Φροντιστήριο – ΗΥ-215 – Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς – 25/05/2012

Άσκηση 1

Να λυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης που ακολουθεί

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = 1$ και

και $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Εφαρμόζω μονόπλευρο μετασχ. Laplace στην διαφορική χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγώγισης.

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

Εφαρμόζοντας ιδιότητα παραγώγισης ξανά στην ως άνω σχέση έχω για τη 2η παράγωγο στο χρόνο

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s\left(sX(s) - x(0^-)\right) - \left.\frac{dx}{dt}\right|_{(t=0^-)} =$$
$$= s^2X(s) - s\,x(0^-) - x'(0^-)$$

άρα $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t) \xleftrightarrow{LT}$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = X(s) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow Y(s)\left[s^2+5s+6\right] = X(s) + 2s + 11 \\ &\text{και} \quad x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{1+s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{1+s} + 2s + 11}{s^2+5s+6} = \frac{\frac{1+2s(1+s)+11(1+s)}{1+s}}{(s+2)(s+3)} =$$

$$= \frac{1+2s+2s^2+11+11s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow Y(s) = \frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Εφαρμόζω ανάλυση σε μερικά κλάσματα στην $Y(s)$ οπότε.

$$Y(s) = \frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{\Gamma}{(s+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \left.\frac{2s^2+13s+12}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} = \frac{2-13+12}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A = 1/2}$$

$$B = \left.\frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2} = \frac{8-26+12}{-1} = 6 \Rightarrow \boxed{B = 6}$$

$$\Gamma = \left.\frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-3} = \frac{18-39+12}{2} = -9/2 \Rightarrow \boxed{\Gamma = -9/2}$$

άρα $Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + 6\frac{1}{s+2} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 6e^{-2t}u(t) - \frac{9}{2}e^{-3t}u(t)}$$

Άσκηση 2

Δίνεται ο ΜΤΣΧ Laplace

$$H(s) = \frac{7s^3+48s^2+1920s+4096}{s^4+4s^3+256s^2+1024s} \qquad Re\{s\}>0.$$

α) Να βρεθεί, αν ορίζεται, ο ΜΤΣΧ Fourier απευθείας από τον LT [δηλαδή χωρίς να βρείτε το h(t) και μετά το $H_F(i\omega)$]

Λύση

αφού $Re\{s\}>0$ μπορώ να βρω τον FT.

Άρα αρχικά βρίσκω τους πόλους του H(s)

οπότε ξεκινάω με παραγοντοποίηση του παρονομαστή και μερικά κλάσματα.

$$H(s) = \frac{7s^3+48s^2+1920s+4096}{s(s^3+4s^2+256s+1024)} = \frac{7s^3+48s^2+1920s+4096}{s[s^2(s+4)+256(s+4)]} =$$

$$= \frac{7s^3+48s^2+1920s+4096}{s(s+4)(s^2-(j16)^2)}$$

άρα έχω πόλους στο $s=-4$ $s=0$ και

$s=\pm j16$

πρέπει να γράψω το H(s) στη μορφή

$$H(s) = H_\alpha(s) + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{s-j\omega_k}$$

άρα πρέπει να βρω τα b_k, οπότε συνεχίζω με ανάλυση σε μερικά κλάσματα

$$H(s) = \frac{7s^3+48s^2+1920s+4096}{s(s+4)(s+j16)(s-j16)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{\Gamma+j\Delta}{s+j16} + \frac{\Gamma-j\Delta}{s-j16} \Rightarrow$$

α)

$$\Rightarrow A = \left.\frac{7s^3+48s^2+1924s+4096}{(s+4)(s+j16)(s-j16)}\right|_{s=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{4096}{4\cdot 256} \Rightarrow \boxed{A=4}$$

b)

$$B = \left.\frac{7s^3+48s^2+1920s+4096}{s(s^2+256)}\right|_{s=-4} = \frac{-3264}{-1088} \Rightarrow \boxed{B=3}$$

c)

$$\Gamma + j\Delta = \left.\frac{7s^3+48s^2+1920s+4096}{s(s+4)(s-j16)}\right|_{s=-j16} =$$

$$= \frac{-8192-j2048}{-2048+j8192} = j \Rightarrow \boxed{\Gamma=0} \quad \boxed{\Delta=1}$$

