ΗΥ215 - Φροντιστήριο : Σειρές Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Καφεντζής

15-3-2010

1. Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t).$$

Λύση:

Θα χρειαστούμε τις ταυτότητες:

$\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$,

$-\sin(\theta) = \cos(\theta + \pi/2)$ και

$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$.

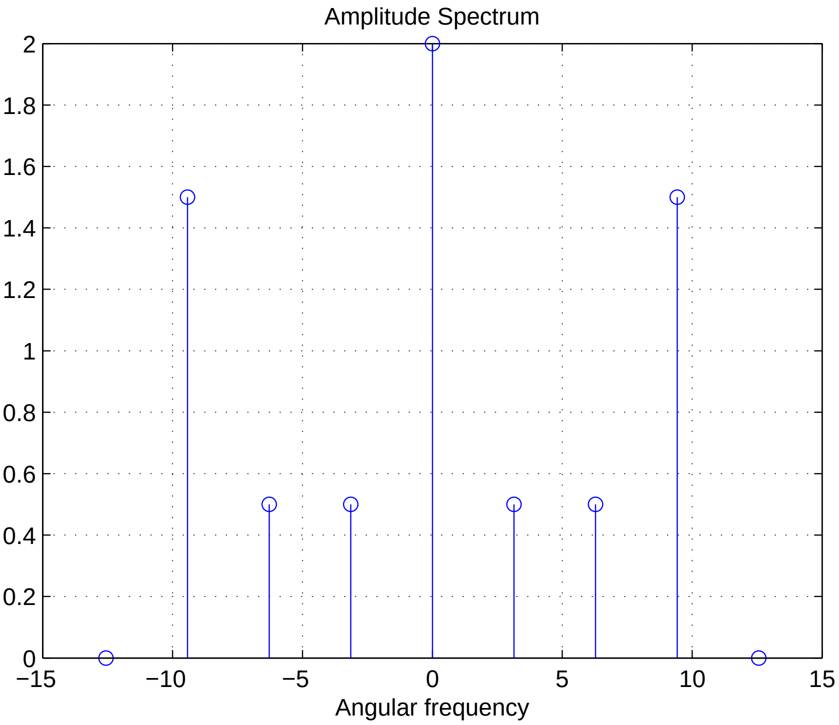
Θα μετατρέψουμε τα sin σε cos και θα φροντίσουμε τα πρόσημα να είναι όλα θετικά, εισάγοντας όπου χρειάζεται την κατάλληλη φάση.

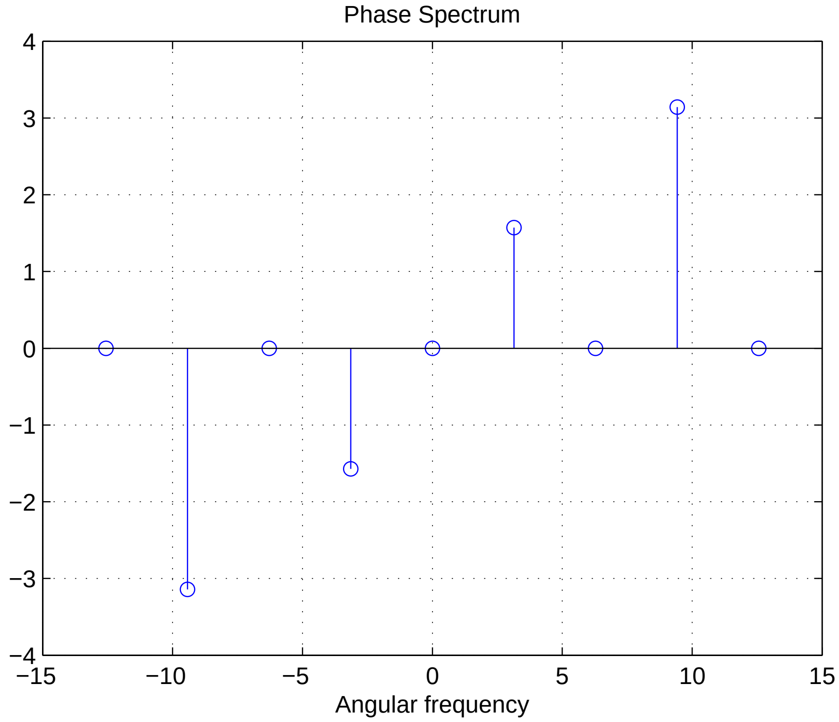
Είναι: $x(t) = 2 + \cos(2\pi t) - \sin(\pi t) - 3\cos(3\pi t) =$

