ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Σειρές Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

17-3-2010

1. Έστω ένα πραγματικό, περιττό και περιοδικό σήμα $x(t)$, που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές X_k. Δείξτε ότι

$$X_k = -X_{-k}.$$

Λύση:

Το σήμα μας είναι περιττό, άρα θα ισχύει $x(t) = -x(-t)$.

Είναι:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} -x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt.$$

Θέτω $u = -t \Rightarrow du = -dt$. Επίσης, $u_1 = 0, u_2 = -T_0$.

Άρα θα είναι $X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du = -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{-j2\pi(-k)f_0 u}du = -X_{-k}$.

2. Δίδονται τρια πραγματικά, περιοδικά σήματα με μικρό αριθμό αρμονικών. Οι μη μηδενικοί συντελεστές για $k > 0$ δίδονται ακολούθως:

α) $x_1(t) : T_0 = 1, X_1 = 5, X_3 = 2$.

β) $x_2(t) : T_0 = 2, X_1 = j, X_2 = -j\frac{1}{2}, X_3 = j\frac{1}{4}, X_4 = -j\frac{1}{8}$.

Βρείτε τα $x_i(t)$.

Λύση:

Αφού τα σήματα είναι πραγματικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές X_k και για $k < 0$, και για αυτούς θα ισχύει ότι $X_{-k} = X_k^*$.

α) Είναι $x_1(t) = X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + X_{-1}e^{j2\pi(-1)\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi(+1)\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t}$
$= X_3^*e^{-j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + X_1^*e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi3\frac{1}{T_0}t}$
$= 2e^{-j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + 5e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 5e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + 2e^{j2\pi3\frac{1}{T_0}t}$
$= 2e^{-j6\pi t} + 5e^{-j2\pi t} + 5e^{j2\pi t} + 2e^{j6\pi t}$
$= 2(e^{-j6\pi t} + e^{j6\pi t}) + 5(e^{-j2\pi t} + e^{j2\pi t})$
$= 4\cos(6\pi t) + 10\cos(2\pi t)$.

β) Είναι $x_2(t) = X_{-4}e^{j2\pi(-4)\frac{1}{T_0}t} + X_{-3}e^{j2\pi(-3)\frac{1}{T_0}t} + X_{-2}e^{j2\pi(-2)\frac{1}{T_0}t} + X_{-1}e^{j2\pi(-1)\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi(+1)\frac{1}{T_0}t} +$
$X_2e^{j2\pi(+2)\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi(+3)\frac{1}{T_0}t} + X_4e^{j2\pi(+4)\frac{1}{T_0}t}$
$= X_4^*e^{-j2\pi4\frac{1}{T_0}t} + X_3^*e^{-j2\pi3\frac{1}{T_0}t} + X_2^*e^{-j2\pi2\frac{1}{T_0}t} + X_1^*e^{-j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_1e^{j2\pi\frac{1}{T_0}t} + X_2e^{j2\pi2\frac{1}{T_0}t} + X_3e^{j2\pi3\frac{1}{T_0}t} +$
$X_4e^{j2\pi4\frac{1}{T_0}t}$
$= j\frac{1}{8}e^{-j2\pi4\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{4}e^{-j2\pi3\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi2\frac{1}{2}t} - je^{-j2\pi\frac{1}{2}t} + je^{j2\pi\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{2}e^{j2\pi2\frac{1}{2}t} + j\frac{1}{4}e^{j2\pi3\frac{1}{2}t} - j\frac{1}{8}e^{j2\pi4\frac{1}{2}t}$
$= j\frac{1}{8}e^{-j4\pi t} - j\frac{1}{4}e^{-j3\pi t} + j\frac{1}{2}e^{-j2\pi t} - je^{-j\pi t} + je^{j\pi t} - j\frac{1}{2}e^{j2\pi t} + j\frac{1}{4}e^{j3\pi t} - j\frac{1}{8}e^{j4\pi t}$
$= j\frac{1}{8}(e^{-j4\pi t} - e^{j4\pi t}) - j\frac{1}{4}(e^{-j3\pi t} - e^{j3\pi t}) + j\frac{1}{2}(e^{-j2\pi t} - e^{j2\pi t}) - j(e^{-j\pi t} - je^{j\pi t})$
$= -j\frac{1}{8}2j\sin(4\pi t) + j\frac{1}{4}2j\sin(3\pi t) - j\frac{1}{2}2j\sin(2\pi t) + j2j\sin(\pi t)$
$= \frac{1}{4}\sin(4\pi t) - \frac{1}{2}\sin(3\pi t) + \sin(2\pi t) - 2\sin(\pi t)$

3. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο T_0, σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} \le t < T_0 \end{cases}$$

Λύση:

Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \text{ και } X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

Θα είναι λοιπόν:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}|_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-\alpha}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}} - 1) \Longleftrightarrow X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{\alpha T_0}(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}).$$

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-\alpha t - j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha + j2\pi k f_0)}e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)t}|_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-(\alpha + j2\pi k f_0)}(e^{-(\alpha + j2\pi k f_0)\frac{T_0}{2}} - 1) = -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha + j2\pi k f_0)}(e^{-(\alpha\frac{T_0}{2} + j\pi k)} - 1) =$$

$$= -\frac{1}{T_0}\frac{1}{(\alpha + j2\pi k f_0)}(e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k} - 1) = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}e^{-j\pi k})$$

Όμως ξέρουμε ότι: $e^{-j\pi k} = \cos\pi k - j\sin\pi k = (-1)^k$, γιατί για κάθε k ακέραιο, το $\cos\pi k$ είναι είτε 1 για άρτια k, είτε -1 για περιττά k, ενώ το $\sin\pi k$ είναι μηδέν για κάθε k.

Άρα μπορούμε να γράψουμε τελικά ότι:

$$X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}(1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}})$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι :

$$X_0 = \frac{1}{\alpha T_0}(1 - e^{-\alpha\frac{T_0}{2}}) \text{ και } X_k = \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}(1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}})$$

Άρα το σήμα μας θα γράφεται ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha T_0 + j2\pi k)}(1 - (-1)^k e^{-\alpha\frac{T_0}{2}})e^{j2\pi k f_0 t}$$

4. Ένα περιοδικό σήμα όταν αναπτυχθεί σε σειρά Fourier έχει συντελεστές

$$A_{2k+1} = 2/3, 1/3, 1/3, 1/5, 2/25$$

όπου $k = 0, 1, 2...$ και τα A_k έχουν υπολογιστεί μέσω της σχέσης

$$A_k e^{j\phi_k} = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

Πόση συνολική ενέργεια έχει κατανεμηθεί από τη συχνότητα ω_0 έως και την $6\omega_0$;

<u>Λύση:</u>

Βλέπουμε ότι τα A_k είναι τα A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, δηλ. οι περιττοί συντελεστές που εμπλέκονται στο μονόπλευρο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier. Θυμίζεται ότι το μονόπλευρο ανάπτυγμα προκύπτει από τη σχέση:

$$x(t) = A_0 + Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}\} = A_0 + Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)}\} =$$
$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k).$$

Επίσης, έχει δειχθεί ότι ισχύει:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

Άρα βλέπουμε ότι το A_k είναι οι συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier και σχετίζονται με τα X_k ως: $A_k = 2|X_k|$.

Προφανώς τα άρτια A_k είναι μηδέν στο παράδειγμά μας. Άρα καταλαβαίνουμε από όλα αυτά ότι στην πρώτη αρμονική συχνότητα, ω_0, υπάρχει πλάτος A_1, στην τρίτη αρμονική συχνότητα, $3\omega_0$, υπάρχει πλάτος A_3, στην πέμπτη αρμονική συχνότητα $5\omega_0$, υπάρχει πλάτος A_5, κ.ο.κ.

Το θεώρημα του Parseval μπορεί να μας δώσει τη συνολική ενέργεια που είναι κατανεμημένη από τη συχνότητα ω_0 (πρώτη αρμονική) ως τη συχνότητα $6\omega_0$ (έκτη αρμονική - που έχει $A_6 = 0$ στην περίπτωσή μας).

Άρα, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Parseval για μονόπλευρη σειρά Fourier, θα έχουμε:

$$E = A_0^2 + \sum_{k=1}^{6} \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_3^2}{2} + \frac{A_5^2}{2} = \frac{1}{3}.$$

5. Οι συντελεστές στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος έχουν υπολογιστεί από τη σχέση

$$A_k e^{j\phi_k} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

και είναι οι παρακάτω για $k > 0$

$$A_k e^{j\phi_k} = -\frac{A}{j2\pi k}[(-1)^k - 1]$$

και $A_0 = 0$. Βρείτε το σήμα σε ανάπτυγμα μονόπλευρης σειράς Fourier.

