Επαναληπτικές Ασκήσεις σε Ανάλυση σε Σειρές Fourier

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής
Υποψ. Διδάκτωρ Τμήμ. Η/Υ
Πανεπιστήμιο Κρήτης

19 Απριλίου 2013

1. **Η εκθετική σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος δίδεται ως:**

$$\mathbf{x(t) = (2+j2)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2-j2)e^{j3t}}.$$

Να βρεθεί:

(α′) **Αν το σήμα είναι πραγματικό, φανταστικό, ή μιγαδικό.**

(β′) **Το φάσμα πλάτους και φάσης του σήματος.**

(γ′) **Εκφράστε τους συντελεστές Fourier ως άθροισμα συναρτησεων Δέλτα**

(δ′) **Το μονόπλευρο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.**

(ε′) **Το ολοκλήρωμα** $\mathbf{\int_0^{T_0} x^2(t)dt}$.

(ϛ′) **Βρείτε τους συντελεστές Fourier για τα παρακάτω σήματα:**

  (α′) $\mathbf{x(t+3)}$

  (β′) $\mathbf{\frac{dx(t)}{dt}}$

Λύση:

(α′) Παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές των εκθετικών είναι συζυγείς μεταξύ τους, δηλ. ισχύει $X_k = X^*_{-k}$. Αυτή η ιδιότητα ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα, άρα το σήμα μας είναι πραγματικό.

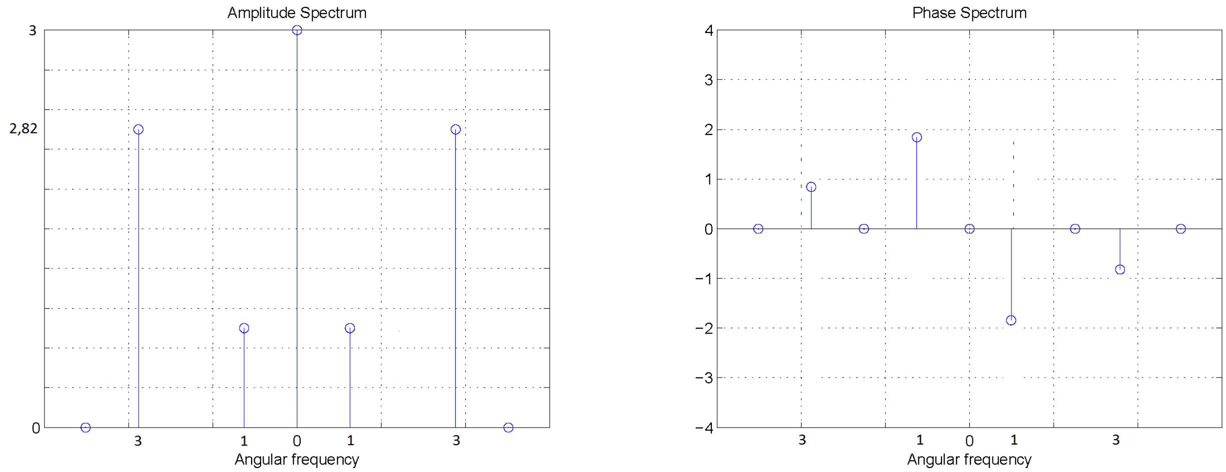
(β′) Για να βρούμε εύκολα το φάσμα πλάτους και φάσης, αρκεί να μετατρέψουμε τους συντελεστές X_k σε μορφή μέτρο-φάση, δηλ. $X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$. Είναι

$$\begin{aligned}
2+j2 &= \sqrt{2^2+2^2}e^{j\tan^{-1}\frac{2}{2}} = \sqrt{8}e^{j\tan^{-1}(1)} = \sqrt{8}e^{j\frac{\pi}{4}} \\
j2 &= 2e^{j\frac{\pi}{2}} \\
2-j2 &= (\sqrt{8}e^{j\frac{\pi}{4}})^* = \sqrt{8}e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
-j2 &= 2e^{-j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο σχήμα 1α′ και το φάσμα φάσης στο σχήμα 1β′.

