ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

06/04/2012

Σειρές Fourier και Ιδιότητες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Γραμμικότητα: $ax(t)+by(t) \overset{FS,\omega_0}{\longleftrightarrow} aX(k)+bY(k)$

Μετατόπιση στο χρόνο: $x(t-t_0) \overset{FS,\omega_0}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}X(k)$

Μετατόπιση στη συχνότητα: $e^{jk_0\omega_0 t}x(t) \overset{FS,\omega_0}{\longleftrightarrow} X(k-k_0)$

Κλιμάκωση: $x(at) \overset{FS,a\omega_0}{\longleftrightarrow} X(k)$

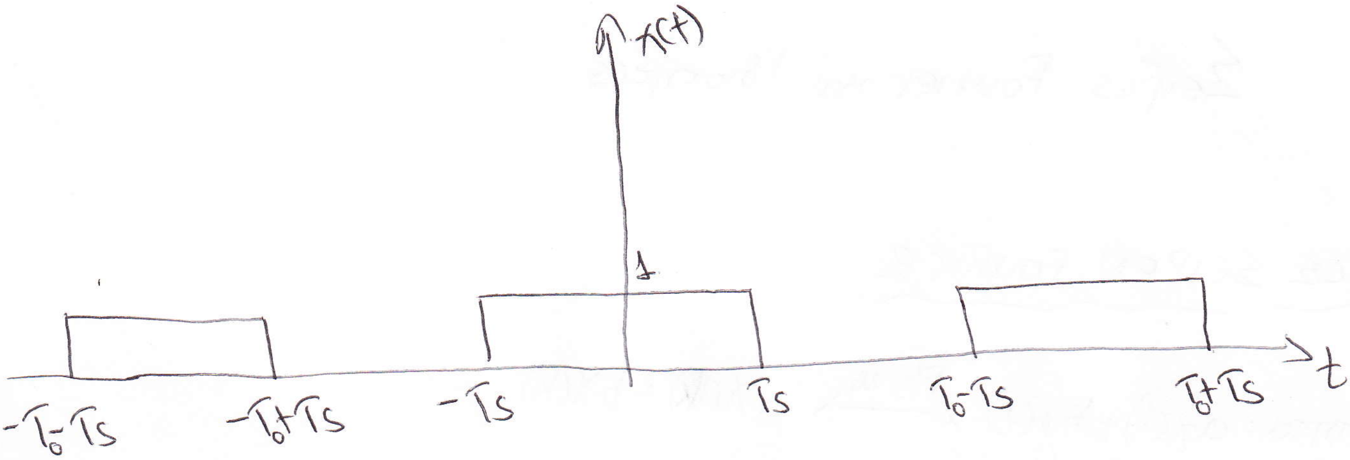
Παραγώγιση στο χρόνο: $\dfrac{dx(t)}{dt} \overset{FS,\omega_0}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 X(k)$

Διαμόρφωση: $x(t)y(t) \overset{FS,\omega_0}{\longleftrightarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X(l)Y(k-l)$

Θεώρημα Parseval: $\dfrac{1}{T}\int_{<T>}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X(k)|^2$

Συμμετρία:
$x(t)$ πραγματικό $\overset{FS,\omega_0}{\longleftrightarrow} X^*(k) = X(-k)$
$x(t)$ φανταστικό $\overset{FS,\omega_0}{\longleftrightarrow} X^*(k) = -X(-k)$

① Βρείτε τους συντελεστές σειράς Fourier του περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος που φαίνεται στο σχήμα



Για $k \neq 0$: $x(k)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_s}^{T_s} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-T_s}^{T_s}$

$$= -\frac{1}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k f_0 T_s} - e^{j2\pi k f_0 T_s}\right) = \frac{1}{j2\pi k}\left(e^{j2\pi k f_0 T_s} - e^{-j2\pi k f_0 T_s}\right)$$

$$= \frac{1}{j2\pi k}2j\sin(2\pi k f_0 T_s) = \frac{\sin(2\pi k f_0 T_s)}{\pi k}$$

