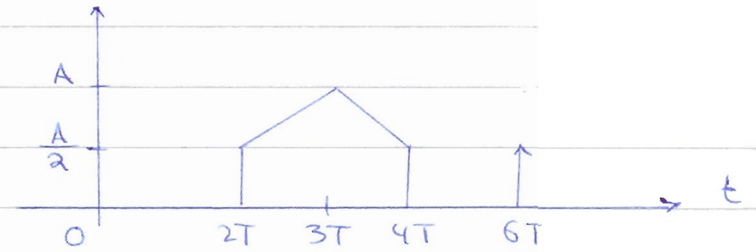
ΗΥ215
Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά
για
Μηχανικούς

Φροντιστήριο

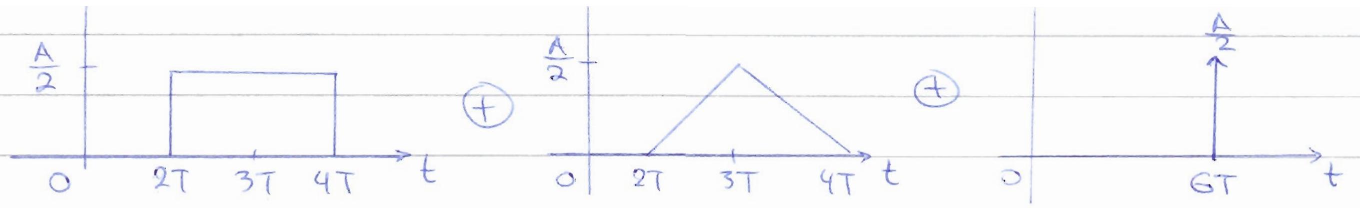
Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση 1η:

Βρείτε το Μ.F. του σήματος που φαίνεται παρακάτω



Λύση: Μπορούμε να "σπάσουμε" το σήμα σε κάποια γνωστά μας σήματα. Ποιά θα είναι αυτά; Θα είναι ένα τετραγωνικό παράθυρο, διάρκειας $2T$, με κέντρο το $t_0=3T$, ένα τριγωνικό παράθυρο, διάρκειας $2T$, με κέντρο το $t_0=3T$, και μια συνάρτηση δέλτα στο $t_0=6T$. Δηλαδή:



$$x_1(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-3T}{2T}\right) \qquad x_2(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t-3T}{T}\right) \qquad x_3(t) = \frac{A}{2}\,\delta(t-6T)$$

Για το πρώτο σήμα:

$X_1(f) = \frac{A}{2}\,2T\,\mathrm{sinc}(2fT)\,e^{-j2\pi 3Tf}$, για το δεύτερο θα είναι:

$X_2(f) = \frac{A}{2}\,T\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j2\pi 3Tf}$, και για το τρίτο,

$X_3(f) = \frac{A}{2}\,e^{-j2\pi 6Tf}$. Άρα συνολικά θα είναι:

$$X(f) = AT\left(\operatorname{sinc}(2fT) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2(fT) + \frac{A}{2}e^{j6\pi fT}\right)e^{-j6\pi fT}$$

<u>Άσκηση 2η:</u>
Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος:

$$x(t) = A\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) * \left(\delta(t-5T) + \delta(t) + \delta(t+5T)\right)$$

<u>Λύση:</u> Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα : $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$.
Άρα θα έχουμε:

$$x(t) = A\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) * \left(\delta(t-5T) + \delta(t) + \delta(t+5T)\right) =$$

$$= A\operatorname{rect}\left(\frac{t-5T}{2T}\right) + A\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + A\operatorname{rect}\left(\frac{t+5T}{2T}\right) \overset{F}{\rightsquigarrow}$$

$$\overset{F}{\rightsquigarrow} X(f) = 2AT\operatorname{sinc}(2fT)e^{-j2\pi 5Tf} + 2AT\operatorname{sinc}(2fT) + $$
$$+ 2AT\operatorname{sinc}(2fT)e^{j2\pi 5Tf} =$$

$$= 2AT\operatorname{sinc}(2fT)\left(e^{-j2\pi 5Tf} + 1 + e^{j2\pi 5Tf}\right) =$$
$$= 2AT\operatorname{sinc}(2fT)\left(1 + 2\cos(10\pi Tf)\right).$$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα που μας λέει ότι "συνέλιξη στο χρόνο ⟺ πολλ/σμός στη συχνότητα".
Άρα θα έχουμε:

$$X(f) = F\left\{A\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} \cdot F\left\{\left(\delta(t-5T) + \delta(t) + \delta(t+5T)\right)\right\} =$$