(γ′) Οι συντελεστές γράφονται ως

$$X_k = (2+j2)\delta[k+3] + j2\delta[k+1] + 3\delta[k] - j2\delta[k-1] + (2-j2)\delta[k-3]$$



(α′) Φάσμα πλάτους Άσκησης 1

(β′) Φάσμα φάσης Άσκησης 1

Σχήμα 1: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 1

(δ′) Το μονόπλευρο ανάπτυγμα δίνεται εύκολα ως

$$\begin{aligned} x(t) &= (2+j2)e^{-j3t} + j2e^{-jt} + 3 - j2e^{jt} + (2-j2)e^{j3t} \\ &= \sqrt{8}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j3t} + 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-jt} + 3 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jt} + \sqrt{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j3t} \\ &= 3 + 2\sqrt{8}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(ε′) Το ολοκλήρωμα θα υπολογιστεί από τη σχέση του Parseval:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} x^2(t)dt &= T_0 \sum_{k=-3}^{3} |X_k|^2 \\ &= 2\pi\left(3^2 + (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 + 2^2 + 2^2\right) \\ &= 2\pi 33 \\ &= 66\pi \end{aligned}$$

(ϛ′) Θα είναι

(α′)

$$x(t+3) \leftrightarrow e^{j3k\omega_0}X_k$$

και άρα

$$\begin{aligned} y(t) = x(t+3) \leftrightarrow Y_k &= e^{j3k\omega_0}X_k = e^{j3k}X_k \\ &= e^{j3k}\Big((2+j2)\delta[k+3] + j2\delta[k+1] + 3\delta[k] - j2\delta[k-1] + (2-j2)\delta[k-3]\Big) \\ &= (2+j2)e^{j3k}\delta[k+3] + j2e^{j3k}\delta[k+1] + 3e^{j3k}\delta[k] \\ &- j2e^{j3k}\delta[k-1] + (2-j2)e^{j3k}\delta[k-3] \\ &= (2+j2)e^{-j9}\delta[k+3] + j2e^{-j3}\delta[k+1] + 3\delta[k] \\ &- j2e^{j3}\delta[k-1] + (2-j2)e^{j9}\delta[k-3] \end{aligned}$$

(β′) ϑα είναι

$$dx(t)/dt \leftrightarrow jk\omega_0 X_k$$

και άρα

$$\begin{aligned} y(t) = dx(t)/dt \leftrightarrow Y_k &= jk\omega_0 X_k = jkX_k \\ &= (2+j2)jk\delta[k+3] + j2jk\delta[k+1] + 3jk\delta[k] \\ &- j2jk\delta[k-1] + (2-j2)jk\delta[k-3] \\ &= -(2+j2)3j\delta[k+3] - j2j\delta[k+1] - j2j\delta[k-1] + 3(2-j2)j\delta[k-3] \\ &= (6-6j)\delta[k+3] + 2\delta[k+1] + 2\delta[k-1] + (6+6j)\delta[k-3]. \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. **Δίνεται το παρακάτω περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$:**

$$\mathbf{x(t) = 2\cos\left(2\pi 200t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi 500t - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(2\pi 600t + \frac{2\pi}{5}\right)}$$

(α′) **Βρείτε την περίοδο, $\mathbf{T_0}$, του σήματος και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.**

(β′) **Υπολογίστε το $\mathbf{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}$**

(γ′) **Υπολογίστε την ισχύ του σήματος $\mathbf{y(t)}$**

Λύση:

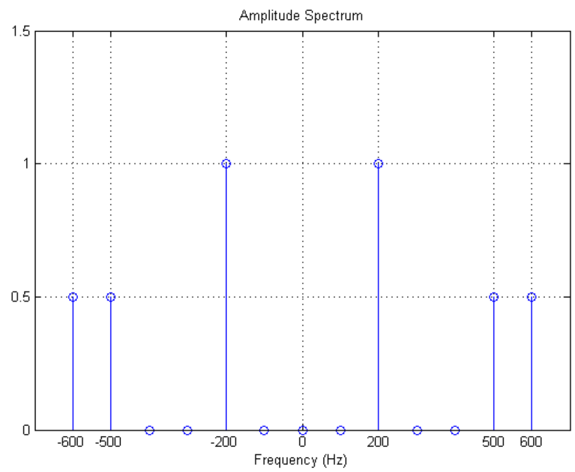
(α′) Το σήμα έχει συχνότητες $200, 500, 600 Hz$, άρα θεμελιώδη συχνότητα $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{200, 500, 600\} = 100Hz$. Οπότε η περίοδος θα είναι $T_0 = 1/100 = 0.01sec$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, το σήμα γράφεται ως:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} - \\ &- \frac{1}{2j}e^{j2\pi 600t}e^{j2\pi/5} + \frac{1}{2j}e^{-j2\pi 600t}e^{-j2\pi/5} \\ &= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} + \\ &+ \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{j2\pi 600t}e^{j2\pi/5} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{-j2\pi 600t}e^{-j2\pi/5} \\ &= e^{j2\pi 200t}e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 200t}e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 500t}e^{-j\pi/8} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 500t}e^{j\pi/8} + \\ &+ \frac{1}{2}e^{j2\pi 600t}e^{j9\pi/10} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi 600t}e^{-j9\pi/10} \end{aligned}$$

