Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Διδάσκων: Α. Μουχτάρης

Βοηθητικοί Πίνακες στο Μετασχηματισμό Laplace

Ιδιότητες αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(S)$ $X_2(S)$	R R_1 R_2
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	τουλάχιστον $R_1 \cap R_2$
Χρονική Μετατόπιση	$x(t - t_o)$	$e^{-st_o} X(s)$	R
Μετατόπιση μιγαδικής συχνότητας	$e^{s_o t} x(t)$	$X(s - s_o)$	μετατοπισμένη εκδοχή της R (δλδ το s είναι στη ROC αν το $(s - s_o)$ είναι στην R)
Κλιμάκωση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	κλιμακωμένη ROC (δλδ το s είναι στη ROC αν το (s/a) είναι στην R)
Συνέλιξη στο χρόνο	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	τουλάχιστον $R_1 \cap R_2$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)$	$sX(s)$	τουλάχιστον R
Παραγώγιση στη μιγαδική συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} X(s)$	R
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{\infty}^{t} x(\tau)\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	τουλάχιστον $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$

Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Αν $x(t) = 0$ για $t < 0$ και το $x(t)$ δεν έχει σημεία ανωμαλίας στο $t = 0$, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Ιδιότητες μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(S)$ $X_2(S)$	R R_1 R_2
Γραμμικότητα	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	τουλάχιστον $R_1 \cap R_2$
Μετατόπιση μιγαδικής συχνότητας	$e^{s_o t}x(t)$	$X(s - s_o)$	μετατοπισμένη εκδοχή της R (δλδ το s είναι στη ROC αν το $(s - s_o)$ είναι στην R)
Κλιμάκωση	$x(at), \qquad a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	κλιμακωμένη ROC (δλδ το s είναι στη ROC αν το (s/a) είναι στην R)
Συνέλιξη στο χρόνο (αν $x_1(t) \quad \& \quad x_2(t)$ είναι 0 για $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	τουλάχιστον $R_1 \cap R_2$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$	$sX(s) - x(0^-)$	τουλάχιστον R
Παραγώγιση στη μιγαδική συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s)$	R
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int\limits_{0^-}^{t} x(\tau)\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	τουλάχιστον $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$

Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Αν το $x(t)$ δεν έχει σημεία ανωμαλίας στο $t = 0$, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Συνήθη ζεύγη μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	όλο το μιγαδικό επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -Re\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} < -Re\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -Re\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} < -Re\{a\}$
$\delta(t-T)$	e^{-sT}	όλο το μιγαδικό επίπεδο
$\cos(\omega_o t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > 0$
$\sin(\omega_o t)u(t)$	$\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-at}\cos(\omega_o t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > -Re\{a\}$
$e^{-at}\sin(\omega_o t)u(t)$	$\frac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$	$Re\{s\} > -Re\{a\}$