$= 2 + \cos(2\pi t) + \cos(\pi t + \pi/2) + 3\cos(3\pi t + \pi) =$

$= 2 + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j\pi/2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t}e^{-j\pi/2} + \frac{3}{2}e^{j3\pi t}e^{j\pi} + \frac{3}{2}e^{-j3\pi t}e^{-j\pi}.$

Το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:


Amplitude Spectrum
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−15
−10
−5
0
5
10
15
Angular frequency


Phase Spectrum
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−15
−10
−5
0
5
10
15
Angular frequency

2. Έστω το σήμα

$$x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t).$$

Βρείτε την περίοδο T_0 του σήματος και υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{T_0} x^2(t)dt.$$

<u>Λύση:</u>

Για να βρούμε την περίοδο, θα πρέπει να γράψουμε το $x(t)$ ως άθροισμα ημιτόνων ή/και συνημιτόνων. Είναι:

$x(t) = \sin^2(5\pi t)\cos(22\pi t) =$

$= (\frac{1}{2j}e^{j5\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j5\pi t})^2(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}) =$

$= (\frac{1}{4j^2}e^{j10\pi t} - 2\frac{1}{2j}\frac{1}{2j}e^{j5\pi t}e^{-j5\pi t} + \frac{1}{4j^2}e^{-j10\pi t})(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}) =$

$= (-\frac{1}{4}e^{j10\pi t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-j10\pi t})(\frac{1}{2}e^{j22\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j22\pi t}) =$

$= -\frac{1}{8}e^{j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j12\pi t} + \frac{1}{4}e^{j22\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j22\pi t} - \frac{1}{8}e^{-j32\pi t} - \frac{1}{8}e^{j12\pi t} = (1)$

$= -\frac{1}{4}\cos(12\pi t) + \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{4}\cos(32\pi t) = (2)$

$= -\frac{1}{4}\cos(2\pi 6t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) - \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t)$

$= \frac{1}{4}\cos(2\pi 6t + \pi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 11t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi 16t + \pi)$

Ένας διαφορετικός τρόπος λύσης θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

και

$$\cos(\theta)\cos(\omega) = \frac{1}{2}\cos(\theta+\omega) + \frac{1}{2}\cos(\theta-\omega)$$

Τότε θα είναι:

$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(10\pi t))\cos(22\pi t) = \frac{1}{2}\cos(22\pi t) - \frac{1}{2}\cos(22\pi t)\cos(10\pi t) =$

$\frac{1}{2}\cos(22\pi t) + \frac{1}{4}\cos(32\pi t + \pi) + \frac{1}{4}\cos(12\pi t + \pi).$

Προφανώς, η θεμελιώδης συχνότητα θα είναι: $f_0 = \text{ΜΚΔ}(6, 11, 16) = 1$. Άρα $T_0 = \frac{1}{f_0} = 1$.

Τώρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογιστεί κατευθείαν στο πεδίο του χρόνου. Όμως η σχέση του Parseval μας λέει ότι:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(A_k)^2}{2}.$$

όπου X_k οι συντελεστές του δίπλευρου αναπτύγματος (σχέση 1) και A_k οι συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος (σχέση 2). Επιλέξτε όποιο σας βολεύει.

Άρα θα είναι:

$$\int_0^{T_0} x^2(t)dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 4|-\frac{1}{8}|^2 + 2|-\frac{1}{4}|^2 = \frac{4}{64} + \frac{2}{16} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με τον τύπο

$$T_0(A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(A_k)^2}{2}) = 2(\frac{(\frac{1}{4})^2}{2}) + (\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}.$$

3. Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το περιοδικό, με περίοδο T_0, σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ 2 - 2\frac{t}{T_0}, & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

Σας δίνεται ότι: $\int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a}(t - \frac{1}{a})$.

