Φροντιστήριο ΗΥ-215 Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς — 18-05-2012

Άσκηση 1

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρους σ τα ακόλουθα ολοκληρώματα συγκλίνουν. Υπολογίστε τα.

(α) $\int_{0}^{\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$.

Λύση

(α) $\int_{0}^{\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} = \int_{0}^{\infty} e^{(-5-\sigma-j\omega)t} dt =$

$= \frac{1}{-5-\sigma-j\omega} e^{(-5-\sigma)t} e^{-j\omega t} \Big|_{0}^{\infty} =$

$= -\frac{1}{-5-\sigma-j\omega} = \frac{1}{5+\sigma+j\omega}$ για σύγκλιση θέλουμε το. $-5-\sigma<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5<\sigma \Rightarrow$ $\boxed{\sigma>-5}$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt +$

$+\int_{0}^{\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(5-\sigma-j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-5-\sigma-j\omega)t} dt$

για σύγκλιση και των 2 ολοκληρωτέων θέλω : (2)

$$\left.\begin{array}{lll} 5-\sigma>0 & \Rightarrow & \sigma<5 \\ \text{και} \quad -5-\sigma<0 & \Rightarrow & \sigma>-5 \end{array}\right\} \Rightarrow -5<\sigma<5 \Rightarrow |\sigma|<5$$

και $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \frac{1}{5-\sigma-j\omega} - \frac{1}{-5-\sigma-j\omega} =$

$$= \frac{1}{5-\sigma-j\omega} + \frac{1}{5+\sigma+j\omega} = \frac{5-\cancel{\sigma}-\cancel{j\omega}+5+\cancel{\sigma}+\cancel{j\omega}}{(5-\sigma-j\omega)(5+\sigma+j\omega)} =$$

$$= \frac{10}{25+\cancel{5\sigma}+\cancel{5j\omega}-\cancel{5\sigma}-\sigma^2-\sigma j\omega-\cancel{5j\omega}-\sigma j\omega+\omega^2} =$$

$$= \frac{10}{25-\sigma^2-j2\sigma\omega+\omega^2}$$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-5-\sigma-j\omega)t} dt$

<u>Για σύγκλιση:</u>

$$\left.\begin{array}{lll} \text{για το άνω όριο θέλω} & -5-\sigma<0 \Rightarrow & \sigma>-5 \\ \text{για το κάτω όριο θέλω} & -5-\sigma>0 \Rightarrow & \sigma<-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ άρα δεν υπάρχει τιμή του σ που το να άνω ολοκλήρωμα να συγκλίνει.

Άσκηση 2

Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-5t} u(t-1)$ με LT $X(s)$.

α) Βρείτε τον αμφίπλευρο Μετ/Χ L χρησιμοποιώντας τον ορισμό και ορίστε ROC.

b) Βρείτε για ποιες τιμές των A και t_0 ο LT του

$$g(t) = A e^{-5t} u(-t-t_0)$$

έχει την ίδια αλγεβρική αναπαράσταση με τον $X(s)$.
Ποια είναι η ROC του $G(s)$?

λύση

α)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} u(t-1) e^{-st} dt = \int_{1}^{\infty} e^{-5t} e^{-st} dt =$$

$$= \int_{1}^{\infty} e^{(-5-s)t} dt = -\frac{1}{-5-s} e^{-5-s} = \frac{e^{-(5+s)}}{5+s} \Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{e^{-(5+s)}}{s+5} \quad Re\{s\} > -5}$$

για σύγκλιση θέλω $-5 - Re\{s\} < 0 \Rightarrow Re\{s\} > -5$

b) $g(t) = A e^{-5t} u(-t-t_0)$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-5t} u(-t-t_0) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{-t_0} A e^{-5t} e^{-st} dt = A \int_{-\infty}^{-t_0} e^{(-5-s)t} dt =$$

για σύγκλιση θέλω $-5 - Re\{s\} > 0 \Rightarrow \boxed{Re\{s\} < -5 \quad \text{ROC}}$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{A}{-5-s} e^{(-5-s)(-t_0)} = \frac{-A e^{(5+s)t_0}}{5+s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{-A e^{5+s}}{5+s} \quad Re\{s\} < -5}$$

για $G(s) = X(s) \Rightarrow \frac{-A\, e^{(5+s)t_0}}{5+s} = \frac{e^{-(5+s)}}{5+s} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A=-1}$ και $\boxed{t_0=-1}$