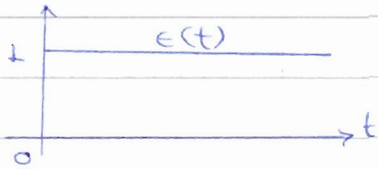
$$= 2AT\operatorname{sinc}(2fT) \cdot \left(e^{-j2\pi 5Tf} + 1 + e^{j2\pi 5Tf}\right) =$$
$$= 2AT\operatorname{sinc}(2fT)\left(1 + 2\cos(10\pi fT)\right).$$

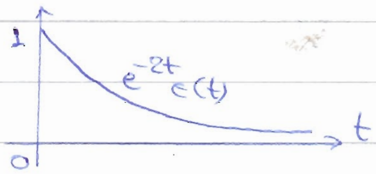
Άσκηση 3η:

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων:

$$x(t) = \epsilon(t)$$
$$y(t) = e^{-2t}\epsilon(t)$$

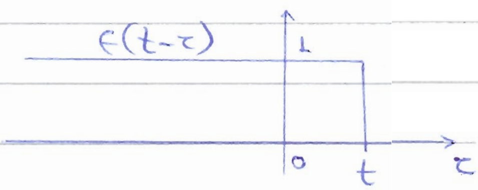
Λύση: Είναι:



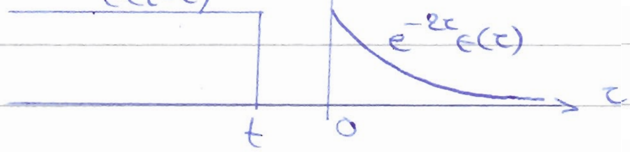


Η συνέλιξη ορίζεται ως $C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$

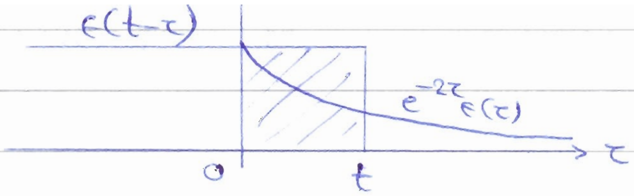
Πρέπει να βρούμε το $x(t-\tau)$. Προτιμούμε αυτό επειδή είναι πιο εύκολο να το δούμε αναστραμμένο και μετατοπισμένο. Δε θα άλλαζε τίποτα αν βρίσκαμε το $y(t-\tau)$, αλλά συνήθως αναστρέφουμε και μετατοπίζουμε το πιο απλό σήμα. Είναι:



Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- 

  $C_{xy}(t) = 0, \quad t \leq 0.$

- 

  $$C_{xy}(t) = \int_0^t e^{-2\tau}\epsilon(\tau)\epsilon(t-\tau)d\tau$$
  $$= \int_0^t e^{-2\tau}dt =$$
  $$= -\frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{1-e^{-2t}}{2}, \quad t>0.$$

Άρα τελικά, $C_{xy}(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-2t}}{2}, & t>0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

Άσκηση 4η:

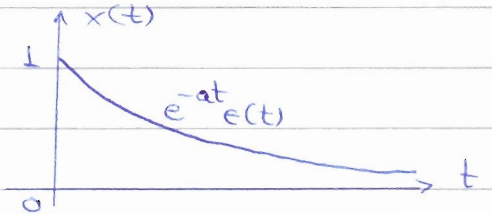
Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος:

$$x(t)=e^{-at}\epsilon(t), \quad \alpha>0.$$

Λύση: Η αυτοσυσχέτιση είναι η $\varphi_x(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)\,dt$, οπότε πρέπει να βρούμε το $x(t+\tau)$.