άρα $H(s) = \frac{4}{s} + \frac{3}{s+4} + \frac{j}{(s+j16)} - \frac{j}{s-j16}$

άρα για τους πόλους στον άξονα των φανταστικών αριθμών έχω για $\omega_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 4$

$\omega_2 = -16 \Rightarrow b_2 = j$

$\omega_3 = 16 \Rightarrow b_3 = -j$

άρα $H_F(\omega) = H_L(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{3} b_k \delta(\omega-\omega_k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow H_F(\omega) = \frac{7(j\omega)^3+48(j\omega)^2+1920j\omega+4096}{(j\omega)^4+4(j\omega)^3+256(j\omega)^2+1024j\omega} + \pi\big(4\delta(\omega)+j\delta(\omega+16)-j\delta(\omega-1$$

$$\Rightarrow H_F(\omega) = \frac{-j7\omega^3 - 48\omega^2 + 1920j\omega + 4096}{\omega^4 - 4j\omega^3 - 256\omega^2 + j1024\omega} + 4\pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega+16) - j\pi\delta(\omega-16)$$ (5)

β) Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμά σας βρίσκοντας το $h(t)$ και από αυτό τον $H_F(\omega)$.

από (α) ερώτημα έχω $H(s) = \frac{4}{s} + \frac{3}{s+4} + \frac{j}{(s+j16)} - \frac{j}{(s-j16)} =$

$$= \frac{4}{s} + \frac{3}{s+4} + \frac{j(s-j16) - j(s+j16)}{s^2+16^2} =$$

$$= \frac{4}{s} + \frac{3}{s+4} + \frac{2\cdot 16}{s^2+16^2} \overset{\text{απο πίνακες}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = 4u(t) + 3e^{-4t}u(t) + 2\sin(16t)u(t)$$

άρα πάλι από πίνακες με γνωστά ζεύγη

έχω
$$4u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{4}{j\omega} + 4\pi\delta(\omega)$$
$$3e^{-4t}u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{3}{4+j\omega}$$

$$2\sin(16t)u(t) = 2\,\frac{e^{j16t} - e^{-j16t}}{2j}\,u(t) =$$

$$= \frac{e^{j16t}}{j}u(t) - \frac{e^{-j16t}}{j}u(t) = -je^{j16t}u(t) + je^{-j16t}u(t)$$

και από ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα

$$\left.\begin{array}{l} e^{j\gamma t}x(t) \longleftrightarrow X(\omega-\gamma) \\ \text{και} \quad u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -je^{j16t}u(t) \longleftrightarrow -j\frac{1}{j(\omega-16)} - j\pi\delta(\omega-16)$$

$$je^{-j16t}u(t) \longleftrightarrow j\frac{1}{j(\omega+16)} + j\pi\delta(\omega+16)$$

άρα

$$H_F(\omega) = \frac{4}{j\omega} + 4\pi\delta(\omega) + \frac{3}{4+j\omega} - \frac{1}{\omega-16} - j\pi\delta(\omega-16) + \frac{1}{\omega+16} +$$

$$+ j\pi\delta(\omega+16) =$$

$$= \frac{4(4+j\omega)+3j\omega}{j\omega(4+j\omega)} - \frac{32}{\omega^2-256} + 4\pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega+16) - j\pi\delta(\omega-16) =$$

$$= \frac{16+4j\omega+3j\omega}{4j\omega-\omega^2} - \frac{32}{\omega^2-256} + 4\pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega+16) - j\pi\delta(\omega-16) =$$

$$= \frac{(16+7j\omega)(\omega^2-256) - 32(4j\omega-\omega^2)}{(4j\omega-\omega^2)(\omega^2-256)} + 4\pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega+16) - j\pi\delta(\omega-16) =$$

$$= \frac{16\omega^2 - 4096 + 7j\omega^3 - 1792j\omega - 128j\omega + 32\omega^2}{4j\omega^3 - 1024j\omega - \omega^4 + 256\omega^2} + 4\pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega+16) - j\pi\delta(\omega-16)$$

$$= \frac{7j\omega^3 + 48\omega^2 - 1920j\omega - 4096}{-\omega^4 + 4j\omega^3 + 256\omega^2 - 1024j\omega} + 4\pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega+16) - j\pi\delta(\omega-16)$$

$$= \frac{-7j\omega^3 - 48\omega^2 + 1920j\omega + 4096}{\omega^4 - 4j\omega^3 - 256\omega^2 + 1024j\omega} + 4\pi\delta(\omega) + j\pi\delta(\omega+16) - j\pi\delta(\omega-16)$$