$\boxed{\text{Ασκηση 3}}$

α. Δινεται ο LT $X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$ $Re\{s\}>-1$

να βρεθη το $x(t)$

Λυση

$$X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}=\frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

αναλυση σε μερικα κλασματα

$$\frac{1}{(s+2)(s+1)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=(s+1)A+(s+2)B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=As+A+Bs+2B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}A+B=0\\A+2B=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}A=-B\\-B+2B=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}A=-B\\\boxed{B=1}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{A=-1}$$

αρα $X(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+1}$

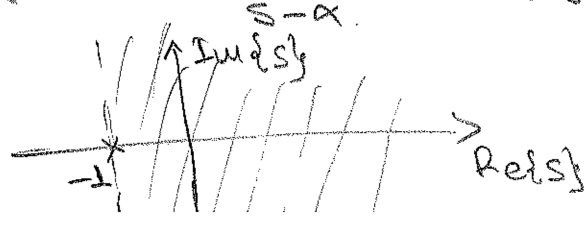
$\alpha=-2$ $\quad$ $\alpha=-1$

απο πινακα με ζευγη μετ/χ Laplace

ξερω οτι $e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$ $Re\{s\}>-\alpha$ και $\alpha>0$

$e^{+\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}$ $Re\{s\}>\alpha$ και $\alpha<0$

απο $X(s) \longrightarrow$



αλλα απο τη ROC του X(s)

έχω $-\frac{1}{s+2} \xleftrightarrow{ILT} -e^{-2t}u(t)$ $\quad Re\{s\} > -2$

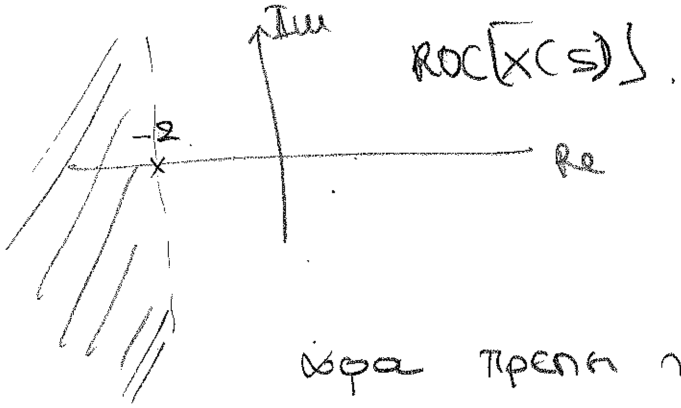
$\frac{1}{s+1} \xleftrightarrow{ILT} e^{-t}u(t)$ $\quad Re\{s\} > -1$

άρα $\boxed{x(t) = -e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t)}$

b. αν $X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$ $\quad Re\{s\} < -2$

τότε x(t)?

ξανα $X(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$



άρα πρέπει η ROC των $-\frac{1}{s+2}$ και $\frac{1}{s+1}$

να περιλαμβάνει τη ROC[X(s)]

άρα από $-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+a}$ $\quad Re\{s\} < -a$

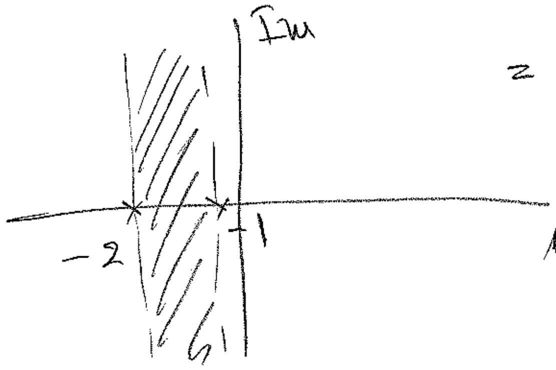
έχω $-\frac{1}{s+2} \xleftrightarrow{ILT} e^{-2t}u(-t)$ $\quad Re\{s\} < -2$

$\frac{1}{s+1} \xleftrightarrow{ILT} -e^{-t}u(-t)$ $\quad Re\{s\} < -1$

άρα $x(t) = e^{-2t}u(-t) - e^{-t}u(-t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(-t)$

c. αν $X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} =$ $\quad -2 < Re\{s\} < -1$

$$= -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$



τότε $\quad -\frac{1}{s+2} \longleftrightarrow -e^{-2t}u(t) \quad Re\{s\} > -2$

και $\quad \frac{1}{s+1} \longleftrightarrow -e^{-t}u(-t) \quad Re\{s\} < -1$

άρα $\quad x(t) = -e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t)$

Άσκηση 4

Δίνεται ο LT $\quad X(s) = \frac{5s+13}{s^3+4s^2+13s} \quad Re\{s\} > 0$.