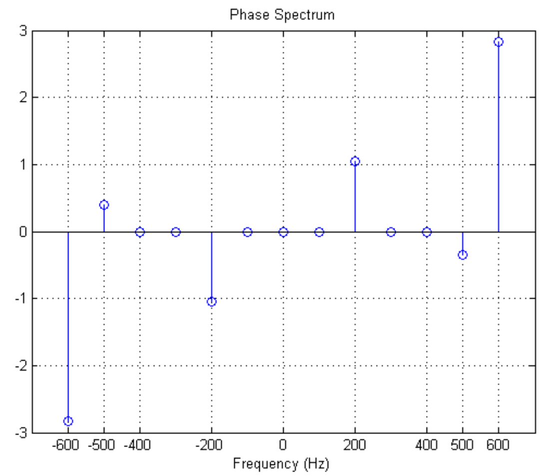
Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο σχήμα 2.

(β′) Γνωρίζουμε ότι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow Y_k = \frac{X_k}{jk\omega_0}$$



(α΄) Φάσμα πλάτους Άσκησης 2



(β΄) Φάσμα φάσης Άσκησης 2

Σχήμα 2: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 2

και άρα θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{j2\pi 200} e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} + \frac{1}{(-j2\pi 200)} e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} + \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi 500} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/8} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{(-j2\pi 500)} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/8} + \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi 600} e^{j2\pi 600t} e^{j9\pi/10} + \frac{1}{2}\frac{1}{(-j2\pi 600)} e^{-j2\pi 600t} e^{-j9\pi/10} \\
&= \frac{1}{2\pi 200} e^{j2\pi 200t} e^{j\pi/3} e^{j\pi/2} + \frac{1}{2\pi 200} e^{-j2\pi 200t} e^{-j\pi/3} e^{-j\pi/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500} e^{j2\pi 500t} e^{-j\pi/8} e^{j\pi/2} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500} e^{-j2\pi 500t} e^{j\pi/8} e^{-j\pi/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600} e^{j2\pi 600t} e^{j9\pi/10} e^{-j\pi/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600} e^{-j2\pi 600t} e^{-j9\pi/10} e^{j\pi/2} \\
&= \frac{1}{2\pi 200} e^{j2\pi 200t} e^{j5\pi/6} + \frac{1}{2\pi 200} e^{-j2\pi 200t} e^{-j5\pi/6} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500} e^{j2\pi 500t} e^{j3\pi/8} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 500} e^{-j2\pi 500t} e^{-j3\pi/8} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600} e^{j2\pi 600t} e^{j4\pi/10} + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi 600} e^{-j2\pi 600t} e^{-j4\pi/10} \\
&= \frac{1}{\pi 200} \cos(2\pi 200t + 5\pi/6) + \frac{1}{2\pi 500} \cos(2\pi 500t + 3\pi/8) + \frac{1}{2\pi 600} \cos(2\pi 600t + 4\pi/10)
\end{aligned}
$$

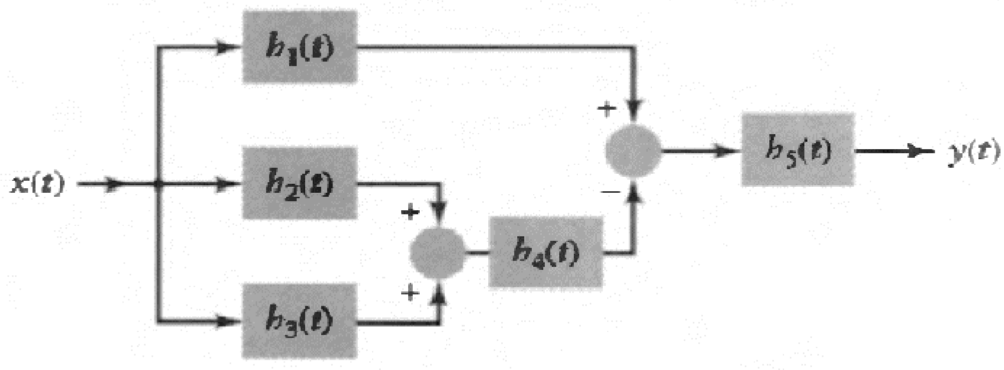
(γ΄) Η συνολική ισχύς είναι το άθροισμα των επιμέρους ισχύων των ημιτόνων, αφού αυτά έχουν διαφορετικές μεταξύ τους συχνότητες, άρα

