ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Σειρές Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

19-3-2010

1. Έστω $x(t)$ ένα πραγματικό σήμα. Σε πολλές εφαρμογές τηλεπικοινωνιών, ορίζεται η αναλυτική μορφή, $\overline{x}(t)$, του σήματος $x(t)$ ως:

$$\overline{x}(t) = x(t) + j\widehat{x}(t),$$

όπου $\widehat{x}(t)$ είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του σήματος, και ο οποίος ορίζεται ως:

$$\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)}{t-\tau}d\tau.$$

Βρείτε το μετασχηματισμό Hilbert του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Λύση:

Είναι $\widehat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)}{t-\tau}d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A}{t-\tau}d\tau = \frac{A}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{t-\tau}d\tau.$

Θέτω $u = t-\tau \Rightarrow du = -d\tau, u_1 = t - \frac{T}{2}, u_2 = t + \frac{T}{2}$.

Άρα θα είναι $\widehat{x}(t) = -\frac{A}{\pi}\int_{t+\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} \frac{1}{u}du = \frac{A}{\pi}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{1}{u}du = \frac{A}{\pi}[\ln|u|]_{t+\frac{T}{2}}^{t-\frac{T}{2}} =$

$\frac{A}{\pi}(\ln|t+\frac{T}{2}| - \ln|t-\frac{T}{2}|) = \frac{A}{\pi}\ln|\frac{t+\frac{T}{2}}{t-\frac{T}{2}}|.$

Σχόλιο:

Το αναλυτικό σήμα $\overline{x}(t)$ είναι ένα σήμα το οποίο έχει το ίδιο φάσμα στις θετικές συχνότητες με το $x(t)$, αλλά έχει μηδενικό φάσμα στις αρνητικές συχνότητες. Η χρησιμότητά του συνίσταται στο γεγονός ότι διευκολύνει τις πράξεις με σήματα, και στο γεγονός ότι από την αναλυτική μορφή ενός πραγματικού σήματος $x(t)$ μπορούμε πάντα να επιστρέψουμε στην αρχική μορφή του $x(t)$ (κι αυτό γιατί το φάσμα ενός πραγματικού σήματος είναι συζυγές συμμετρικό). Ουσιαστικά, ο μετασχηματισμός Hilbert $\widehat{x}(t)$ βοηθάει ακριβώς σε αυτό: 'κόβει' τις αρνητικές συνιστώσες του φάσματος του σήματος $x(t)$, αν στο $x(t)$ προσθέσει κανείς το $j\widehat{x}(t)$. Οπότε το $\overline{x}(t) = x(t) + j\widehat{x}(t)$, ως ένα τέτοιο άθροισμα του $x(t)$ και του $j\widehat{x}(t)$, καταλήγει να έχει μηδενικό φάσμα στην αρνητικές συχνότητες και μη μηδενικό φάσμα μόνο στις θετικές συχνότητες.
Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

έχει φασματικές συνιστώσες πλάτους $\frac{A}{2}$ στις συχνότητες f_0 και $-f_0$. Η αναλυτική του μορφή, $\overline{x}(t)$, θα πρέπει να έχει φασματικές συνιστώσες μόνο (!) στη θετική συχνότητα f_0. Έτσι, εύκολα (λέμε :)) μπορούμε να πούμε ότι η αναλυτική μορφή του $x(t)$ είναι:

$$\overline{x}(t) = x(t) + j\widehat{x}(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + jA\sin(2\pi f_0 t) = Ae^{j2\pi f_0 t},$$

του οποίου το φάσμα έχει μόνο μια συνιστώσα πλάτους A στη συχνότητα f_0, όπως βλέπετε.
Άρα ο μετασχηματισμός Hilbert του $A\cos 2\pi f_0 t$ είναι $\widehat{x}(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$.
Η όλη διαδικασία της αναπαράστασης σε αναλυτική μορφή χρησιμοποιείται στις τηλεπικοινωνίες, κυρίως σε μεθόδους διαμόρφωσης - αποδιαμόρφωσης μονής πλευρικής ζώνης. Όλα αυτά, απλά ως σημείωση, επ' ευκαιρία της άσκησης...