ζητείται το $x(t)$.

λύση

$$X(s) = \frac{5s+13}{s^3+4s^2+13s} = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} \dots$$

παραγοντοποιούμε το $\quad s^2+4s+13 \Rightarrow s = \frac{-4 \pm j\sqrt{|-36|}}{2} =$

$\Delta = 4^2 - 4\cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$= \frac{-4 \pm j6}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 = -2-3j \\ s_2 = -2+3j \end{array}$

άρα $\quad X(s) = \dots = \frac{5s+13}{s(s+2+3j)(s+2-3j)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ανάλυση σε μερικά κλάσματα

α τρόπος

$$\frac{5s+13}{s(s+2+3j)(s+2-3j)} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cj}{s+2+3j} + \frac{B-Cj}{s+2-3j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5s+13 = (s+2+3j)(s+2-3j)A + s(s+2-3j)(B+Cj) +$$

$$+ s(s+2+3j)(B-Cj) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5s+13 = \underline{s^2A} + 2sA - 3\cancel{sAj} + 2sA + \underline{4A} - \cancel{6jA} + \cancel{3jsA} + \cancel{6jA} \underline{+9A}$$

$$+ \underline{s^2B} + \underline{2sB} - \cancel{3sBj} + \cancel{s^2Cj} + \cancel{2sCj} + \underline{3sC} +$$

$$+ \underline{s^2B} + \underline{2sB} + \cancel{3sBj} - \cancel{s^2Cj} - \cancel{2sCj} + \underline{3sC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5s+13 = s^2[A+2B] + s[4A+4B+6C] + 4A + 9A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 13A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$A+2B=0 \xRightarrow{A=1} 2B=-1 \Rightarrow \boxed{B=-1/2}$$

$$4A+4B+6C=5 \xRightarrow[B=-1/2]{A=1} 4-2+6C=5 \Rightarrow 6C=3 \Rightarrow$$

$$\boxed{C=1/2}$$

β τρόπος

$$\frac{5s+13}{s(s+2+3j)(s+2-3j)} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cj}{s+2+3j} + \frac{B-Cj}{s+2-3j}$$

(i) (πολ/ζω με τον 1ο παράγοντα)

$$\cancel{s}\frac{5s+13}{\cancel{s}(s+2+3j)(s+2-3j)} = A + s\frac{B+Cj}{s+2+3j} + s\frac{B-Cj}{s+2-3j} \Rightarrow$$

$s=0$ (θέτω s ισούται την 1η ρίζα).

$$\Rightarrow \frac{13}{(2+3j)(2-3j)} = A \Rightarrow A = \frac{13}{4+9} \Rightarrow \boxed{A=1}$$

(ii) (πολ/ζω με τον 2ο παράγοντα)

$$\cancel{(s+2+3j)}\frac{5s+13}{s\cancel{(s+2+3j)}(s+2-3j)} = \frac{A(s+2+3j)}{s} + B+Cj + \frac{(B-Cj)(s+2+3j)}{s+2-3j} \Rightarrow$$

Θέτω το s ίσο με την 2η ρίζα $\Rightarrow s=-2-3j$.

$$\Rightarrow \frac{5(-2-3j)+13}{(-2-3j)(-\cancel{2}-3j+\cancel{2}-3j)} = B+Cj \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-10-15j+13}{(-2-3j)(-6j)} = B+Cj \Rightarrow \frac{3-15j}{-18+12j} = B+Cj \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-5j}{-6+4j} = B+Cj \Rightarrow \frac{(1-5j)(-6-4j)}{36+16} = B+Cj \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-6-4j+30j-20}{52} = B+Cj \Rightarrow \frac{-26+26j}{52} = B+Cj \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = -26/52 \Rightarrow \boxed{B=-1/2}$$

$$C = 26/52 \Rightarrow \boxed{C=1/2}$$

(iii) για επιβεβαιωση μπορω να συνεχισω και με τον 3ο παραγοντα

άρα τελικά

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1/2+1/2\,j}{s+2+3j} + \frac{-1/2-1/2\,j}{s+2-3j} =$$