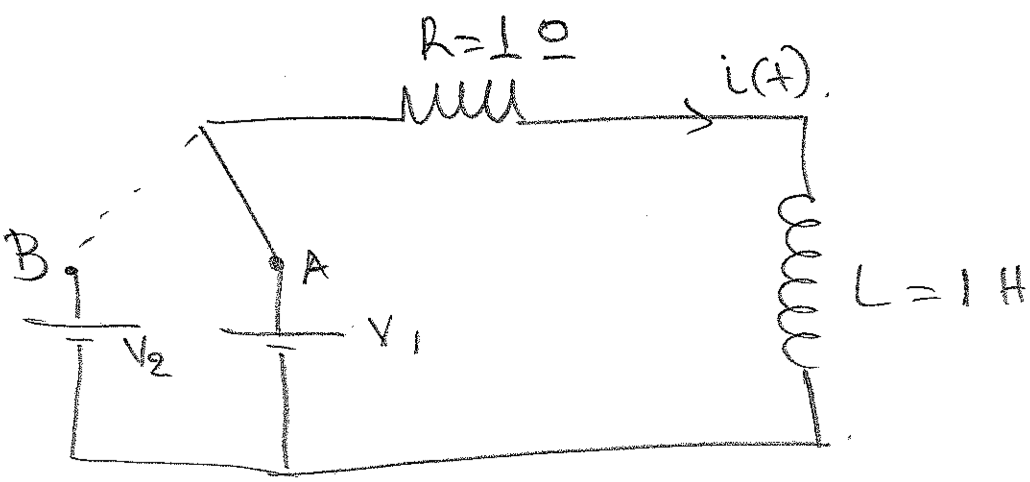
άρα επιβεβαιώνεται ✓

Άσκηση 7 (7)

Δίνεται το RL κύκλωμα που ακολουθεί. Θεωρήστε ότι το ρεύμα $i(t)$ έχει φτάσει σε steady state με τον διακόπτη στη θέση A. Τη χρονική στιγμή $t=0$ γυρίζουμε το διακόπτη στη θέση B.

α) Βρείτε τη διαφορική εξίσωση που συνδέει το ρεύμα $i(t)$ με την τάση V_2 για $t>0^-$. Βρείτε την αρχική συνθήκη για το $i(t)$ συναρτήσει του V_1

b) βρείτε το $i(t)$ αν $V_1 = 4V$ και $V_2 = 2V$



α) για $t>0^-$ ο διακόπτης είναι στη θέση B οπότε.

$$\left.\begin{aligned} i(t)R + v_L(t) &= V_2 u(t) \\ v_L(t) &= L\frac{di_L(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{L\frac{di(t)}{dt} + i(t)R = V_2 u(t)}$$

όταν το κύκλωμα έχει σταθεροποιηθεί μπορώ να θεωρήσω το πηνίο ως βραχυκύκλωμα οπότε $V_1 = i(0^-)R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{i(0^-) = \frac{V_1}{R}}$$

b). Έχω από (α) $L\frac{di(t)}{dt} + i(t)R = V_2 u(t) \Rightarrow$

8

$$\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 2u(t) \Rightarrow sI(s) - i(0^-) + I(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow$$

$i(0^-) = V_1/R = 4 \Rightarrow$

$$sI(s) - 4 + I(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(s)[s+1] = \frac{2}{s} + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(s)[s+1] = \frac{2+4s}{s} \Rightarrow I(s) = \frac{2+4s}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$\Rightarrow A = \left.\frac{2+4s}{s+1}\right|_{s=0} = 2$$

$$B = \left.\frac{2+4s}{s}\right|_{s=-1} = 2.$$

άρα $I(s) = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} \Rightarrow i(t) = 2u(t) + 2e^{-t}u(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = 2(1 + e^{-t})u(t)}$$

Άσκηση 4

Έστω το σήμα $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t)$.