2. Ένα περιοδικό σήμα $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ με περίοδο 5 sec θέλουμε να καθυστερήσει κατά 0.05 sec. Πόση θα είναι η φάση μετατόπισής του;

Λύση:

Έστω $t_0 = 0.05sec$. Το καθυστερημένο κατά t_0 σήμα εκφράζεται ως:

$x(t-t_0) = A\cos(2\pi f_0(t-t_0)) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$.
Άρα $\phi = -2\pi f_0 t_0 = -2\pi \frac{1}{T_0} t_0 = -2\pi \frac{1}{5} 0.05 = -0.02\pi$.
Προφανώς, αν θέλαμε να προηγείται κατά $t_0 = 0.05sec$, θα είχαμε $\phi = 0.02\pi$, με παρόμοιο συλλογισμό με παραπάνω (θα ζητούσαμε τότε το $x(t+t_0)$).

3. Έστω το σήμα $x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2(k+1)\pi t + \phi_k)$. Βρείτε την περίοδό του.

Λύση:

Το σήμα είναι προφανώς αναπτυγμένο κατά Fourier. Βλέπουμε ότι για $k = 1, k = 2, k = 3 \cdots$, παίρνουμε αντίστοιχα (κυκλικές) συχνότητες $\omega_1 = 4\pi, \omega_2 = 6\pi, \omega_3 = 8\pi \cdots$. Προφανώς, όλες αυτές οι συχνότητες είναι πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, της $\omega_0 = 2\pi$. Άρα η περίοδος είναι $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1$. Προσέξτε, το γεγονός ότι δεν υπάρχει συνημίτονο με τέτοια συχνότητα στην παραπάνω αναπαράσταση, δε σημαίνει κάτι για την περίοδο του σήματος.

4. Ένα chirp σήμα μοναδιαίου πλάτους $x(t)$ μεταβάλλει τη συχνότητά του από 3000 Hz σε 0 Hz σε χρόνο 2 sec.

α) Σχεδιάστε την αναπαράσταση χρόνου-συχνότητας για το $x(t)$.

β) Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος.

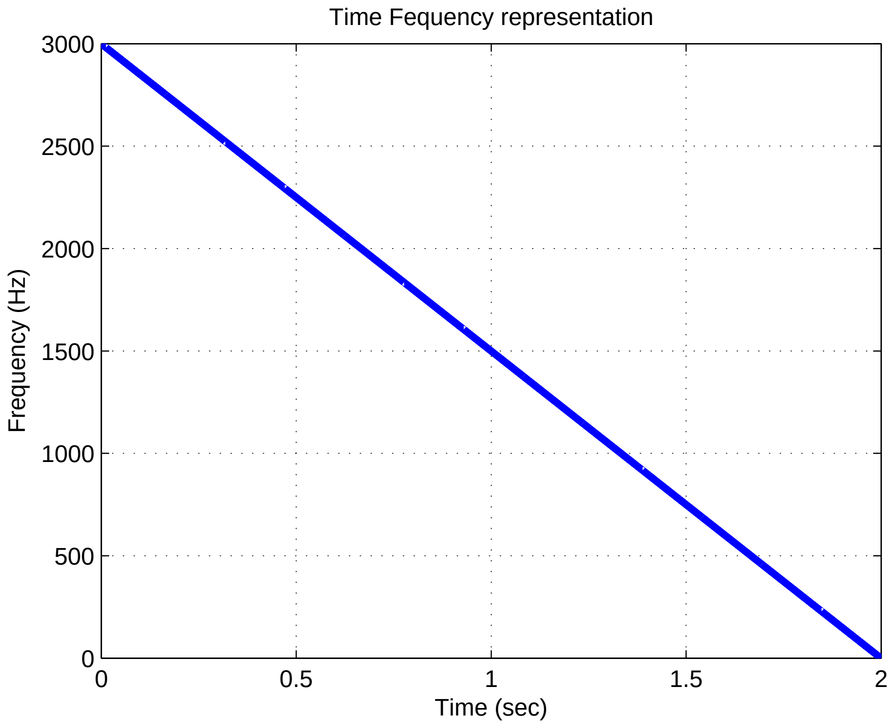
Λύση:

Ένα chirp σήμα (σήμα σειρήνας, στα ελληνικά :)) είναι ένα σήμα το οποίο ΔΕ διατηρεί σταθερή συχνότητα με το πέρασμα του χρόνου (όπως κάνει το $A\cos(2\pi f_0 t)$, που έχει συχνότητα σταθερή και ίση με f_0), αλλά όσο περνάει ο χρόνος, η συχνότητα μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το χρόνο. Σήματα σειρήνας μπορείτε να ακούσετε σε περιπολικά, ασθενοφόρα ή πυροσβεστικά οχήματα (μακριά από μας και τα τρια :)).
Το chirp σήμα ορίζεται ως $x(t) = \cos(\theta(t))$, με $\theta(t) = 2\pi m t^2 + 2\pi f_0 t + \phi$, με m μια σταθερά

που λέγεται σταθερά διαμόρφωσης.

Η στιγμιαία συχνότητα του σήματος $x(t)$ ορίζεται ως: $f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = 2mt + f_0$.

α) Ένα σήμα που μεταβάλλει γραμμικά τη συχνότητά του από 3000 Hz ως 0 Hz σε 2 sec, έχει αναπαράσταση χρόνου-συχνότητας όπως φαίνεται παρακάτω:



β) Αφού το σήμα μεταβάλλεται γραμμικά σε χρονικό διάστημα $T = 2$ sec από $f_1 = 3000$ Hz ως $f_2 = 0$ Hz, η στιγμιαία του συχνότητα θα είναι:

$f_i(t) = \frac{f_2 - f_1}{T}t + f_1 = \frac{0-3000}{2} + 3000 = -1500t + 3000$. Άρα η φάση του θα είναι $\theta(t) = 2\pi\int_0^t(-1500u + 3000)du + \phi = 2\pi(-1500\frac{t^2}{2} + 3000t) + \phi = -1500\pi t^2 + 6000\pi t + \phi$

(αν δεν μπορείτε να θυμάστε τον τύπο της $f_i(t)$, μπορείτε απλά να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα (0,3000), (2,0) στο σχήμα του ερωτήματος (α). Αυτή θα είναι η $f_i(t)$).

Άρα τελικά το σήμα θα είναι το $x(t) = \cos(-1500\pi t^2 + 6000\pi t + \phi)$.

5. Αναπτύξτε σε σειρά Fourier το σήμα

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)}$$

α) Ποιά είναι η περίοδος του σήματος·

β) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσμα φάσης του σήματος.

Λύση:

Αναπτύσσουμε το σήμα μας σύμφωνα με τους τύπους του Euler:

$$x(t) = \frac{\sin(2t) + \sin(3t)}{\sin(t)} = \frac{\frac{1}{2j}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t})}{\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})}$$
$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ταυτότητες:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\ ,\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

για τα εκθετικά του αριθμητή. Θα είναι λοιπόν:

$$x(t) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{j2t} - e^{-j2t} + e^{j3t} - e^{-j3t}) = \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt})^2 - (e^{-jt})^2 + (e^{jt})^3 - (e^{-jt})^3]$$

