\pi t + 3/2) +$$
$$+ 5\pi\cos(\pi t + 3/2).$$

<u>λυση</u>

απο ασκηση 4 γνωριζω οτι

$$X[k] = \begin{cases} 3 & k=0 \\ \frac{5}{2}e^{j3/2}(\pi - j) & k=1 \\ \frac{5}{2}e^{j3/2}(\pi + j) & k=-1 \\ e^{j\pi/6} & k=16 \\ e^{j\pi/6} & k=-16 \end{cases}$$

οποτε για το $X[0] = 3 \Rightarrow |X[0]| = 3$

και $\arg(X[0]) = 0$

για $k=1$ : $X[1] = \frac{5}{2}e^{j3/2}(\pi - j) =$

$= \frac{5}{2}(\pi - j)\left(\cos 3/2 + j\sin 3/2\right) =$

$= \frac{5}{2}\pi\cos 3/2 - j\frac{5}{2}\cos\frac{3}{2} + j\frac{5}{2}\pi\sin\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sin\frac{3}{2} =$

$= \left(\frac{5}{2}\pi\cos\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sin\frac{3}{2}\right) + j\left(\frac{5}{2}\pi\sin\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\cos\frac{3}{2}\right)$

αρα $|X[1]| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\pi\cos\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sin\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\pi\sin\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\cos\frac{3}{2}\right)^2} =$

$\Rightarrow |X[1]| = 8.2423$

και για τη φάση: $\arg(X_1[1]) = \tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{2}\pi\sin\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\cos\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}\pi\cos\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sin\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \arg(X[1]) = 1.1918$

αντίστοιχα για το $X[-1] = \frac{5}{2}e^{-j3/2}(\pi + j)$

βρίσκουμε $|X[-1]| = 8.2423$

και $\arg(X[-1]) = -1.1918$

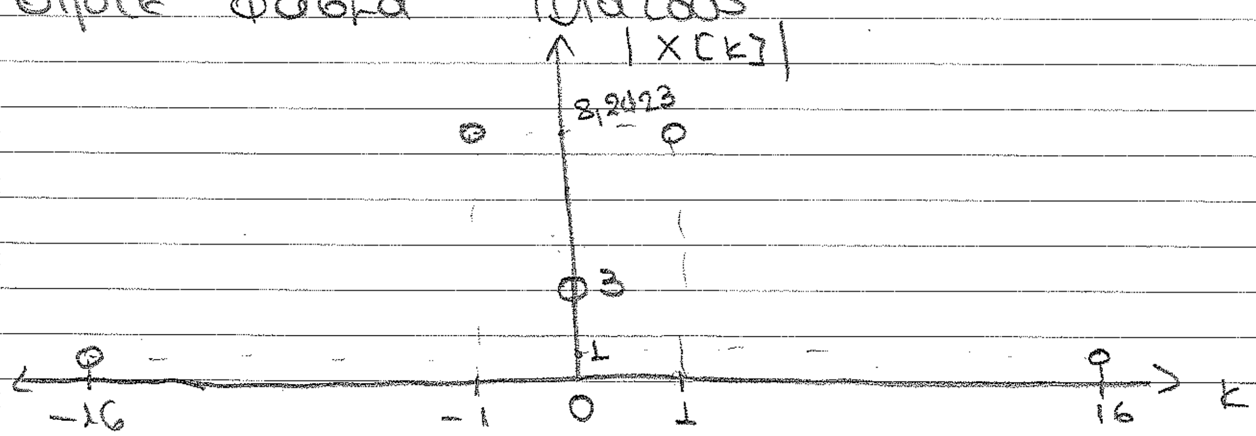
τέλος $X[16] = e^{j\pi/6} \Rightarrow |X[16]| = 1$

και $\arg(X[16]) = \pi/6 = 0,5236$

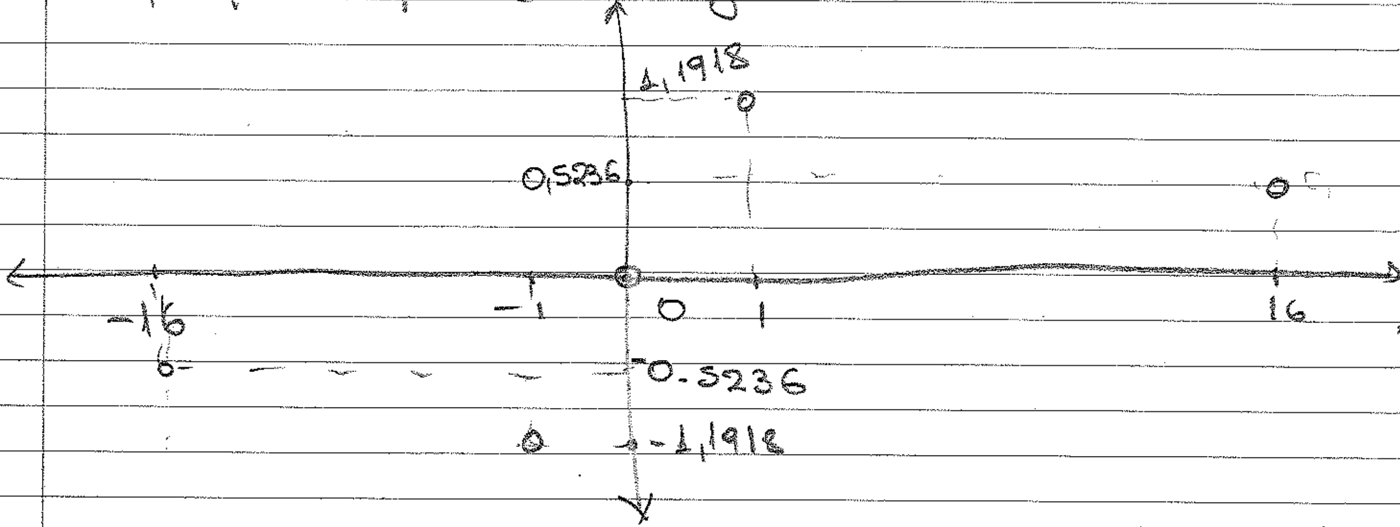
και $X[-16] = e^{-j\pi/6} \Rightarrow |X[-16]| = 1$

και $\arg(X[-16]) = -\pi/6 = -0.5236$

οπότε φάσμα πλάτους



φάσμα φάσης arg(X[k])




Παρατ: για άξονα σε (Hz) γνωρίζοντας τη βασική συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \omega_0 / 2\pi$

έχω για $k = 0 \Rightarrow f = 0$ Hz

για $k = 1 \Rightarrow f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

για $k = 2 \Rightarrow f = 2f_0 = 2\frac{\omega_0}{2\pi}$

κοκ.

Παρατ: για άξονα σε rad (angular frequency) προφανώς γνωρίζοντας την $\omega_0$ έχω

για $k = 0 \Rightarrow \omega = 0$

για $k = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$

για $k = 2 \Rightarrow \omega = 2\omega_0$

κοκ.