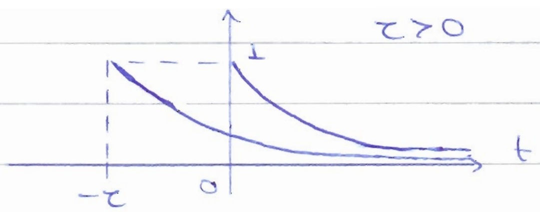
Προσέξτε ότι εδώ η μεταβλητή μας είναι το t

Είναι:



Ανάλογα το τ, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• $\tau>0$

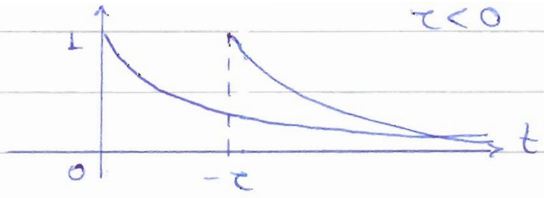


$$\varphi_x(\tau)=\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-a(t+\tau)}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-at}e^{-a\tau}\,dt =$$

$$= e^{-a\tau}\int_0^{+\infty} e^{-2at}\,dt = e^{-a\tau}\frac{1}{-2a}e^{-2at}\Big]_0^{+\infty} = e^{-a\tau}\frac{1}{-2a}(0-1) =$$

$$= \frac{1}{2a}e^{-a\tau}, \quad \tau>0.$$

• $\tau<0$



$$\varphi_x(\tau)=\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-a(t+\tau)}\,dt = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2at}\cdot e^{-a\tau}\,dt =$$

$$= \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2at}\,dt \cdot e^{-a\tau} = e^{-a\tau}\frac{1}{-2a}e^{-2at}\Big]_{-\tau}^{+\infty} =$$

$$= e^{-a\tau}\frac{1}{-2a}\left(0-e^{2a\tau}\right) = \frac{1}{2a}e^{a\tau}, \quad \tau<0.$$

Άρα τελικά, $\varphi_x(\tau)=\frac{1}{2a}e^{-a|\tau|}, \quad \alpha>0.$

Άσκηση 5η:

Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος:

$$x(t) = e^{-at}\epsilon(t),\ a>0.$$

Λύση: Ξέρουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας δίνεται από το Μ.F. της αυτοσυσχέτισης:

$$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau.$$

Όμως, έχουμε δείξει ότι $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$. Άρα αρκεί να βρούμε το $|X(f)|^2$.

Είναι $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\epsilon(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt =$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt = \frac{-1}{a+j2\pi f}\, e^{-(a+j2\pi f)t}\Big]_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{a+j2\pi f}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1\right). \quad (1)$$

Πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-at}\cdot e^{-j2\pi ft}$.

Η $e^{-j2\pi ft}$ είναι φραγμένη ($|e^{-j2\pi ft}| \leq 1$) και η e^{-at} συγκλίνει όταν $t\to+\infty$, με $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-at} = 0$, για $a>0$. Οπότε τελικά,

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-at}\cdot e^{-j2\pi ft} = 0$, άρα η (1) γράφεται:

$$X(f) = -\frac{1}{a+j2\pi f}(0-1) = \frac{1}{a+j2\pi f},\ a>0.$$

Άρα $\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = \left|\dfrac{1}{a+j2\pi f}\right|^2 = \dfrac{1}{a^2+4\pi^2 f^2},\ a>0.$

Άσκηση 6η:

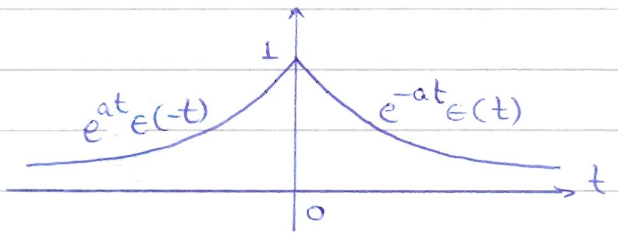
Να σχεδιάσετε το σήμα:

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad -\infty < t < +\infty$$

με $a > 0$ και να υπολογίσετε το M.F. του σήματος. Επίσης, να υπολογίσετε το μέτρο και τη φάση του M.F. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος, $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$.