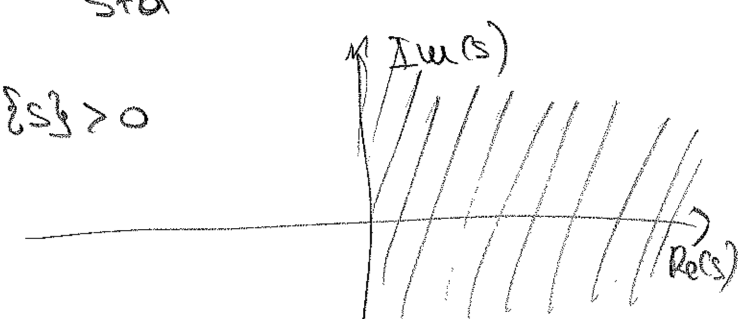
$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{2}(1-j)\,\frac{1}{s+(2+3j)} - \frac{1}{2}(1+j)\,\frac{1}{s+(2-3j)}$$

ξέρω $\quad u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$

και $\quad e^{-a}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad Re\{s\} > -Re\{a\}$

και $\quad -e^{-a}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad Re\{s\} < -Re\{a\}$

αλλά $ROC(H(s)) \rightarrow Re\{s\} > 0$



αρα για το $\frac{1}{s+(2+3j)}$ με $\alpha = 2+3j$
$Re\{\alpha\} = 2$ ✓ γιατί $Re\{s\} > -2$

με $\alpha = -2-3j$
$Re\{\alpha\} = -2$

αρα $\frac{1}{s+(2+3j)} \longleftrightarrow e^{(-2-3j)t} u(t)$

και για $\frac{1}{s+(2-3j)} \longleftrightarrow e^{(-2+3j)t} u(t)$

άρα $x(t) = u(t) - \frac{1}{2}(1-j) e^{(-2-3j)t} u(t) - \frac{1}{2}(1+j) e^{(-2+3j)t} u(t) =$

$= u(t) + \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}e^{-3jt} + \frac{1}{2}j e^{-2t}e^{-3jt} - \frac{1}{2}e^{-2t}e^{3jt} - \frac{1}{2}j e^{-2t}e^{3jt}\right]u(t) =$

$= u(t) + \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 3t + j\frac{1}{2}\cancel{e^{-2t}\sin 3t} + \frac{1}{2}\cancel{j e^{-2t}\cos 3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 3t -\right.$

$\left. - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 3t - \cancel{j\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 3t} - \cancel{\frac{1}{2}j e^{-2t}\cos 3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 3t\right]u(t) =$

$= \left[1 - e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t}\sin 3t\right]u(t) = \left[1 - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)\right]u(t)$

Άσκηση 5

Δίνεται $X(s) = \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}$ $Re\{s\} > -1$

διαιρώ αριθμητή με παρονομαστή

$\longrightarrow$

$$
\begin{array}{r|l}
s^2 + 6s + 7 & s^2 + 3s + 2 \\
\hline
-\; s^2 - 3s - 2 & 1 \\
\hline
3s + 5 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2} = 1 + \frac{3s+5}{s^2+3s+2} =$$

$$= 1 + \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

με μερικά κλάσματα.

$$\frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{3s+5}{s+2}\right|_{s=-1} = A \Rightarrow \boxed{A = 2.}$$

και $\left.\frac{3s+5}{s+1}\right|_{s=-2} = B \Rightarrow \boxed{B = 1}$

άρα $X(s) = 1 + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$

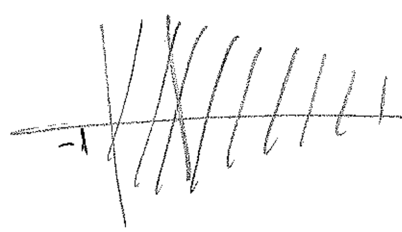
ξέρω

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} < -a.$$

και $Re\{s\} > -1$



άρα $\boxed{x(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t).}$

Άσκηση 6

Δίνεται ο $X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}$ $\quad Re\{s\} > -3$