Λύση:

Ξέρουμε ότι η μονόπλευρη σειρά Fourier δίνεται από:

$$x(t) = A_0 + Re\{\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}\} = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

Παρατηρούμε ότι το $A_k e^{j\phi_k}$ είναι μη μηδενικό και ίσο με $\frac{A}{jk\pi}$, για περιττά k, και $A_k e^{j\phi_k} = 0$ για άρτια k. Άρα το $A_k e^{j\phi_k}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$A_k e^{j\phi_k} = \begin{cases} \frac{A}{j\pi k} = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even} \end{cases}$$

Άρα εύκολα συμπεραίνουμε ότι $A_k = \frac{A}{\pi k}$ και $\phi_k = -\frac{\pi}{2}$, για k περιττά.

Άρα θα είναι: $(A_0 = X_0 = 0)$

$$x(t) = \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \cos(2\pi(2k+1) f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A}{\pi(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t).$$

Σημείωση: Αν δινόταν αρχικά ότι $X_k = -\frac{A}{4j\pi k}[(-1)^k - 1]$ (δηλ. οι συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος), και ζητούσε το μονόπλευρο ανάπτυγμα, τότε πολύ απλά:

$X_k = \frac{A}{2\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, για k περιττά, με τον ίδιο συλλογισμό με παραπάνω, και θα είχαμε:

$$x(t) = \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} 2\frac{A}{2\pi k} \sin(2\pi k f_0 t)$$

$$= \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{A}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2\pi(2k+1)f_0 t),$$

το ίδιο δηλαδή αποτέλεσμα.

6. Βρείτε την περίοδο του σήματος:

$$x(t) = \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2)$$

Λύση:

Θα χρειαστεί να γράψουμε το σήμα μας ως άθροισμα απλών ημιτόνων ή/και συνημιτόνων, ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε για την περιοδικότητά του.

Είναι:

$x(t) = \sin^2(5\pi t + \phi_1) + \sin^2(2\pi t + \phi_2)$

$$= (\frac{1}{2j} e^{j5\pi t} e^{j\phi_1} - \frac{1}{2j} e^{-j5\pi t} e^{-j\phi_1})^2 + (\frac{1}{2j} e^{j2\pi t} e^{j\phi_2} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi t} e^{-j\phi_2})^2$$

$$= -\frac{1}{4} e^{j10\pi t} e^{j2\phi_1} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4} e^{-j10\pi t} e^{-j2\phi_1} - \frac{1}{4} e^{j4\pi t} e^{j2\phi_2} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j} - \frac{1}{4} e^{-j4\pi t} e^{-j2\phi_2}$$

$$= -\frac{1}{4}(e^{j10\pi t} e^{j2\phi_1} + e^{-j10\pi t} e^{-j2\phi_1}) - \frac{1}{4}(e^{j4\pi t} e^{j2\phi_2} + e^{-j4\pi t} e^{-j2\phi_2}) + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{4} 2\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{4} 2\cos(4\pi t + 2\phi_2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cos(10\pi t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4\pi t + 2\phi_2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cos(2\pi 5t + 2\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(2\pi 2t + 2\phi_2).$$

Άρα η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος θα είναι $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{5, 2\} = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$ sec.

Αλλιώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$ =ΕΚΠ$\{0.2, 0.5\} = 1$ sec.

Σημείωση:

1. Αν μας ζητούσε να δείξουμε ότι το σήμα είναι περιοδικό, και μετά να υπολογίσουμε την περίοδό του, τότε θα έπρεπε (για να είμαστε απόλυτα σωστοί) να πούμε ότι:
$\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$, που είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα είναι περιοδικό. Έπειτα, θα υπολογίζαμε την περίοδο με όποιον τρόπο θέλαμε.
Ένα καλό αντιπαράδειγμα σχετικά με αυτή τη σημείωση, θα ήταν π.χ. το
$x(t) = 2 + \cos(10\pi t + \phi_1) - \frac{1}{2}\cos(4t - \phi_2)$.
Τότε, θα ήταν $\frac{T1}{T2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{10}$, το οποίο προφανώς ΔΕΝ είναι λόγος ακεραίων αριθμών, άρα το σήμα ΔΕΝ είναι περιοδικό.

2. Εννοείται πως με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για να λύσουμε την άσκηση, μπορούμε αμέσως (έστω, με ελάχιστες πράξεις ακόμα :)) να απαντήσουμε σε ερωτήματα σχεδίασης φάσματος πλάτους και φάσης, όπως και ερωτήματα σχετικά με θεώρ. Parseval, κατανομής ενέργειας κλπ. Ό,τι χρειαζόμαστε για να απαντήσουμε σε αυτά υπάρχει έτοιμο στη λύση παραπάνω!