$$P_y = \sum_{k=1}^{3} \frac{P_k^2}{2} = \frac{(\frac{1}{200\pi})^2 + (\frac{1}{1000\pi})^2 + (\frac{1}{1200\pi})^2}{2}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν αθροίζαμε τα τετράγωνα των μέτρων των εκθετικών συντελεστών Fourier, $\sum |Y_k|^2$.

3. **Για το σύστημα του σχήματος 3, βρείτε το $\mathbf{h(t)}$, την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, αν $\mathbf{h_1(t) = \delta(t-1)}$, $\mathbf{h_2(t) = e^{-2t}u(t)}$, $\mathbf{h_3(t) = \delta(t-1)}$, $\mathbf{h_4(t) = e^{-3(t+2)}u(t+2)}$, και $\mathbf{h_5(t) = \delta(t+1)}$**

(α΄) **Ποιά από τα επιμέρους συστήματα είναι αιτιατά; Ποιά ευσταθή;**



Σχήμα 3: Σύστημα Άσκησης 3

(β') **Το συνολικό σύστημα h(t) ειναι αιτιατό και ευσταθές;**

Λύση:
Για το συνολικό σύστημα, γνωρίζουμε ότι τα παράλληλα συστηματα μπορούν να γραφούν ως ένα σύστημα που αποτελει το άθροισμα των επιμέρους, ενώ τα συστήματα σε σειρά μπορούν να γραφούν ως ένα σύστημα που αποτελεί τη συνέλιξη των επιμέρους συστημάτων. Άρα θα είναι

$$
\begin{aligned}
h(t) &= (h_1(t) + ((h_2(t) + h_3(t)) * h_4(t))) * h_5(t) \\
&= (\delta(t-1) + (e^{-2t}u(t) + \delta(t-1)) * e^{-3(t+2)}u(t+2)) * \delta(t+1) \\
&= (\delta(t-1) + e^{-2t}u(t) * e^{-3(t+2)}u(t+2) + \delta(t-1) * e^{-3(t+2)}u(t+2)) * \delta(t+1) \\
&= (\delta(t-1) + e^{-2t}u(t) * e^{-3(t+2)}u(t+2) + e^{-3(t+1)}u(t+1)) * \delta(t+1) \\
&= \delta(t) + e^{-2t}u(t) * e^{-3(t+2)}u(t+2) * \delta(t+1) + e^{-3(t+2)}u(t+2) \\
&= \delta(t) + e^{-2t}u(t) * e^{-3(t+3)}u(t+3) + e^{-3(t+2)}u(t+2)
\end{aligned}
$$

Αρκεί να υπολογίσουμε τη συνέλιξη. Είναι

$$
\begin{aligned}
e^{-2t}u(t) * e^{-3(t+3)}u(t+3) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(\tau+3)}u(\tau+3)e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)}e^{-3(\tau+3)}u(\tau+3)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)-3(\tau+3)}u(\tau+3)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t+2\tau-3\tau-9}u(\tau+3)u(t-\tau)d\tau \\
&= e^{-2t-9}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau+3)u(t-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$
u(\tau+3) = \begin{cases} 1, & \tau \geq -3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}
$$

και

$$
u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \leq t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}
$$

Άρα

$$u(\tau+3)u(t-\tau)=\begin{cases}1, & -3\leq\tau\leq t\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Άρα

$$\begin{aligned}e^{-2t}u(t)*e^{-3(t+3)}u(t+3) &= e^{-2t-9}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}u(\tau+3)u(t-\tau)d\tau\\ &= e^{-2t-9}\int_{-3}^{t}e^{-\tau}d\tau\\ &= -e^{-2t-9}\Big[e^{-\tau}\Big]_{-3}^{t}\\ &= -e^{-2t-9}(e^{-t}-e^{3})\\ &= -e^{-3t-9}+e^{-2t-6},\ t\geq -3\\ &= (e^{-2(t+3)}-e^{-3(t+3)})u(t+3)\end{aligned}$$