με ανάλυση σε μερικά κλάσματα

$$X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+5} + \frac{\Gamma}{(s+5)^2}$$

$$\left.\cancel{(s+3)}\frac{s^2+2s+5}{\cancel{(s+3)}(s+5)^2}\right|_{s=-3} = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9-6+5}{4} = A \Rightarrow A = \frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$\left.\cancel{(s+5)^2}\frac{s^2+2s+5}{(s+3)\cancel{(s+5)^2}}\right|_{s=-5} = \Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25-10+5}{-2} = \Gamma \Rightarrow \boxed{\Gamma = -10}$$

* Για το B, επειδή το $s=-5$ είναι διπλή ρίζα.
υπολογίζω την 1η παράγωγο του $(s+5)^2 X(s)$ για $s=-5$

άρα $\left.\left[\frac{d}{ds}(s+5)^2 X(s)\right]\right|_{s=-5} = \left[\frac{d}{ds}\frac{(s+5)^2 A}{s+3} + \frac{d}{ds}\frac{(s+5)^2 B}{s+5} +\right.$

$$\left.+\frac{d}{ds}\frac{(s+5)^2\Gamma}{\cancel{(s+5)^2}}\right]_{s=-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+2s+5}{s+3}\right)\right|_{s=-5} = \left[\frac{2(s+5)A(s+3)-(s+5)^2A}{(s+3)^2} + B\right]_{s=-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(2s+2)(s+3)-s^2-2s-5}{(s+3)^2}\right|_{s=-5} = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{-8(-2)-25+10-5}{4} \Rightarrow B = \frac{16-20}{4} \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

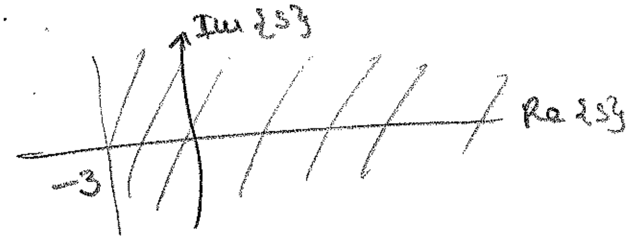
άρα

$$X(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

ξέρω $\quad e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad Re\{s\} > -a$.

$$\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \quad Re\{s\} > -a.$$

και ROC



άρα. $\frac{2}{s+3} \xleftrightarrow{ILT} 2e^{-3t}u(t) \qquad Re\{s\} > -3$

$$-\frac{1}{s+5} \xleftrightarrow{ILT} -e^{-5t}u(t) \qquad Re\{s\} > -5$$

$$-\frac{10}{(s+5)^2} \xleftrightarrow{ILT} -10t\,e^{-5t}u(t) \qquad Re\{s\} > -5$$

άρα $x(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = \left[2e^{-3t} - e^{-5t}(1+10t)\right]u(t)$$

Άσκηση 7

Δίνεται $X(s) = \dfrac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s}$ $\quad Re(s) > 0$

Διαιρώ αριθμητή με παρονομαστή

$$
\begin{array}{rrr|l}
s^3 & +2s^2 & +6 & s^2+3s \\ \hline
-s^3 & -3s^2 & & s-1 \\ \hline
0 & -s^2 & +6 & \\
 & +s^2 & +3s & \\ \hline
 & & 3s+6 &
\end{array}
$$

άρα $X(s) = \dfrac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s} = s-1 + \dfrac{3s+6}{s^2+3s} =$

$= s-1 + \dfrac{3s+6}{s(s+3)} = s-1 + \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3}$

$\dfrac{3s+6}{s(s+3)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3} \Rightarrow A = \dfrac{3s+6}{s+3}\Big|_{s=0} = 2 \Rightarrow \boxed{A=2}$

$B = \dfrac{3s+6}{s}\Big|_{s=-3} = \dfrac{-3}{-3} \Rightarrow \boxed{B=1}$

άρα $X(s) = s-1 + \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s+3}$

ξέρω

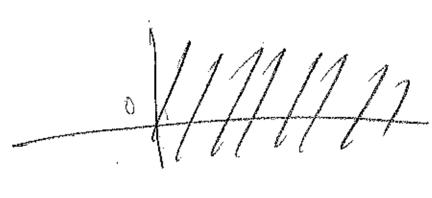
$\dfrac{d^n\delta(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n \qquad Re\{s\} > -\infty$

$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+a} \qquad Re\{s\} > -a$

$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \qquad Re\{s\} > -\infty$

$u(t) \longleftrightarrow 1/s \qquad Re\{s\} > 0$

και ROC



άρα

$x(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt} - \delta(t) + 2u(t) + e^{-3t}u(t)$