Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Βοηθητικοί Πίνακες

Ιδιότητες Σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ $y(t)$ περίοδος $\rightarrow T(\text{sec})$ θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα$\rightarrow \omega_o = 2\pi/T(\text{rad})$ θεμελιώδης συχνότητα$\rightarrow f_o = 1/T(\text{Herz})$	$X[k]$ $Y[k]$
Γραμμικότητα	$ax(t) + by(t)$	$aX[k] + bY[k]$
Χρονική Μετατόπιση	$x(t - t_o)$	$e^{-jk\omega_o t_o}X[k]$
Μετατόπιση Συχνότητας	$e^{jk_o\omega_o t}x(t)$	$X[k - k_o]$
Κλιμάκωση	$x(at), \qquad a > 0$	$X[k], \qquad a\omega_o$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$	$jk\omega_o X[k]$
Σχέση Parseval	$\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X[k]\rvert^2$	
Συμμετρίες	$x(t)$ πραγματικό $x(t)$ φανταστικό $x(t)$ πραγματικό και άρτιο $x(t)$ πραγματικό και περιττό	$X^*[k] = X[-K]$ $X^*[k] = -X[-K]$ $Im\{X[k]\} = 0$ $Re\{X[k]\} = 0$

Συνήθη ζεύγη Σειρών Fourier

Πεδίο Χρόνου	Πεδίο Συχνότητας
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_o t}$ περίοδος $\rightarrow T(\mathrm{sec})$	$X[k] = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_o t}\mathrm{d}t$ θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα $\rightarrow \omega_o = 2\pi T(\mathrm{rad})$
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \leq T_s \\ 0, & T_s < \lvert t\rvert \leq T/2 \end{cases}$	$X[k] = \frac{\sin(k\omega_o T_s)}{k\pi}$
$x(t) = e^{jp\omega_o t}$	$X[k] = \delta[k-p]$
$x(t) = \cos(p\omega_o t)$	$X[k] = \frac{1}{2}\delta[k-p] + \frac{1}{2}\delta[k+p]$
$x(t) = \sin(p\omega_o t)$	$X[k] = \frac{1}{2j}\delta[k-p] - \frac{1}{2j}\delta[k+p]$
$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(t-pT)$	$X[k] = \frac{1}{T}$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Απεριοδικό σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(\omega)$ $Y(\omega)$
Γραμμικότητα	$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
Χρονική Μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j\omega t_o}X(\omega)$
Μετατόπιση Συχνότητας	$e^{j\gamma t}x(t)$	$X(\omega-\gamma)$
Κλιμάκωση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-jtx(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\omega)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
Συνέλιξη	$y(t)*x(t)$	$Y(\omega)X(\omega)$
Διαμόρφωση	$y(t)x(t)$	$\frac{1}{2\pi}Y(\omega)*X(\omega)$
Σχέση Parseval	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(\omega)\rvert^2\mathrm{d}\omega$	
Δυικότητα	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Γινόμενο χρόνου–εύρους ζώνης	$T_dB_w\geq\frac{1}{2}$	
Συμμετρίες	$x(t)$ πραγματικό $x(t)$ φανταστικό $x(t)$ πραγματικό και άρτιο $x(t)$ πραγματικό και περιττό	$X^*(\omega)=X(-\omega)$ $X^*(\omega)=-X(-\omega)$ $Im\{X(\omega)\}=0$ και άρτιο $Re\{X(\omega)\}=0$ και περιττό

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Πεδίο Χρόνου	Πεδίο Συχνότητας
$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$ απεριοδικό σήμα	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \leq T \\ 0, & \lvert t\rvert > T \end{cases}$	$X(\omega) = \frac{2sin(\omega T)}{\omega}$
$x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(Wt)$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert \leq W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$
$x(t) = \delta(t)$	$X(\omega) = 1$
$x(t) = u(t)$	$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad Re\{a\} > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$
$x(t) = te^{-at}u(t), \qquad Re\{a\} > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$x(t) = e^{-a\lvert t\rvert}, \qquad a > 0$	$X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$	$X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

Πεδίο Χρόνου	Πεδίο Συχνότητας
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$ περιοδικό σήμα	$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_o)$
$x(t) = \cos(\omega_o t)$	$X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_o) + \pi\delta(\omega + \omega_o)$
$x(t) = \sin(\omega_o t)$	$X(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_o)$
$x(t) = e^{j\omega_o t}$	$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_o)$
$x(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \leq T_s \\ 0, & T_s < \lvert t\rvert < \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t+T) = x(t)$	$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_o T_s)}{k} \delta(\omega - k\omega_o)$