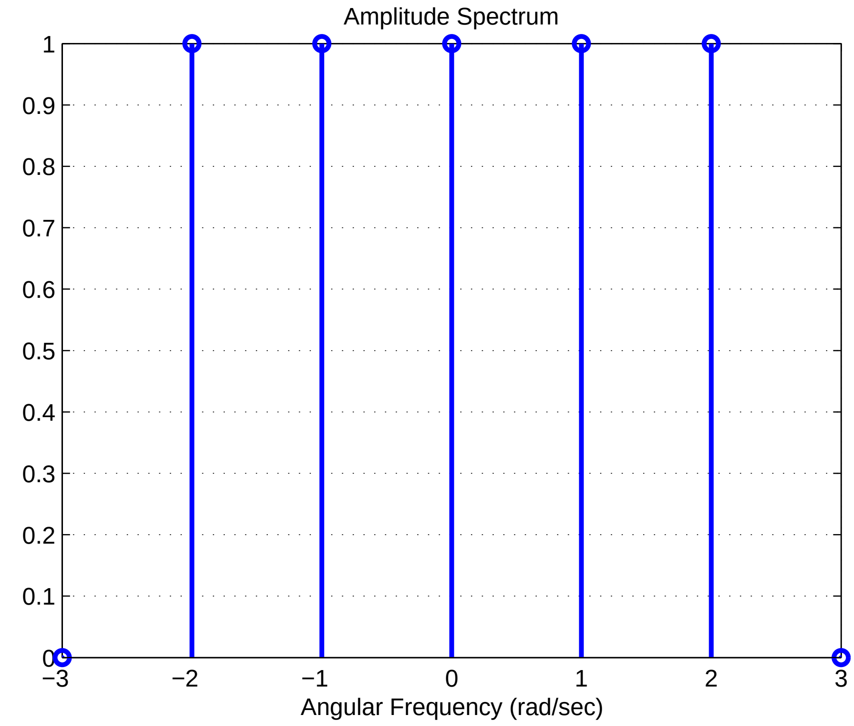
$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}[(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt}) + (e^{jt} - e^{-jt})(e^{j2t} + 1 + e^{-j2t})] =$$

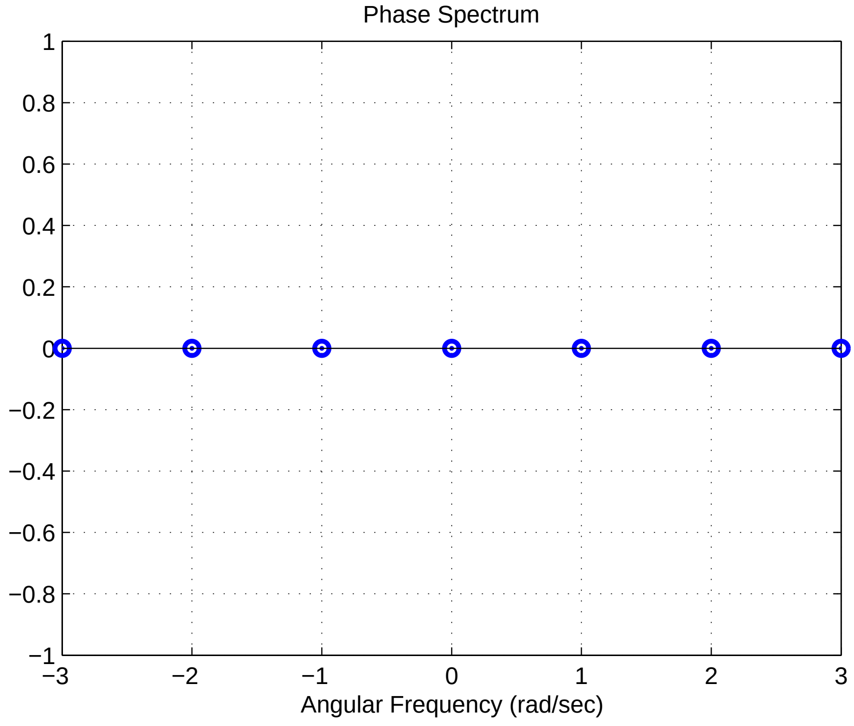
$$= \frac{1}{(e^{jt} - e^{-jt})}(e^{jt} - e^{-jt})(e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t}) = e^{jt} + e^{-jt} + 1 + e^{j2t} + e^{-j2t}$$

$$= 1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t).$$

α) Η περίοδος του σήματος θα είναι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{2\pi, \pi\} = 2\pi$.

β) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:


Amplitude Spectrum
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−3
−2
−1
0
1
2
3
Angular Frequency (rad/sec)


Phase Spectrum
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−3
−2
−1
0
1
2
3
Angular Frequency (rad/sec)

6. Ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier, και για τις συχνότητες 100, 200, 300, 400 Hz έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:

$$X_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}, X_2 = 2e^{j\frac{\pi}{4}}, X_3 = 3e^{j\frac{\pi}{16}}, X_4 = 2e^{j\frac{\pi}{8}}$$

Ένα δεύτερο πραγματικό σήμα $y(t)$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και για τις συχνότητες 50, 100, 150, 200 Hz έχει αντίστοιχα μιγαδικά πλάτη:

$$Y_1 = 3e^{j\pi}, Y_2 = 2e^{j\frac{\pi}{3}}, Y_3 = e^{j\frac{\pi}{16}}, Y_4 = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Άλλες συχνότητες δεν υπάρχουν στα σήματα.

Υπολογίστε τα:

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x^2(t)dt$$

$$\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} y^2(t)dt$$

$$\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} x(t)y(t)dt$$

όπου T_1, T_2 οι αντίστοιχες περίοδοι των $x(t), y(t)$.

Λύση:

Πολύ χρήσιμο θα μας φανεί εδώ το θεώρημα του Parseval για ένα και δυο σήματα:

Για ένα σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0, ισχύει ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2,$$

δηλαδή η ενέργεια ενός σήματος σε μια περίοδο προς την περίοδο αυτή, ισούται με το άθροισμα των απολύτων τιμών στο τετράγωνο των συντελεστών Fourier του δίπλευρου αναπτύγματος.

Για ένα σήμα $x(t)$ κι ένα σήμα $y(t)$, με κοινή περίοδο T_0, ισχύει ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^*,$$

δηλαδή το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών Fourier (με τον έναν εκ των δύο να είναι συζυγής) του δίπλευρου αναπτύγματος στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες kf_0! Το τι ακριβώς σημαίνει αυτό, θα το δούμε σε λίγο.

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = |X_{-4}|^2+|X_{-3}|^2+|X_{-2}|^2+|X_{-1}|^2+|X_1|^2+|X_2|^2+|X_3|^2+|X_4|^2$$

Το σήμα μας όμως είναι πραγματικό, άρα ισχύει: $X_{-k} = X_k^*$. Άρα θα έχουμε:

$|X_{-4}|^2 + |X_{-3}|^2 + |X_{-2}|^2 + |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2$

$= |X_4^*|^2 + |X_3^*|^2 + |X_2^*|^2 + |X_1^*|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2$

$= |2e^{-j\frac{\pi}{8}}|^2 + |3e^{-j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{-j\frac{\pi}{4}}|^2 + |e^{-j\pi}|^2 + |e^{j\pi}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{4}}|^2 + |3e^{j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{8}}|^2.$

Γνωρίζουμε όμως ότι $|Ae^{j\phi}|^2 = |A|^2|e^{j\phi}|^2 = |A|^2$, γιατί είναι $|e^{j\phi}|^2 = |\cos(\phi) + j\sin(\phi)|^2 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$ (μέτρο μιγαδικού αριθμού στο τετράγωνο). Άρα τελικά θα έχουμε:

$|2e^{-j\frac{\pi}{8}}|^2 + |3e^{-j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{-j\frac{\pi}{4}}|^2 + |e^{-j\pi}|^2 + |e^{j\pi}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{4}}|^2 + |3e^{j\frac{\pi}{16}}|^2 + |2e^{j\frac{\pi}{8}}|^2$

$= |2|^2 + |3|^2 + |2|^2 + |1|^2 + |1|^2 + |2|^2 + |3|^2 + |2|^2$

$= 4 + 9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9 + 4 = 36.$

Επαληθεύστε εσείς, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ότι $\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} y^2(t)dt = 30.$

Για το τρίτο ολοκλήρωμα, πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα. Όπως προαναφέρθηκε, μπορούμε να εκφράσουμε τον τύπο του Parseval, $\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} x(t)y(t)dt$, με λόγια: το ολοκλήρωμα σε μια κοινή περίοδο του γινομένου των δυο σημάτων στο χρόνο ισούται με το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών Fourier (με τον έναν εκ των δύο να είναι συζυγής) του δίπλευρου αναπτύγματος στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες kf_0.