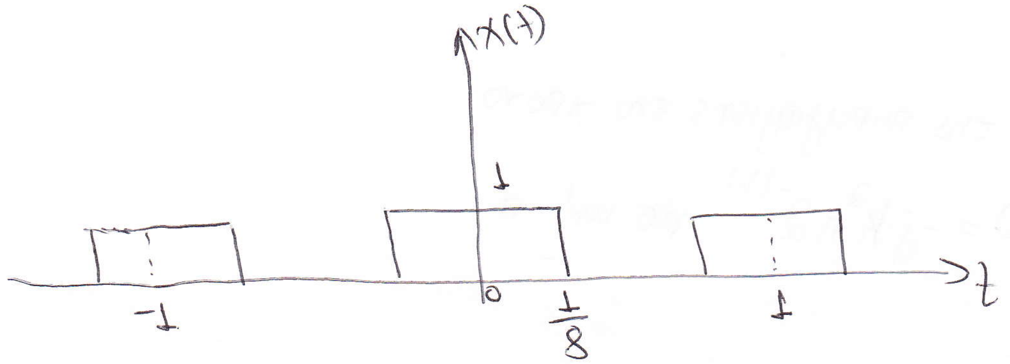
Για $k=0$: $x(0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_s}^{T_s} dt = \frac{2T_s}{T}$

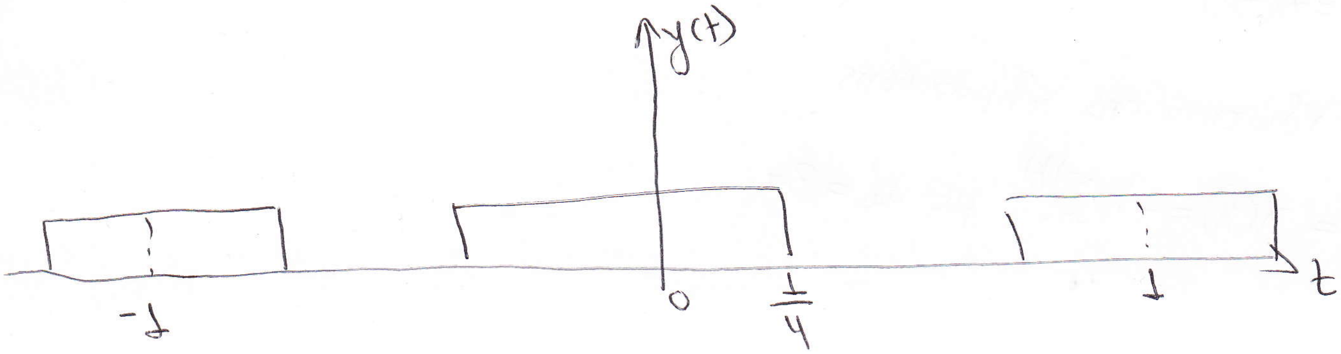
Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του De L'Hospital μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\lim_{k\to 0}\frac{\sin(2\pi k f_0 T_s)}{\pi k} = \lim_{k\to 0}\frac{2\pi f_0 T_s \cdot \cos(2\pi k f_0 T_s)}{\pi} = 2 f_0 T_s = \frac{2T_s}{T_0} = x(0)$$

Και άρα μπορούμε να γράψουμε ότι: $x(k) = \frac{\sin(2\pi k f_0 T_s)}{\pi k}$, $\forall k$, (κατανοώντας ότι το $x(0)$ υπολογίζεται σαν όριο).

② Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (δ), βρείτε τους συντελεστές σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $z(t) = \frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t)$ όπου τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι αυτά που φαίνονται στο σχήμα.





$$x(t) \xleftrightarrow{FS,\,\omega_0} X(k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{\pi k}$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS,\,\omega_0} Y(k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k}.$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα των σειρών Fourier:

$$\frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t) \xleftrightarrow{FS,\,\omega_0} \frac{3}{2}X(k) + \frac{1}{2}Y(k)$$

$$= \frac{3}{2\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right) + \frac{1}{2\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

③ Ενα περιοδικο σήμα με περίοδο $\omega_0=\pi$ έχει $X(k)=-k2^{-|k|}$

Βρειτε τους συντελεστες Fourier των:

(i) $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

Απο την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρονο:

$$Y(k)=jk\omega_0 X(k)=-jk^2\pi 2^{-|k|} \quad \text{με } \omega_0'=\pi.$$

(ii) $y(t)=x(3t)$

Απο την ιδιότητα της κλιμάκωσης

$$Y(k)=X(k)=-k2^{-|k|} \quad \text{με } \omega_0'=3\pi.$$

(iii) $y(t)=x(t-1)$

$$Y(k)=e^{-j\omega_0 k\cdot 1}X(k)=-e^{-jk\pi}k\cdot 2^{-|k|} \quad \text{με } \omega_0'=\pi.$$