Οπότε τελικά

$$h(t)=\delta(t)+(e^{-2(t+3)}-e^{-3(t+3)})u(t+3)+e^{-3(t+2)}u(t+2)$$

(α′) Αιτιατά συστηματα είναι τα $h_1(t), h_2(t), h_3(t)$, γιατι πληρούν τη συνθήκη αιτιατοτητας για ένα σήμα, $h(t)=0,\ t<0$. Ευσταθή συστήματα είναι όλα, γιατί ολα ικανοποιούν τη συνθήκη $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$.

(β′) Το συνολικό σύστημα δεν είναι αιτιατό αλλά είναι ευσταθές.

4. **Βρειτε ποιά από από τα παρακάτω ΓΧΑ συστήματα είναι χωρίς μνήμη, αιτιατά, και ευσταθή:**

(α′) $\mathbf{h(t)}=\cos(\pi\mathbf{t})$

(β′) $\mathbf{h(t)}=\mathbf{e^{-2t}u(t-1)}$

(γ′) $\mathbf{h(t)}=\mathbf{u(t+1)}$

(δ′) $\mathbf{h(t)}=\mathbf{3}\delta(\mathbf{t})$

(ε′) $\mathbf{h(t)}=\cos(\pi\mathbf{t})\mathbf{u(t)}$

Λύση:

Συστηματα χωρίς μνήμη λέγονται αυτά που έχουν κρουστική απόκριση της μορφης $h(t)=\alpha\delta(t)$. Συστήματα αιτιατά λέγονται αυτά που η κρουστική απόκριση ικανοποιει τη συνθήκη $h(t)=0,\ t<0$. Συστήματα ευσταθή έχουν κρουστική απόκριση που ικανοποιεί τη συνθήκη $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$.

(α′) Προφανώς είναι σύστημα με μνήμη. Δεν είναι αιτιατο, και είναι ασταθές.

(β′) Προφανώς ειναι σύστημα με μνήμη, αιτιατό και ευσταθές.

(γ′) Είναι σύστημα με μνήμη, μη αιτιατό, και μη ευσταθές.

(δ′) Είναι σύστημα χωρίς μνήμη, αιτιατο, και ευσταθές.

(ε′) Είναι σύστημα με μνήμη, αιτιατο, και μη ευσταθές.

5. **Έστω το περιοδικό σήμα $\mathbf{x(t)}$ που ορίζεται σε μια περίοδο $-\mathbf{T_0/2 \le t \le T_0/2}$ ως:**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 1, & |t| \le t_c \\ 0, & t_c < |t| \le T_0/2 \end{cases}$$

με $\mathbf{tc < T_0/2}$. Αναπτύξτε το σε σειρά Fourier, για $\mathbf{t_c = T_0/4}$ και $\mathbf{t_c = T_0/10}$.

Λύση:
Θα αναπτύξουμε το περιοδικό σήμα σε σειρά Fourier χωρίς αντικατάσταση της t_c, η οποία θα γίνει στο τέλος. Είναι:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} 1dt = \frac{1}{T_0}t\Big|_{-t_c}^{t_c} = \frac{1}{T_0}(t_c + t_c) = \frac{2t_c}{T_0}$$

και

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-t_c}^{t_c} e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\frac{1}{-j2\pi k f_0}e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{-t_c}^{t_c} \\ &= -\frac{1}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k f_0 t_c} - e^{j2\pi k f_0 t_c}\right) \\ &= \frac{1}{j2\pi k}2j\sin(2\pi k f_0 t_c) \\ &= \frac{\sin(2\pi k f_0 t_c)}{\pi k} \end{aligned}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{4}$, έχουμε

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{2T_0/4}{T_0} = \frac{1}{2} \\ X_k &= \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/4)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2}sinc(k/2) \end{aligned}$$

- Για $t_c = \frac{T_0}{10}$, έχουμε

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{2T_0/10}{T_0} = \frac{1}{5} \\ X_k &= \frac{\sin(2\pi k f_0 T_0/10)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k/5)}{\pi k} = \frac{1}{5}sinc(k/5) \end{aligned}$$