Ας κάνουμε πρώτα σαφές το εξής (ΠΡΟΣΟΧΗ!): Δυο ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ πραγματικά περιοδικά σήματα με την ίδια περίοδο T_0 αναπτύσσονται το καθένα σε μια σειρά Fourier στις ΙΔΙΕΣ αρμονικές συχνότητες $k\omega_0$ (ή kf_0). Ας το δούμε μαθηματικά (μην τρομάζετε, ψυχραιμία!):

Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 (και άρα θεμελιώδη κυκλική συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$) αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Ένα δεύτερο περιοδικό σήμα $y(t)$ με την ΙΔΙΑ περίοδο T_0 (και άρα με την ΙΔΙΑ θεμελιώδη κυκλική συχνότητα ω_0 που έχει και το $x(t)$) αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Βλέπετε ότι αυτό που αλλάζει είναι τα μιγαδικά πλάτη των εκθετικών συνιστωσών $e^{jk\omega_0 t}$. Για το πρώτο σήμα, τα μιγαδικά πλάτη είναι X_k, για το δεύτερο σήμα είναι Y_k. Όμως οι εκθετικές συνιστώσες είναι οι ίδιες και στις δυο περιπτώσεις: $e^{jk\omega_0 t}$! Αυτό σημαίνει ότι ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΣΗΜΑΤΑ αναλύονται στις ίδιες εκθετικές συνιστώσες, δηλ. στις ίδιες αρμονικές συχνότητες. Δείτε το κι αλλιώς: αυτό σημαίνει ότι στα δίπλευρα φάσματα πλάτους (και φάσης) ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΗΜΑΤΩΝ, θα έχουμε μη μηδενικές τιμές στις συχνότητες $k\omega_0$, δηλ. στις $\pm\omega_0$,$\pm 2\omega_0$,$\pm 3\omega_0$,$\pm 4\omega_0$ κλπ.

<u>Αυτό συμβαίνει γιατί και τα δυο σήματα έχουν την ίδια περίοδο</u>, άρα την ίδια θεμελιώδη κυκλική συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, οπότε οι αρμονικές <u>συχνότητες</u> που προκύπτουν κατά τα αναπτύγματα σε σειρά Fourier είναι οι ίδιες και στα δυο αναπτύγματα!

Σε μια τέτοια περίπτωση, η εφαρμογή του τύπου του Parseval γίνεται κατευθείαν,

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)y^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = ... + X_{-4}Y_{-4}^* + X_{-3}Y_{-3}^* + ... + X_3 Y_3^* + X_4 Y_4^* + ...,$$

αφού το X_1 αντιστοιχεί στη συχνότητα $1\omega_0$, όπως και το Y_1, το X_2 αντιστοιχεί στη συχνότητα $2\omega_0$, όπως και το Y_2, το X_3 αντιστοιχεί στη συχνότητα $3\omega_0$, όπως και το Y_3 κ.ο.κ. , το ίδιο και για τα $k < 0$.

(Αν κάπου το 'χάσατε', ξαναδιαβάστε το! Είναι εύκολο, κι ας μην του φαίνεται :))

Έστω ότι έχουμε κατανοήσει το παραπάνω :). Προσπαθώντας να εφαρμόσουμε τον τύπο του Parseval για τα $x(t), y(t)$, βλέπουμε ότι αυτός ισχύει ΜΟΝΟ για σήματα που έχουν την ίδια περίοδο T_0 (ή αλλιώς, την ίδια θεμελιώδη συχνότητα f_0 ή θεμελιώδη κυκλική συχνότητα ω_0). Στην περίπτωσή μας, το ένα σήμα ($x(t)$) έχει μιγαδικά πλάτη στις συχνότητες 100, 200, 300, 400 Hz, και το άλλο σήμα ($y(t)$) έχει μιγαδικά πλάτη στις συχνότητες 50, 100, 150, 200 Hz. Το να πούμε:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = X_{-4}Y_{-4}^* + X_{-3}Y_{-3}^* + ... + X_3Y_3^* + X_4Y_4^*,$$