Σε ποιες συχνότητες το φάσμα πλάτους ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος;

Λύση: Το σήμα γράφεται ως: $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$.



Είναι $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi f t}\,dt +$

$$+ \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j2\pi f)t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t}\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-a-j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t}\Big]_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f}(1-0) + \frac{1}{-a-j2\pi f}(0-1) =$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} - \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}, \quad a>0.$$

Παρατηρούμε ότι το $X(f)$ είναι πραγματικό σήμα, και θετικό για κάθε f. Άρα η φάση του είναι $\varphi = 0$ και το μέτρο του είναι ο ίδιος ο M.F., δηλ. $|X(f)| = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$.

Επίσης, $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \underbrace{e^{-j2\pi 0 t}}_{1}\,dt = X(0) = \frac{2}{a}$.

Άρα η μέση τιμή του σήματος είναι $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \frac{2}{a}$.

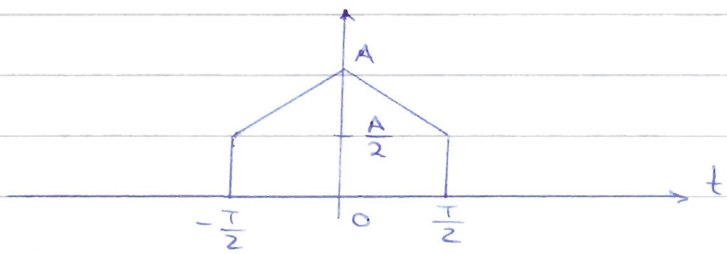
Θέλουμε να βρούμε σε ποιές συχνότητες, τέλος, το φάσμα πλάτους, $|X(f)|$, ισούται με το μισό της μέσης τιμής του σήματος. Είναι:

$$|X(f)| = \frac{2/a}{2} = \frac{1}{a} \iff \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} = \frac{1}{a} \iff$$

$$\iff 4\pi^2 f^2 = a^2 \iff f = \pm \frac{a}{2\pi}.$$

Άσκηση 7η:

Να υπολογίσετε το Μ.F. του σήματος:



Λύση: Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να "σπάσουμε" το σήμα σε δυο απλούστερα: στο $x_1(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ και στο $x_2(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T/2}\right)$, δηλαδή ένα τετραγωνικό παράθυρο πλάτους $\frac{A}{2}$ και διάρκειας T, κι ένα τριγωνικό παράθυρο, πλάτους $\frac{A}{2}$ και διάρκειας T επίσης, και τα δυο συμμετρικά ως προς το $t_0=0$. Εύκολα λοιπόν:

$$x_1(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} X_1(f) = \frac{A}{2} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T/2}\right) \xleftrightarrow{F} X_2(f) = \frac{A}{2}\frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{2}\right).$$

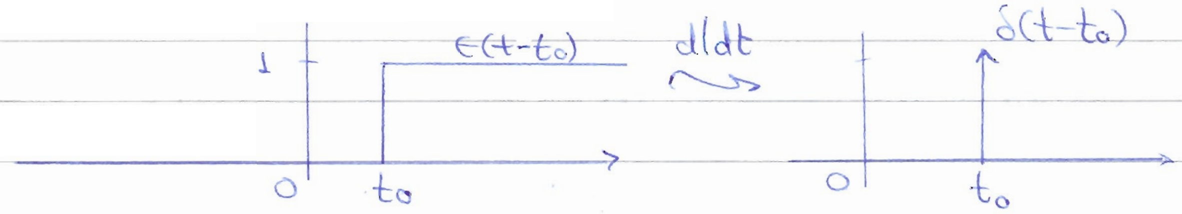
Άρα τελικά $X(f) = \frac{AT}{2}\left(\mathrm{sinc}(fT) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)\right).$

Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα:

$$j2\pi f X(f) = F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \quad (1)$$

Δηλ. να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο του $x(t)$, να βρούμε το Μ.F. της, και να βρούμε το $X(f)$ από την παραπάνω σχέση.