(iv) $y(t)=x(t+1)$

$$Y(k)=e^{j\omega_0 k\cdot 1}X(k)=-e^{jk\pi}k2^{-|k|} \quad \text{με } \omega_0'=\pi.$$

(v) $y(t)=\cos(4\pi t)x(t)$, $\omega_0=\pi$

$$y(t)=\cos(4\pi t)x(t)=\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)x(t)=\frac{1}{2}e^{j4\pi t}x(t)+\frac{1}{2}e^{-j4\pi t}x(t)$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικοτητα και την ιδιοτητα της μετατοπισης στη συχνότητα θα έχουμε:

$$Y(k)=\frac{1}{2}X(k-4)+\frac{1}{2}X(k+4)=-\frac{1}{2}(k-4)2^{-|k-4|}-\frac{1}{2}(k+4)2^{-|k+4|}.$$

④ Υπολογίστε το $\int_0^{2\pi} \sin^{10}(t)\,dt$

Έστω $x(t) = \sin^5(t)$

Αναπτύσσουμε το $x(t)$ σε σειρά Fourier:

$$x(t) = \sin^5(t) = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)^5 = \frac{(e^{jt} - e^{-jt})^5}{32j}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Νεύτωνα

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{32j}\left(e^{j5t} - 5e^{j4t}e^{-jt} + 10e^{j3t}e^{-j2t} - 10e^{j2t}e^{-j3t} + 5e^{jt}e^{-j4t} - e^{-j5t}\right)$$

$$= \frac{1}{32j}\left(e^{j5t} - 5e^{j3t} + 10e^{jt} - 10e^{-jt} + 5e^{-j3t} - e^{-j5t}\right)$$

$$= \frac{1}{32j}e^{j5t} - \frac{1}{32j}e^{-j5t} - \frac{5}{32j}e^{j3t} + \frac{5}{32j}e^{-j3t} + \frac{10}{32j}e^{jt} - \frac{10}{32j}e^{-jt}$$

Χρησιμοποιώντας το Θ. Parseval έχουμε:

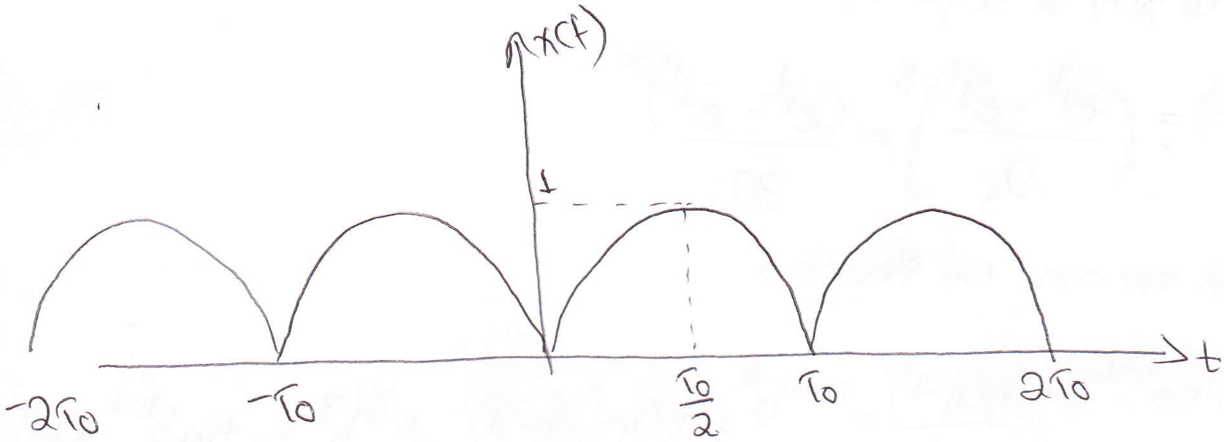
$$\int_0^{2\pi}(\sin^5(t))^2dt = \int_0^{2\pi}\sin^{10}(t)\,dt = 2\pi\left[2\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2 + 2\left(\frac{5}{32}\right)^2 + 2\left(\frac{10}{32}\right)^2\right]$$

$$= 2\pi\frac{126}{512}.$$

(5) Βρείτε τους συντελεστές σειράς Fourier του περιοδικού με περίοδο T_0 σήματος

$$x(t) = \sin \frac{w_0}{2} t$$

που φαίνεται γραφικά στο σχήμα.