<u>Λύση:</u>

Θα αναπτύξουμε το σήμα κατά την εκθετική σειρά Fourier. Γνωρίζουμε ότι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \text{ και } X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι $f_0 T_0 = 1$, $e^{\pm j2\pi k} = 1$, και $e^{-j\pi k} = -1$. Θα είναι λοιπόν:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}(\int_0^{\frac{T_0}{2}} 1dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (2 - \frac{2}{T_0}t)dt)$$

$$= \frac{1}{T_0}t|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}2t|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \frac{2}{T_0}tdt$$

$$= \frac{1}{T_0}(\frac{T_0}{2} - 0) + \frac{2}{T_0}(T_0 - \frac{T_0}{2}) - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (\frac{2}{T_0}t)dt)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{T_0^2}(\frac{t^2}{2})|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{T_0^2}(\frac{T_0^2}{2} - \frac{T_0^2}{8})$$

$$= \frac{3}{2} - 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) = \frac{3}{2} - 2\frac{3}{8} = \frac{3}{2} - \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{3}{4}.$$

Επίσης,

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}(\int_0^{T_0} 1e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \int_0^{T_0} (2 - \frac{2}{T_0}t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt)$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}|_0^{\frac{T_0}{2}} + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} 2e^{-j2\pi k f_0 t}dt - \frac{2}{T_0^2}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} te^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{T_0}\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} - \frac{2}{T_0^2}(\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-j2\pi k f_0}(t - \frac{1}{-j2\pi k f_0})|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0})$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{T_0}(\frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k f_0} - \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k f_0}) - \frac{2}{T_0^2}(\frac{e^{-j2\pi k}}{-j2\pi k f_0}(T_0 - \frac{1}{-j2\pi k f_0}) -$$

$$-\frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k f_0}(\frac{T_0}{2} - \frac{1}{-j2\pi k f_0}))$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2}{T_0^2(-j2\pi k f_0)(j2\pi k f_0)} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} +$$

$$+\frac{2e^{-j\pi k}}{T_0^2(-j2\pi k f_0)(j2\pi k f_0)}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi k}(e^{-j\pi k} - 1) + \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{2e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} - \frac{2}{-j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} + \frac{e^{-j\pi k}}{-j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2 k^2}$$

$$= -\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{1}{j2\pi k} + 2\frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} - \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k} + \frac{e^{-j\pi k}}{2\pi^2 k^2}$$

$$= \frac{1}{j2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k})$$

$$= \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k}).$$

Οπότε τελικά οι συντελεστές Fourier είναι οι :

$$X_0 = \frac{3}{4} \text{ και } X_k = \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k}).$$

Μπορούμε να γράψουμε τώρα ότι:

$$x(t) = X0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty}(\frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k}))e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi k f_0 t} - \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2}(1 - e^{-j\pi k})e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - e^{-j\pi k}) e^{j2\pi k f_0 t}.$$

Παρατηρούμε ότι $(1 - e^{-j\pi k}) = 1 - (-1)^k$, άρα:

$$(1 - e^{-j\pi k}) = \begin{cases} 2, & \text{k odd} \\ 0, & \text{k even} \end{cases}$$

Άρα θα είναι:

$$x(t) = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{\text{k odd}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} 2 e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$x(t) = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j2\pi(2k-1) f_0 t}.$$

Αν θέλουμε να προχωρήσουμε ακόμα λίγο και να αναπτύξουμε το σήμα μας σε μονόπλευρη σειρά Fourier τότε θα έχουμε:

$$x(t) = \frac{3}{4} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi k} e^{j(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2})} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi^2 (2k-1)^2} e^{j2\pi(2k-1) f_0 t}$$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2\pi k} \cos(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{2\pi^2 (2k-1)^2} \cos(2\pi(2k-1) f_0 t)$$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi k} \sin(2\pi k f_0 t) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos(2\pi(2k-1) f_0 t),$$

γιατί ξέρουμε ότι για τους συντελεστές του μονόπλευρου αναπτύγματος σε σειρά Fourier ισχύει ότι:

$$A_k = 2|X_k|$$