Στην προσπάθειά μας να βρούμε την παράγωγο του $x(t)$, πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στις χρονικές στιγμές $\pm\frac{T}{2}$. Στα σημεία αυτά, υπάρχει απότομη μετάβαση πλάτους, από την τιμή 0 στην τιμή $\frac{A}{2}$, κι από την τιμή $\frac{A}{2}$ στην τιμή 0, αντίστοιχα. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, δεν ορίζεται παράγωγος στα σημεία αυτά. Όμως έχετε δείξει στο μάθημα ότι:

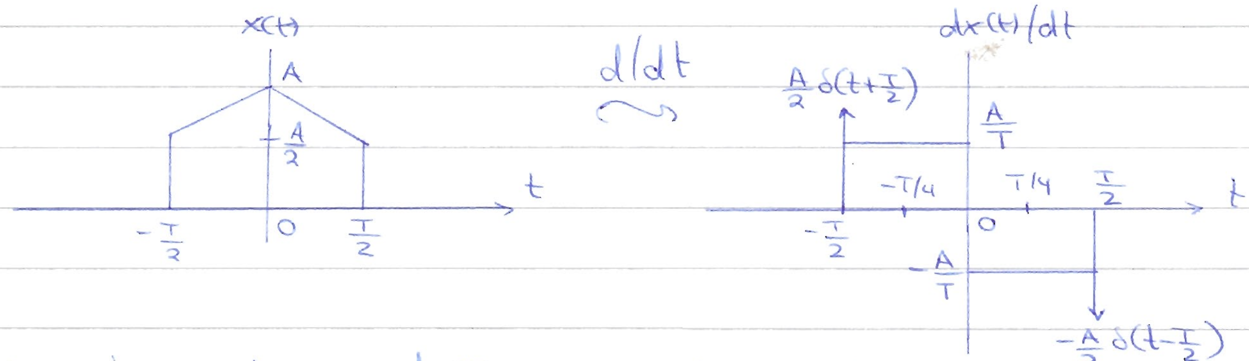


δηλ. ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης $\epsilon(t-t_0)$ είναι μια συνάρτηση δέλτα στη θέση $t=t_0$.

Η βηματική συνάρτηση ουσιαστικά είναι μια ασυνέχεια, από την τιμή 0 "ανεβαίνει" ακαριαία στην τιμή 1 (ή σε όποια τιμή). Οποιοδήποτε σήμα που περιέχει μια ασυνέχεια (ή και περισσότερες) μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση βηματικών και απλούστερων σημάτων. Για παράδειγμα, το $x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, το γνωστό μας τετραγωνικό παράθυρο πλάτους A και διάρκειας T, γύρω από το $t=0$, μπορεί να γραφεί ως:

$$x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = A\,\epsilon\left(t+\frac{T}{2}\right) - A\,\epsilon\left(t-\frac{T}{2}\right) \quad (\text{γιατί;})$$

Οπότε, όταν παραγωγίζουμε ένα σήμα, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στα σημεία ασυνέχειας. Άρα θα έχουμε:



Οπότε έχουμε ότι η $\frac{dx(t)}{dt}$ αποτελείται από:

- Μια συνάρτηση δέλτα, $x_1(t) = \frac{A}{2}\delta\left(t+\frac{T}{2}\right)$.
- Ένα παράθυρο, $x_2(t) = \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{4}}{T/2}\right)$.
- Άλλο ένα παράθυρο, $x_3(t) = -\frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{T/2}\right)$
- Και μια ακόμα συνάρτηση δέλτα, $x_4(t) = -\frac{A}{2}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right)$.

Άρα τελικά, $\frac{dx(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) =$

$$= \frac{A}{2}\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) + \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{4}}{T/2}\right) - \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{T/2}\right) - \frac{A}{2}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right) \overset{F}{\sim}$$

$$\overset{F}{\sim} F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{A}{2}e^{j2\pi f\frac{T}{2}} + \frac{A}{T}\frac{T}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)e^{j2\pi f\frac{T}{4}} -$$

$$-\frac{A}{T}\frac{T}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} - \frac{A}{2}e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{A}{2}2j\sin(\pi fT) + \frac{A}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)2j\sin\left(\frac{\pi fT}{2}\right) \overset{1}{=} j2\pi f X(f).$$

Άρα $X(f) = \frac{AT}{2}\mathrm{sinc}(fT) + \frac{AT}{4}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)$.