και μετά αντικαθιστώντας αμέσως τις τιμές από την εκφώνηση, θα ήταν ΛΑΘΟΣ! Γιατί; Γιατί τα X_k, Y_k δεν ανταποκρίνονται στις ίδιες αρμονικές συχνότητες! Για παράδειγμα, το X_1 είναι το μιγαδικό πλάτος που αντιστοιχεί στα 100 Hz, ενώ το Y_1 είναι το μιγαδικό πλάτος που αντιστοιχεί στα 50 Hz! Οπότε δεν ισχύει το άθροισμα γινομένων που γράψαμε μόλις πιο πάνω. Πρέπει να υπάρχει "αντιστοιχία"μεταξύ των πλατών, δηλ. να αναφέρονται στις ίδιες συχνότητες, άσχετα με τον δείκτη k που έχουν!

Άρα τελικά (ουφ!...) αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε τα X_k, Y_k των ίδιων συχνοτήτων. Συγκεκριμένα:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = \underbrace{X_{-1}^*Y_{-2}} + \underbrace{X_{-2}^*Y_{-4}} + \underbrace{X_1Y_2^*} + \underbrace{X_2Y_4^*},$$

με το πρώτο άγκιστρο να δείχνει τα μιγαδικά πλάτη των $-100Hz$, το δεύτερο των $-200Hz$, το τρίτο των $100Hz$ και το τέταρτο των $200Hz$.

Επειδή τα σήματα είναι πραγματικά, ισχύει $X_{-k} = X_k^*$, άρα θα είναι τελικά:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* = X_1Y_2^* + X_2Y_4^* + X_1Y_2^* + X_2Y_4^* =$$

$$= e^{j\frac{\pi}{3}}2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{3}}2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{4}} = 2 + 2 + 2 + 2 = 8,$$

αποτέλεσμα λογικό, γιατί το ολοκλήρωμα δυο πραγματικών σημάτων δε γίνεται να μας δώσει μιγαδικό αποτέλεσμα. Αν περίσσευε κάποιο $e^{j\phi}$, τότε κάποιο λάθος θα είχαμε κάνει.

<u>Σημείωση - για προχωρημένους :) </u>: Αυτό που κάναμε "σιωπηρά"παραπάνω είναι το εξής: Παρατηρούμε ότι το $x(t)$ έχει περίοδο $T_1 = \frac{1}{100} = 0.01sec$ και το $y(t)$ έχει περίοδο $T_2 = \frac{1}{50} = 0.02sec$, δηλ. $T_2 = 2T_1$. Οπότε μπορούμε να "θεωρήσουμε"(κάπως τεχνική προσέγγιση αυτή)

ότι το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_1 = 0.02sec$ και άρα θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = 50Hz$. Οπότε οι "νέες"αρμονικές του θα είναι $[\pm 50, \pm 100, \pm 150, \pm 200, \pm 250, \pm 300, \pm 350, \pm 400]$ Hz, και βέβαια στα $\pm 50, \pm 150, \pm 250, \pm 350$ Hz τα μιγαδικά πλάτη θα είναι μηδέν. Οπότε για το $x(t)$ έχουμε τους "νέους"συντελεστές Fourier, X'_k, οι οποίοι είναι:

$$X'_k = [X'_1, X'_2, X'_3, X'_4, X'_5, X'_6, X'_7, X'_8] = [0, X_1, 0, X_2, 0, X_3, 0, X_4],$$

για τις συχνότητες $[50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400]$.

Τώρα υπάρχει αντιστοιχία συχνοτήτων με το Y_k, οπότε πλέον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Parseval ως:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} x(t)y(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X'_k Y_k^* &= X'_{-4}Y_{-4}^* + X'_{-3}Y_{-3}^* + ... + X'_3 Y_3^* + X'_4 Y_4^* \\ &= X_4'^* Y_4 + X_3'^* Y_3 + ... + X'_3 Y_3^* + X'_4 Y_4^* = ... = 8,\end{aligned}$$

όπως παραπάνω.