$$x(t) = \sin \frac{w_0}{2} t = \sin\left(\frac{2\pi f_0}{2} t\right) = \sin(\pi f_0 t)$$

$$X(0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin(\pi f_0 t)\,dt = -\frac{1}{T_0 \pi f_0}\cos(\pi f_0 t)\Big|_0^{T_0} = -\frac{1}{\pi}\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

$$X(k) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin(\pi f_0 t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{1}{2j}\left(e^{j\pi f_0 t} - e^{-j\pi f_0 t}\right) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

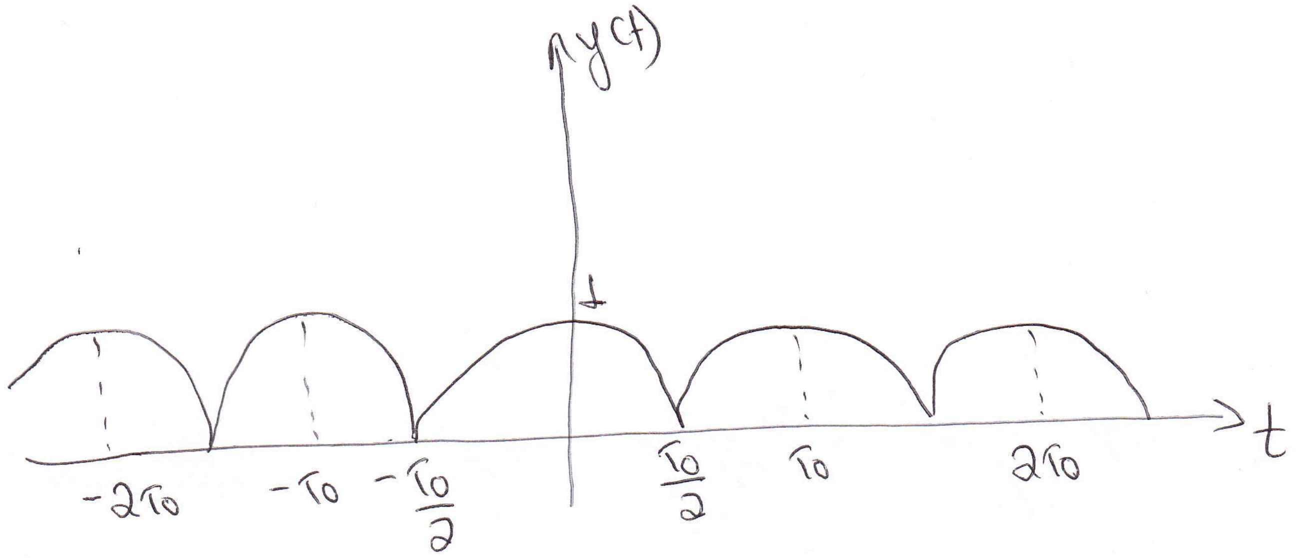
$$= \frac{1}{j2T_0}\int_0^{T_0} e^{j\pi f_0(1-2k)t}\,dt - \frac{1}{j2T_0}\int_0^{T_0} e^{-j\pi f_0(1+2k)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{j2T_0}\frac{1}{j\pi f_0(1-2k)} e^{j\pi f_0(1-2k)t}\Big|_0^{T_0} - \frac{1}{j2T_0}\frac{1}{-j\pi f_0(1+2k)} e^{-j\pi f_0(1+2k)t}\Big|_0^{T_0}$$

$$= -\frac{1}{2\pi(1-2k)}\left(\cancelto{-1}{e^{j\pi f_0(1-2k)T_0}} - 1\right) - \frac{1}{2\pi(1+2k)}\left(\cancelto{-1}{e^{-j\pi k f_0(1+2k)T_0}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\pi(1-2k)} + \frac{1}{\pi(1+2k)} = \frac{1-2k+1+2k}{\pi(1-2k)(1+2k)} = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}$$

⑥ Βρειτε τους συντελεστες σειρας Fourier του περιοδικού σήματος $y(t)$ που φαίνεται στο σχήμα.



Παρατηρούμε οτι το $y(t)$ προκυπτει αν μετατοπίσουμε το σήμα της άσκησης (5) κατα $\frac{T_0}{2}$.

$$\text{Αρα } y(t) = x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$$

Αρα, χρησιμοποιώντας την ιδιοτητα της μετατοπισης στο χρονο έχουμε:

$$Y(k) = \frac{4}{\pi(1-4k^2)} e^{jk\omega_0 \frac{T_0}{2}} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)} e^{j2\pi f_0 k \frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{4}{\pi(1-4k^2)} e^{j\pi k} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)} (-1)^k.$$