α) να βρεθεί ο (μονόπλευρος) ΜΤΣΧ Laplace $X(s)$.
χρησιμοποιώντας γνωστά ζεύγη

β)(i) να βρεθεί η αρχική συνθήκη $x(0^+)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα αρχικής τιμής

(ii) να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t\to\infty} x(t)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα τελικής τιμής

(iii) επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (βi) και (βii) από το $x(t)$

α) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t)$.

από τα ζεύγη $\quad e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+\alpha} \qquad Re\{s\} > -\alpha$

και $\quad e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) \longleftrightarrow \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} \qquad Re\{s\} > -\alpha$.

έχω $\quad X(s) = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{s+1}{(s+1)^2+9} \Rightarrow Re\{s\} > -1$.

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s^2+2s+1+9+s^2+s+2s+2}{(s+2)(s^2+2s+10)} = \frac{2s^2+5s+12}{s^3+3s^2+10s+2s^2+4s+20} =$$

$$= \frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20} \Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20} \quad Re\{s\} > -1}$$

B) (i) $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20} =$

$= \lim_{s\to\infty} \frac{2s^3+5s^2+12s}{s^3+5s^2+14s+20} \overset{DLH}{=} \lim_{s\to\infty} \frac{6s^2+10s+12}{3s^2+10s+14} \overset{DLH}{=} \lim_{s\to\infty} \frac{12s+10}{6s+10} =$

$\overset{DLH}{=} \lim_{s\to\infty} \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \boxed{x(0^+) = 2}$

(ii) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{2s^2+5s+12}{s^3+5s^2+14s+20} = \lim_{s\to 0} \frac{2s^3+5s^2+12s}{s^3+5s^2+14s+20} = \frac{0}{20} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0}$

(iii) $x(0^+) = e^{-2t}u(t)\Big|_{t=0^+} + e^{-t}(\cos 3t)u(t)\Big|_{t=0^+} = 1 + 1 = 2$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t) =$

$= \lim_{t\to\infty} e^{-2t}u(t) + \lim_{t\to\infty} e^{-t}(\cos 3t)u(t) = 0$

Ασκηση 5

Για το σύμα $x(t)$ με LT $X(s)$ ξέρουμε οτι

α) $x(t)$ ειναι πργ και αρτιο

β) το $X(s)$ εχει 4 πολους και κανένα μηδενικο.

γ) το $X(s)$ έχει ενα πολο στο $s=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$

δ) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 4$

Ζητειται το $X(s)$ και η ROC του.

απο (β) εχω $X(s) = \dfrac{A}{(s-\alpha)(s-b)(s-c)(s-d)}$

απο (α) αφου το $x(t)$ ειναι πργ τοτε οι πολοι του πρεπει να ειναι ανα 2 συζυγεις. Αρα έστω $b=\alpha^*$ και $d=c^*$

αρα $X(s) = \dfrac{A}{(s-\alpha)(s-\alpha^*)(s-c)(s-c^*)}$

απο (α) αφου το $x(t)$ ειναι αρτιο οι πολοι θα πρεπει να ειναι συμμετρικοί ως προς τον άξονα των φανταστικών αριθμών οποτε $c=-\alpha^*$ και $c^*=-\alpha$.

Οποτε $X(s) = \dfrac{A}{(s-\alpha)(s-\alpha^*)(s+\alpha^*)(s+\alpha)}$ $\Rightarrow$

απο (γ) εστω $\alpha = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{A}{(s-\frac{1}{2}e^{j\pi/4})(s-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s+\frac{1}{2}e^{-j\pi/4})(s+\frac{1}{2}e^{j\pi/4})}$$

από (δ) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt\Big|_{s=0} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(0) = 1 \Rightarrow \frac{A}{\left(-\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/4}\right)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\frac{1}{16}e^{0}} = 1 \Rightarrow 16\cdot A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1/4}$$